数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 68-75

Nash-Moser の定理

静岡大学工学部 応用数学教室　　星賀　彰 (Akira Hoshiga)
Department of Applied Mathematics,
Shizuoka University

1 序

2002 年に京大数理研で行われた「非線型双曲型方程式系の解の挙動に関する研究」で講演した際、私は 2 次元空間における準線型波動方程式の爆発問題の解法の一つとして、S. Alinhac [1] の Geometric blowup の方法について解説した ([3])。その方法は大ざっぱに言うと、非線型問題を Blowup system と呼ばれる方程式系に変形し、その Blowup system の解の中でも、特殊な条件を満たすものを見つけることによって、もとの方程式の解の爆発が示されるというものである。この Blowup system を解く段階で、Alinhac は Nash-Moser の陰関数定理を用いている。この定理は、波動方程式に限らず楕円型方程式や放物型方程式の非線型問題において頻繁に使われている定理である。そこで本稿では、この Nash-Moser の陰関数定理について、Alinhac-Gérard [2] を参考にして解説したいと思う。

以下、第 2 章では Blowup system の導出の大まかな筋を記し、第 3 章では Nash-Moser の定理を述べ、第 4 章ではその証明の大筋とポイントとなる点について解説する。

2 Blowup system の導出

次の準線型波動方程式の初期値問題を考える。

$$L(u) = \partial_t^2 u - \Delta u + \sum_{i,j,k=0}^{2} g_{ij}^k u_k u_{ij} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^2 \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varepsilon\varphi(x), \qquad \partial_t u(x,0) = \varepsilon\psi(x) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{R}^2. \tag{2}$$

ここで、$u_k = \partial u/\partial x_k$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial c_i x_j$ $(x_0 = t)$ とし g_{ij}^k は $g_{ij}^k = g_{ji}^k$ をみたす定数、ε は正の小さいパラメータとする。また、$\varphi(x), \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\mathrm{supp}\{\varphi, \psi\} \subset \{x : |x| \le M\}$ と仮定する。さらに $X = (X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{R}^3$ に対して、$g(X) = \sum_{i,j,k=0}^2 g_{ij}^k X_i X_j X_k$ と定義し、超曲面 $X_0^2 = X_1^2 + X_2^2$ 上で $g(X) \not\equiv 0$ であると仮定する。このとき、ある時刻 $t_\varepsilon = C\varepsilon^{-2}$ において解 u の 2 階偏微分係数が無限大に発散することが、Alinhac [1] によって示されている。このことを証明するために、Alinhac は次の手順で Blowup system を導き出している。まず、変数 $(x, t) \in \mathbf{R}^2 \times [0, \infty)$ を

$$\sigma = |x| - t, \qquad \omega = \frac{x}{|x|}, \qquad \tau = \varepsilon\sqrt{t}$$

により、$(\sigma, \omega, \tau) \in \mathbf{R} \times S^1 \times [0, \infty)$ に変換し、また $u(x,t) = \varepsilon|x|^{-1/2}G(\sigma\omega, \tau)$ とおくと、方程式 (1) は G の方程式

$$\frac{|x|}{\varepsilon^2}L(u) = P(G) = \sum_{i,j=1}^3 p_{ij}(\sigma, \omega, \tau, G, \nabla G)\partial_i\partial_j G + q(\sigma, \omega, \tau, G, \nabla G) = 0 \qquad (3)$$

に書き換えられる。ただし、$\nabla G = (\partial_1 G, \partial_2 G, \partial_3 G) = (\partial_\sigma G, \partial_\omega G, \partial_\tau G)$ とする。さらに変数変換

$$\phi(s, \omega, \tau) = \sigma$$

を導入し、

$$\begin{aligned} w(s, \omega, \tau) &= G(\phi(s, \omega, \tau), \omega, \tau) \\ v(s, \omega, \tau) &= \partial_\sigma G(\psi(s, \omega, \tau), \omega, \tau) \end{aligned}$$

とおくと、方程式 (3) はある $\mathcal{E}(\phi, w, v)$, $\mathcal{R}(\phi, w, v)$ をもって

$$P(G) = \frac{\mathcal{E}(\phi, w, v)}{\partial_s \phi} + \mathcal{R}(\phi, w, v) = 0$$

と表される。これより直ちに、$\mathcal{E} = \mathcal{R} = 0$ ならば $P(G) = 0$ となることがわかる（もちろん逆は成り立たない）。また、$\partial_s w = \partial_\sigma \partial_s \phi$ より

$$\mathcal{A}(\phi, w, v) = \partial_s w - v\partial_s \phi = 0 \qquad (4)$$

が成り立たなくてはならない。以上より、方程式系

$$\mathcal{E} = 0, \ \mathcal{R} = 0, \ \mathcal{A} = 0$$

の解 (ϕ, w, v) が $D = \{(s,\omega,\tau) \ : \ -\infty < s \leq M, \omega \in S^1, 0 \leq \tau < \tau_\varepsilon\}$ 内でみつかれば、逆を辿って元の非線型問題 (1) 及び (2) の解が $\mathbf{R}^2 \times [0, \tau_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2})$ の範囲で求められる。この方程式系を Alinhac 氏は Blowup system と呼んでいる。Blowup system の解は一意ではない。そこで、付加条件として

$$
\begin{aligned}
&\partial_s\phi(s,\omega,\tau) \geq 0 \quad \text{in} \quad D, \\
&{}^\exists M \in \bar{D} \cap \{\tau = \tau_\varepsilon\} \quad \text{s.t.} \quad \partial_s\phi(s,\omega,\tau) = 0 \iff (s,\omega,\tau) = M, \\
&\partial_s\partial_\tau\phi(M) < 0, \ \ \partial_s^2\phi(M) = \partial_s\partial_\omega\phi(M) = 0, \ \ \partial_{s,\omega}^2\partial_s\phi(M) > 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

を与える。このとき、もし (5) をみたす解 (ϕ, w, v) が見つかったとすれば、$\partial_s v = \partial_\sigma^2 G \partial_s \phi$ と (5) より $\partial_\sigma^2 G(M) = \infty$ となることがわかる。このことは、時刻 $t = t_\varepsilon$ において u の 2 階偏導関数が無限大に発散することを示している。したがって、(1) 及び (2) の爆発問題は、条件 (5) をみたすような Blowup system の解を見つけることに置き換わるのである。

ここで $\Phi_\varepsilon = {}^t(\mathcal{E}, \mathcal{R}, \mathcal{A})$, $U = {}^t(\phi, w, v)$ とおき、Blowup system を

$$
\Phi_\varepsilon(U) = 0 \tag{6}
$$

と表すことにする。このとき問題はこの方程式が十分小さな ε に対して解を持つかであるが、特に $\varepsilon = 0$ としてみると、(6) は簡単な常微分方程式系になり具体的に解くことができ、その上その解 U_0 は (5) をみたしていることもわかるのである。そこで、(6) を $\varepsilon = 0$ の場合の微小摂動と考えてみる。つまり、$\Phi_\varepsilon(U_0) = -f \ (\approx 0)$ とおくことにより、(6) を

$$
\Phi_\varepsilon(U) = \Phi_\varepsilon(U_0) + f \tag{7}
$$

と書き換え、与えられた U_0 と十分小さい f に対して、(7) は U_0 の近くに解を持つか、と考えるのである。この問題を解くために Nash-Moser の定理を使う。次章ではまずその定理を正確に述べようと思う。

3 主定理

コンパクトな C^∞ 多様体 D を考え、$u_0 \in C^\infty(D, \mathbf{R}^p)$ $(p \in \mathbf{N})$ を任意に固定する。また、$\mu > 0$ に対して u_0 の H^μ ノルムに関する十分小さい近傍を一つ取り V とする。このとき、V 上で定義された汎関数

$$
\Phi \ : \ V \longrightarrow C^\infty(D, \mathbf{R}^q)
$$

$(q \in \mathbf{N})$ を考える。ただし、Φ は次の2つの条件 (A) 及び (B) をみたすものとする。

(A) Φ は C^2 汎関数であり、かつある $a, b, c \geq 0$ が存在し、任意の $u \in V$ 及び任意の $v_1, v_2 \in C^\infty(D, \mathbf{R}^p)$ に対して

$$\begin{aligned} ||\Phi''(u)\ (v_1, v_2)||_s \ \leq\ & C\{||v_1||_a||v_2||_a(1+||u||_{s+b})+ \\ & +||v_1||_a||v_2||_{s+c}+||v_1||_{s+c}||v_2||_a\} \qquad (s \geq 0) \end{aligned} \tag{8}$$

成り立つ。

ここで、$||\cdot||_\lambda$ は H^λ ノルムを意味し、汎関数の導関数 Φ' 及び Φ'' はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Phi'(u)\ v &= \left.\frac{d}{dt}\Phi(u+tv)\right|_{t=0} \\ \Phi''(u)\ (v_1, v_2) &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(u+sv_1+tv_2)\right|_{t=s=0} \end{aligned}$$

と定義する。

(B) 任意の $u \in V$ 及び $g \in C^\infty(D, \mathbf{R}^q)$ に対して

$$\Phi'(u)v = g$$

をみたす $v \in C^\infty(D, \mathbf{R}^p)$ が存在し、さらにある $d, \lambda \geq 0$ に対して

$$||v||_s \leq C\{||g||_{s+\lambda}+||g||_\lambda(1+||u||_{d+s})\} \qquad (s \geq 0) \tag{9}$$

が成り立つ。

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 1 (*Nash-Moser* の定理) 汎関数 Φ が条件 **(A)** 及び **(B)** をみたしているとする。また、

$$\alpha > \max\{\ \mu,\ \lambda+a+c,\ a+\frac{1}{2}(\lambda+b),\ 2a\ \} \tag{10}$$

となる正の数 α を一つ固定する。このとき、$C^\infty(D, \mathbf{R}^p)$ における原点の $H^{\lambda+\alpha}$ ノルムに関する近傍 W が存在し、任意の $u_0 \in V \cap H^\alpha$ 及び $f \in W$ に対して

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f \tag{11}$$

の解 $u \in V \cap H^\alpha$ が存在する。

（注意１） 関数 $u \in V \cap H^\alpha$ が (11) の解であるとは、関数列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \in V \cap H^\alpha$ が存在し、任意の $\rho > 0$ に対して、$j \longrightarrow \infty$ としたとき

$$||u_j - u||_{\alpha-\rho} \longrightarrow 0, \qquad ||\Phi(u_j) - \Phi(u) - f||_{\alpha+\lambda-\rho} \longrightarrow 0$$

が成り立つことと定義する。
（注意２） 上の定理を非線型問題に適用するには、汎関数が条件 (A) 及び (B) をみたすことを確かめなくてはならない。Φ が微分作用素ならば、条件 (A) が成り立つことは容易に示されるが、(B) の方は自明な条件ではない。特に１章で挙げた爆発問題は、付加条件 (5) をもみたす解を探さなくてはならないため (B) を示すのは簡単ではない。Alinhac [1] でも、条件 (B) を示すことに証明の多くを割いている。

4 証明の大筋

主定理の証明には逐次近似法を用いる。条件 (A) および (B) を用いて、適当な近似解の列を構成するのであるが、(A) も (B) もその評価の中に微分階数のロスを含んでいるという欠点を持っている。つまり帰納的に近似解を構成すると、どうしても一つ前のステップより解の regularity が下がり、近似解の一様な評価は期待できないのである。そこで J. Nash 氏は [4] の中で次のような Smoothing operator を導入することによってその困難を克服したのである。

命題 1 $\alpha > 0$ とする。このとき、任意の $\theta > 0$ に対して次をみたすような作用素 $S_\theta : H^\alpha \longrightarrow C^\infty \cap H^\infty$ が存在する。

$$||S_\theta u||_\beta \leq C||u||_\alpha, \qquad \beta \leq \alpha \tag{12}$$

$$||S_\theta u||_\beta \leq C\theta^{\beta-\alpha}||u||_\alpha, \qquad \beta \geq \alpha \tag{13}$$

$$||u - S_\theta u||_\beta \leq C\theta^{\beta-\alpha}||u||_\alpha, \qquad \beta \leq \alpha \tag{14}$$

$$\left|\left|\frac{d}{d\theta}S_\theta u\right|\right|_\beta \leq C\theta^{\beta-\alpha-1}||u||_\alpha, \qquad \beta\text{は任意}. \tag{15}$$

たとえば、(11) は θ の正ベキの項が出てくる代わりに u の regularity を稼いでいるのである。具体的な S_θ の構成法やその証明については [1] が詳しい。

また、各 $n \in \mathbf{N}$ に対して、$\theta_n = (\theta_0^{\frac{1}{\varepsilon}} + n)^{\varepsilon}$ $(\theta_0 >> 1)$ とおき、簡単のため $S_n = S_{\theta_n}$ と表すことにする。θ_n については、$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、次のことが成り立つことがわかる。

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \varepsilon \theta_n^{1-\frac{1}{\varepsilon}} (1 + O(\theta_n^{-\frac{1}{\varepsilon}})),$$

特に $n \longrightarrow \infty$ としたとき

$$\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n \longrightarrow \infty \quad \text{かつ} \quad \bar{\theta}_n = \theta_{n+1} - \theta_n \longrightarrow 0. \tag{16}$$

さて、ここから近似解の iteration scheme について解説する。 $u_0, u_1, \cdots, u_n$ が与えられているとき、u_{n+1} を

$$u_{n+1} = u_n + \bar{u}_n$$

で定義する。ただし、$\bar{u}_n$ は次をみたすものとする。

$$\Phi'(S_n u_n)\bar{u}_n = g_n \tag{17}$$

$$g_n = (S_n - S_{n-1})f - (S_n - S_{n-1}) \sum_{k=0}^{n-1} e_k - S_{n-1} e_{n-1} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} e_k &= e'_k + e''_k = \Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k) - \Phi'(u_k)\bar{u}_k \\ &\quad +(\Phi'(u_k) - \Phi'(u_{k-1}))\bar{u}_k. \end{aligned} \tag{19}$$

上のような u_n が有効な近似解列になっていることは、次の補題からわかる。

補題 1 $\alpha > 0$ は定理 *1* の中で与えられたものとし $\alpha < \tilde{\alpha}$ なる $\tilde{\alpha}$ をとる。また各 $n \in \mathbf{N}$ に対して条件 (H_n) を

(H_n) $\qquad 0 \le k \le n, \ s \in [0, \tilde{\alpha}]$ ならば $||\bar{u}_k||_s \le \delta \bar{\theta}_k \theta_k^{s-\alpha-1}$ が成り立つ、

と定義する。このとき、$\delta > 0$ が十分小さくかつ $\tilde{\alpha} > 0$ が十分大きければ、全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して (H_n) が成り立つ。

実際、上の補題が成り立てば、$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \bar{u}_k$ と (H_n) と (10) より

$$\begin{aligned} ||u_{n+1} - u_0||_\mu &\le \sum_{k=0}^{n} ||\bar{u}_k||_\mu \\ &\le \delta \sum_{k=0}^{n} \bar{\theta}_k \theta_k^{\mu-\alpha-1} \\ &\le \delta \int_{\theta_0}^{\infty} x^{\mu-\alpha-1} dx \\ &\le C\delta \end{aligned} \tag{20}$$

が成り立つ。よって、δ を十分小さくとれば、一様に u_{n+1}, $S_{n+1}u_{n+1} \in V$ となることがわかる。同様に $H^{\mu-\rho}$ $(\rho > 0)$ ノルムに関してコーシー列になっていることもわかる。さらに、g_n の定義から

$$\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) = e_n + g_n,$$

すなわち

$$\begin{aligned}
\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_0) &= \sum_{k=0}^{n}(e_k + g_k) \\
\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_0) - f &= e_n + (1 - S_n)\sum_{k=0}^{n-1} e_k - (1 - S_n)f \qquad (21)
\end{aligned}$$

が成り立つので、上と同様にして $||\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_0) - f||_{\alpha+\lambda-\rho}$ が 0 に収束することがわかるのである。

(注意 3)　「上と同様にして」と書いたが、それほど自明なことではない。命題 1 を用いて (21) の右辺を巧く評価しなくてはならないが、その方法は以下に記す「補題 1」の証明の概略を参考にしていただきたい。

補題 1 の証明の概略: n に関する帰納法で示す。つまり (H_n) が成り立つことを仮定し、(H_{n+1}) を示す。(9) より任意の $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ に対して

$$||\bar{\theta}_{n+1}||_s \leq C\{||g_{n+1}||_{s+\lambda} + ||g_{n+1}||_\lambda(1 + ||S_n u_n||_{s+d})\}$$

が成り立つ。右辺の項のうち、たとえば第 1 項は (18) より

$$||g_{n+1}||_{s+\lambda} \leq C(||(S_{n+1} - S_n)f||_{s+\lambda} + \sum_{k=0}^{n} ||(S_{n+1} - S_n)e_k||_{s+\lambda} + S_n e_n).$$

さらにたとえば右辺第 3 項 $S_n e_n$ の一部 $S_n e_k''$ は (8) と 命題1 より

$$\begin{aligned}
||S_n e_n''||_{s+\lambda} &\leq C||e_n''||_{s+\lambda} \\
&= C||(\Phi'(u_n) - \Phi'(S_n u_n))\bar{u}_n||_{s+\lambda} \\
&= C||\int_0^1 \frac{d}{dt}(\Phi'(S_n u_n + t(u_n - S_n u_n))\bar{u}_n)dt||_{s+\lambda} \\
&\leq C \sup_{0\leq t\leq 1} ||\Phi''(S_n u_n + t(u_n - S_n u_n))(\bar{u}_n, u_n - S_n u_n)||_{s+\lambda} \qquad (22) \\
&\leq C \sup_{0\leq t\leq 1} \{||\bar{u}_n||_a ||u_n - S_n u_n||_a (1 + ||S_n u_n + t(u_n - S_n u_n)||_{s+\lambda+b}) + \\
&\quad + ||\bar{u}_n||_a ||u_n - S_n u_n||_{s+\lambda+c} + ||\bar{u}_n||_{s+\lambda+c} ||u_n - S_n u_n||_a\}
\end{aligned}$$

と評価される。そこで帰納法の仮定と命題 1 を使うと、たとえば (22) の右辺第 3 項は

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_n\|_{s+\lambda+c}\|u_n - S_n u_n\|_a &\le C\theta_n^{s+\lambda+c-\alpha}\|\bar{u}_n\|_{s+\lambda+c}\|u_n\|_\alpha \\ &\le C\delta\theta_n^{s+\lambda+c+a-\alpha-\alpha'-1}\|\bar{u}_n\|_{\alpha'} \end{aligned}$$

と評価される。ここで、α' は $\lambda+c+a<\alpha'<\alpha$ を満たすような任意の定数とする。このとき、(20) と同様の議論により

$$\|\bar{u}_n\|_{\alpha'} \le C$$

がわかるので、結局 θ_0 を十分大きくとれば

$$\begin{aligned} \|S_n e_n''\|_{s+\lambda} &\le C\delta\theta_n^{s-\alpha-1}\theta_0^{\lambda+c+a-\alpha'} \\ &\le \delta\theta_n^{s-\alpha-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。他の項もほぼ同様に評価できる。（証明の概略終了）

参考文献

[1] S. Alinhac, *Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II*, Acta Mat., **182**, pp. 1-23, (1999).

[2] S. Alinhac and P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash- Moser*, InterEditions, Paris, (1991).

[3] Akira Hoshiga, *Geometric Blowup* **の方法**, 数理解析研究所講究録 1331 京都大学数理解析研究所 (2003).

[4] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **63**, pp. 20-63, (1956).