数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 1-6

Interpolational path and quasi-supremum

大阪教育大学　藤井 淳一　(Jun Ichi Fujii)
Osaka Kyoiku University

この内容は、同講究録収容の別論文 “Bounds for interpolation path of positive operators” の副産物であり、証明はそちらにお任せして、ここでは大筋について述べることにする。今回の元になる概念も次の公理系を満たす**作用素平均** $A\ m\ B$ である [5]:

monotonicity: $A_1 \le A_2,\ B_1 \le B_2 \Longrightarrow A_1\ m\ B_1 \le A_2\ m\ B_2.$

semi-continuity: $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Longrightarrow A_n\ m\ B_n \downarrow A\ m\ B.$

transformer inequality: $T^*(A\ m\ B)T \le (T^*AT)m(T^*BT).$

tranformer equality holds if T is invertible

normalization: $A\ m\ A = A.$

このとき、**representing function** $f_m(x) = 1\ m\ x$ は、$(0,\infty)$ 上の**作用素単調関数**

$$0 \le A \le B \Longrightarrow f_m(A) \le f_m(B).$$

であり、同時に**作用素凹関数**

$$f_m(tA+sB) \ge tf_m(A) + sf_m(B) \qquad \text{for } t,s>0, t+s=1.$$

にもなっている。さらに

$\exists A^{-1}$のとき
$$A\ m\ B = A^{1/2} f_m\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right) A^{1/2}$$

という形で、関数から作用素平均を再構成できる。ここでは基本的に、Hilbert 空間上の可逆な正作用素を扱うが、実際には作用素平均から少し外れた部分が問題となる。

以前に、Uhlmann [7] のエントロピー構成法に関連して、作用素平均の path

$$A\ m_{r,t} B = A^{1/2}\left(1-t+t(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r\right)^{1/r} A^{1/2}$$

$(-1 \le r \le 1, 0 \le t \le 1)$ が、**interpolational**:

$$(A\ m_{r,p}B)m_{r,t}(A\ m_{r,q}B) = A\ m_{r,(1-t)p+tq}B,$$

for $0 \le p, q \le 1$ であることから、微分可能性（両端の微分係数は相対作用素エントロピーである）やその他の性質が出ることを指摘した [2](cf. [1, 4])。特に、**transposition formula**

$$B\ m_{r,t}A = A\ m_{r,1-t}B.$$

が成り立つことに注意しよう。これは、-1 で調和平均、0 で幾何平均、1 で算術平均となる作用素平均としても重要な path であった。

ここでは、r の制限をはずして考えてみる。時に $r = \pm\infty$ の場合は、正作用素のある種の sup、inf をあらわしている。極限の存在を確認しておく必要があるが、これを、**quasi-supremum, quasi-infimum** と呼ぶ。もちろん、束としては不十分だが、どの程度のことが成り立つかにも興味があった。

さて、（可逆）正作用素 A,B について、（可逆）正作用素の path を

$$A\ \mathfrak{m}_{r,t}B = A^{1/2}\left(1-t+t(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r\right)^{1/r}A^{1/2}$$

$(0 \le t \le 1)$ とする。作用素平均同様、 $\mathfrak{m}_{r,t}$ の **representing function** $F_{r,t}$ を

$$F_{r,t}(x) = 1\ \mathfrak{m}_{r,t}x = (1-t+tx^r)^{1/r}$$

とすると、:

Lemma 1. *Every function $F_{r,t}(x)$ is strictly increasing and strictly convex (resp., concave) for $r > 1$ (resp., $r < 1$).*

で、もちろん従来の r 以外に作用素平均はない。

Theorem 2. *The inequality $|r| \le 1$ is the equivalent condition that $\mathfrak{m}_{r,t}$ is operator mean, or equivalently $F_{r,t}$ is operator monotone.*

しかし、

Lemma 3. *$F_{r,0}(x) = 1$ and $F_{r,1}(x) = x$ for all r. If $0 < t < 1$, then*

$F_{r,t}(x) \uparrow 1 \vee x \equiv \max\{1, x\}$ as $r \uparrow \infty$ and $F_{r,t}(x) \downarrow 1 \wedge x \equiv \min\{1, x\}$ as $r \downarrow -\infty$.

となっているので、quasi-sup, inf が定義できる:

$$A \overset{t}{\vee} B = A\ \mathfrak{m}_{\infty,t}B \equiv \lim_{r\to\infty} A\ \mathfrak{m}_{r,t}B = A^{1/2}(1 \vee A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} \qquad \text{and}$$

$$A \overset{t}{\wedge} B = A\ \mathfrak{m}_{-\infty,t}B \equiv \lim_{r\to-\infty} A\ \mathfrak{m}_{r,t}B = A^{1/2}(1 \wedge A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

$(t \ne 0, 1)$. t の条件は、$A\ \mathfrak{m}_{r,0}B = A$ と $A\ \mathfrak{m}_{r,1}B = B$ からきている。すぐわかる性質としては、

Lemma 4. *$A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B \leq A, B \leq A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B$ and $A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B + A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B = A + B$. If $A \leq B$ then $A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B = B \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} A = B$ and $A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B = B \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} A = A$.*

まとめると、

Theorem 5. *The path $A \; \mathfrak{m}_{r,t} B$ is nondecreasing and norm-continuous for r: For $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$ and $0 < t < 1$,*

$$A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B = A \; \mathfrak{m}_{-\infty,t} B \leq \cdots \leq A \; \mathfrak{m}_{r,t} B = \lim_{p \to r} A \; \mathfrak{m}_{p,t} B \leq A \; \mathfrak{m}_{s,t} B \leq \cdots \leq A \; \mathfrak{m}_{\infty,t} B = A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B.$$

If $A \leq B$, then $A \leq \cdots \leq A \; \mathfrak{m}_{r,t} B \leq A \; \mathfrak{m}_{s,t} B \leq \cdots \leq B$ for $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$ and $0 \leq t \leq 1$.

さらに、意外なことに、tarnsformer inequality は成り立たないが、equality は成立する。これは、古田先生が良く使われる Lemma と同じ手法を使えばよい (e.g.[3]):

Theorem 6. *The transformer equality holds for $\mathfrak{m}_{r,t}$ for $-\infty \leq r \leq \infty$.*

途中の段階では可換な演算ではない（$A \; \mathfrak{m}_{r,t} B \neq B \; \mathfrak{m}_{r,t} A$）が、極限は可換である:

Theorem 7. *$A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B = B \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} A$ and $A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B = B \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} A$.*

transformer equality より、 transposition formula も成り立ち、 $\mathfrak{m}_{r,t}$ が interpolational path であることがわかる:

Theorem 8. *A path $A \; \mathfrak{m}_{r,t} B$ is interpolational in the sense that*

$$(A \; \mathfrak{m}_{r,p} B) \; \mathfrak{m}_{r,t} (A \; \mathfrak{m}_{r,q} B) = A \; \mathfrak{m}_{r,(1-t)p+tq} B$$

for $-\infty \leq r \leq \infty$ and $0 \leq p, q, t \leq 1$. In particular, the transposition formula holds: $B \; \mathfrak{m}_{r,t} A = A \; \mathfrak{m}_{r,1-t} B$.

さて、微分してみれば、

$$\frac{\partial F_{r,t}}{\partial t}(x) = \frac{x^r - 1}{r}(1 - t + tx^r)^{(1-r)/r}$$

$$\frac{\partial^2 F_{r,t}}{(\partial t)^2}(x) = \frac{(x^r - 1)^2(1-r)}{r^2}(1 - t + tx^r)^{(1-2r)/r}$$

がわかるので、

Lemma 9. *For a fixed r, $F_{r,t}$ is a convex (resp., concave) differentiable path for t if $r > 1$ (resp., $r < 1$).*

さて、solidarity を

$$A \,\mathfrak{s}_r B = \left.\frac{\partial A \,\mathfrak{m}_{r,t} B}{\partial t}\right|_{t=0} = A^{1/2}\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r - 1}{r}A^{1/2} = \frac{A \,\mathfrak{m}_{0,r} B - A}{r},$$

とおけば、エントロピー的な関係式が出る:

Theorem 10. *The derivative operator has an informational property* : $A \,\mathfrak{s}_r(A \,\mathfrak{m}_{r,t} B) = t(A \,\mathfrak{s}_r B)$ *for* $r \in \mathbb{R}$ *and* $t \in [0, 1]$

最後に、quasi-sup、inf の演算で、lattice にどれだけ近づけるかを述べておく。lattice の公理系を思い出しておこう:

idempotent: $x \cap x = x, \quad x \cap x = x.$
commutative: $x \cup y = y \cup x, \quad x \cap y = y \cap x.$
absorptive: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z = x.$
associative: $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \quad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z.$

quasi-sup、inf に近い形で、lattice になるものに、**Olson の lattice** がある [6] :

$$A \curlyvee B \equiv \lim_{r\to\infty}(A^r + B^r)^{1/r} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{A^r + B^r}{2}\right)^{1/r} = \lim_{r\to\infty}\left((1-t)A^r + tB^r\right)^{1/r}$$

lattice と両立する順序は、spectral order である。これに対し、

Theorem 11. $A \leq B \iff A \curlyvee\!\!\!\vee B = B \iff A \curlywedge\!\!\!\wedge B = A$

というように、通常の順序が対応している。また、

absorption law : $\quad A \curlyvee\!\!\!\vee (B \curlywedge\!\!\!\wedge A) = A \curlywedge\!\!\!\wedge (B \curlyvee\!\!\!\vee A) = A.$

も成立する。なぜなら、

$$A \curlyvee\!\!\!\vee (B \curlywedge\!\!\!\wedge A) = A^{1/2}(1 \vee (A^{-1/2}BA^{-1/2} \wedge 1))A^{1/2} = A^{1/2}1A^{1/2} = A$$

$$A \curlywedge\!\!\!\wedge (B \curlyvee\!\!\!\vee A) = A^{1/2}(1 \wedge (A^{-1/2}BA^{-1/2} \vee 1))A^{1/2} = A^{1/2}1A^{1/2} = A.$$

となるからである。しかし、associative law は成立しない :

例. Putting

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \geq B,$$

we have $1 \vee C = C$ and

$$A \vee 1 = B + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

By

$$C^{-1/2} A C^{-1/2} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C^{-1/2}(A \vee 1) C^{-1/2} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},$$

we have

$$\|C^{-1/2} A C^{-1/2}\| = \frac{15 + \sqrt{145}}{16} < \frac{35 + \sqrt{585}}{32} = \|C^{-1/2}(A \vee 1) C^{-1/2}\|.$$

Then $1 \vee C^{-1/2} A C^{-1/2} \neq 1 \vee C^{-1/2}(A \vee 1) C^{-1/2}$ and hence

$$A \curlyvee (B \curlyvee C) = A \curlyvee C \neq (A \vee 1) \curlyvee C = (A \curlyvee B) \curlyvee C.$$

その他、$f(x) = 1 \vee x$ が作用素単調でないことから生じることとして、全く sup、inf らしくない性質がある：

$\min\{\|A^{-1}\|^{-1}, \|B^{-1}\|^{-1}\} \leq A \curlywedge B \leq A \curlyvee B \leq \max\{\|A\|, \|B\|\}$ は成立しない。

実際、$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、positive contraction になり、

$$A^{-1/2} B A^{-1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

のように射影のスカラー倍になって、

$$1 \vee A^{-1/2} B A^{-1/2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

より、

$$A \curlyvee B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となって、1 とは順序関係がつかない。B は可逆ではないが、連続性より、可逆正作用素でも同じことが起こる。

$$D(A,B) \equiv A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B - A \mathbin{\overset{\wedge}{\wedge}} B = A^{1/2}|A^{-1/2}BA^{-1/2}-1|A^{1/2}$$

は、作用素距離関数的だが、三角不等式は成立しない。

実際、transformer equality より、これは次に帰着される:

$$D(A,B) \underset{?}{\leq} D(A,1)+D(B,1) = |A-1|+|B-1|$$

しかし、前の例と modular identity より、

$$\begin{aligned} D(A,B) &= 2(A \mathbin{\overset{\vee}{\vee}} B) - (A+B) \\ &\not\leq 2-(A+B) = 1-A+1-B = D(A,1)+D(B,1) \end{aligned}$$

したがって、三角不等式は成り立たない。もともと作用素不等式としては無理があるので当然であるが、ノルムあるいはトレースを取って、数値化した場合に成立するかどうかはまだわかっていない。幾何学的に興味深い問題であると思うが。

参考文献

[1] J.I.Fujii and E.Kamei : *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34** (1989), 541–547 .

[2] J.I.Fujii and E.Kamei : *Interpolational paths and their derivatives*, Math. Japon., **39** (1994), 557–560.

[3] T.Furuta : *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan. Acad., **65**(1989), 126.

[4] E.Kamei : *Paths of operators parametrized by operator means,* Math. Japon. **39**(1994), 395–400. 47A63

[5] F.Kubo and T.Ando : *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **248** (1980) 205–224.

[6] M.P.Olson : *The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice*,Proc. Amer. Math. Soc., 28: 537–544 (1971).

[7] A.Uhlmann : *Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity uin an interpolation theory*, Commun. Math. Phys. **54**(1977), 22–32.