数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 7-12

カオティック順序を基軸としてグランドフルタ不等式を見る

前橋工科大学　亀井栄三郎 (EIZABURO KAMEI)

1. フルタ不等式は作用素平均を用いると chaotic order で成り立つ事が分かる

A, B をヒルベルト空間上の正作用素とする。このとき

(LH) $$A \geq B \Longrightarrow A^{\alpha} \geq B^{\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

というのが Löwner-Hinz の不等式である。フルタ不等式はこの拡張として与えられた。次に、ヒルベルト空間上の正作用素 A, B に対し作用素平均 (α-power mean) は次のように定められる [18]。

$$A \natural_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\alpha}A^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \in [0,1]$$

これを用いる事でフルタ不等式は見通しが良くなり、独自の領域を開拓していくことが出来る、というのがここにおける主張である。以下、フルタ型の不等式は全て作用素平均を用いて表していく事とする。古田の与えた原型の不等式 [7] は次のように表される [2],[12]。

Furuta inequality: *If* $A \geq B \geq 0$, *then for* $r \geq 0$, $1 \leq p$

(F) $$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^{p} \leq A \quad \text{and} \quad B \leq B^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} A^{p}.$$

そこで、作用素平均の手法を用いて別証明を与えてみると、これら２つに分断された不等式を一行に繋ぐことが分かった [12](cf. [8])。

Satellite theorem of the Furuta inequality: *If* $A \geq B \geq 0$, *then for* $r \geq 0$, $1 \leq p$

(SF) $$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^{p} \leq B \leq A \leq B^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} A^{p}.$$

これは更に次のように一般化できる [13],[14]。

(SF′) $$A^{-r} \natural_{\frac{\alpha+r}{p+r}} B^{p} \leq B^{\alpha} \leq A^{\alpha} \leq B^{-r} \natural_{\frac{\alpha+r}{p+r}} A^{p} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

次に A, B を可逆な正作用素とし、$\log A \geq \log B$ のとき、$A \gg B$ と表す。
これを **chaotic order** と呼ぶ。一般に $A \gg B \Longrightarrow A \geq B$ であるが逆は成り立たない事は知られている。そこで $A \gg B$ の仮定の下で (SF) が成り立つのか、ということについて調べてみた。
まず、chaotic order を使っていく上での出発点となる次の結果を述べておく。これは $\lim_{\alpha\to 0}\frac{A^{\alpha}-I}{\alpha} = \log A$, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{B^{\alpha}-I}{\alpha} = \log B$ であることより、(SF') における $\alpha = 0$ の場合であるとみなすことで、次のように呼ぶこととする [3]。

Chaotic Furuta inequality: *If* $A \gg B$, *then for* $r \geq 0$, $p \geq 0$

(CF) $$A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^{p} \leq I \leq B^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} A^{p}.$$

この結果を用いることで (SF) は仮定を $A \gg B$ に緩めても次の形で成り立つことが解る [17]。

Satellite theorem of chaotic Furuta inequality: *If* $A \gg B$, *then for* $r \geq 0$, $p \geq 1$

(SCF) $$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^{p} \leq B \ll A \leq B^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} A^{p}.$$

(SCF) は更に次のように一般化できる [16],[17](cf.[6])。

Theorem A. *If $A \gg B$, then the following* (1) *and* (2) *hold.*

$$A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{p+r}} B^p \le B^\delta \text{ and } A^\delta \le B^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{p+r}} A^p \text{ for } r \ge 0 \text{ and } 0 \le \delta \le p \tag{1}$$

$$A^{-r} \sharp_{\frac{\alpha+r}{p+r}} B^p \le A^\alpha \text{ and } B^\alpha \le B^{-r} \sharp_{\frac{\alpha+r}{p+r}} A^p \text{ for } -r \le \alpha \le 0 \text{ and } 0 \le p. \tag{2}$$

2. グランドフルタ不等式も chaotic order で見直せないか

(F) の一般化として古田は次の形を与えた [9]。これは $t = 0$ のとき (F) を与え、$t = 1$ のときは [1] で与えられた不等式と一致する。

The grand Furuta inequality: *If $A \ge B \ge 0$, then for $1 \le p$, $0 \le t \le 1$ and $t \le r$, $1 \le s$*

$$A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \le A \text{ and } B \le B^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (B^t \natural_s A^p). \tag{GF}$$

ここで使われている $\natural$ の記号は作用素平均と区別するためのものである。

$$A \natural_r B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}, \quad r \in \mathbb{R} \ \ r \notin [0,1]$$

これは作用素平均が A, B を繋ぐ path の内分点であると解釈できるのに対して、外分点を表しているとみることも出来るため極めて有用である。
グランドフルタ不等式も又作用素平均の見方を与えることで、次のように一行にまとめることが出来る。ここで本質的な役割を果たすのは次の結果である [4],[5],[15]。

Theorem B. *If $A \ge B > 0$, then*

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \le B$$

holds for $0 \le t \le 1 \le p \le \beta$.

Satellite theorem of the grand Furuta inequality. *If $A \ge B > 0$, then for $r \ge 0$, $0 \le t \le 1 \le p \le \beta$,*

$$\begin{aligned} A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) &\le (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \le B \\ &\le A \le (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{1}{\beta}} \le B^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p). \end{aligned} \tag{SGF}$$

古田の提起した (GF) 型不等式の類別

[10],[11] において古田は (GF) 型不等式の類別として次のような形を示し、それぞれにおいて chaotic order と usual order の相違を明らかにしようと試みている。

Type I (c) $A \gg B \iff$ for $t \ge 0$, $-t \le r$, $0 \le p$, $\frac{t}{p+t} \le s \le 1$

$$I \ge A^{-r-t} \sharp_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t} \ge A^{-r-t} \sharp_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \sharp_s B^p) \tag{F1}$$

Type I (u) $A \geq B \iff$ for $t \geq 0,\ -t \leq r,\ 1 \leq p,\ \frac{1+t}{p+t} \leq s \leq 1$

(F2) $$A \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t} \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \sharp_s B^p)$$

Type II (c) $A \gg B \iff$ for $t \geq 0,\ -t \leq r,\ 0 \leq p,\ 1 \leq s \leq \frac{2p+t}{p+t}$

(F3) $$I \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \natural_s B^p) \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t}$$

Type II (u) $A \geq B \iff$ for $t \geq 1,\ 0 \leq r,\ 1 \leq p,\ 1 \leq s \leq \frac{2p+t+1}{p+t}$

(F4) $$A \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \natural_s B^p) \geq A^{-r-t} \sharp_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t}$$

そこで、上で与えられている $p,\ r,\ s,\ t$ についての条件を整理し、更に $s = \frac{\beta+t}{p+t}$ と置き直すことで上で与えられている (F1), (F2), (F3), (F4) は次のように書き直すことが出来る。

(F'1) $$r \geq 0,\ t \geq 0,\ 0 \leq \beta \leq p\ ;\quad I \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} B^{\beta} \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$$

(F'2) $$r \geq 0,\ t \geq 0,\ 1 \leq \beta \leq p\ ;\quad A \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^{\beta} \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$$

(F'3) $$r \geq t \geq 0,\ 0 \leq p \leq \beta \leq 2p\ ;\quad I \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} B^{\beta}$$

(F'4) $$r \geq t \geq 1,\ 1 \leq p \leq \beta \leq 2p+1\ ;\quad A \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^{\beta}$$

こうすることで全て chaotic order の仮定の下にまとめることが出来る。その準備として次の lemma を用意しておく。

Lemma *If $A \gg B$ and $0 \leq p \leq \beta \leq 2p$, then*

$$B^{\beta} \leq A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p \leq A^{-r} \natural_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p$$

holds for $r \geq t \geq 0$.

Proof. By Theorem A (1), we have

$$\begin{aligned}
& A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p = B^p \natural_{\frac{p-\beta}{p+t}} A^{-t} \\
= \ & B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p+t}} A^t) B^p \leq B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p+t}} (B^{-p} \sharp_{\frac{t+p}{r+p}} A^r)) B^p \\
= \ & B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{r+p}} A^r)) B^p = B^{\frac{p}{2}} (I \sharp_{\frac{\beta-p}{r+p}} B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}}) B^{\frac{p}{2}} \\
= \ & B^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}})^{\frac{\beta-p}{r+p}} B^{\frac{p}{2}} = B^{\frac{p}{2}} (B^{-\frac{p}{2}} A^{-r} B^{-\frac{p}{2}})^{\frac{p-\beta}{r+p}} B^{\frac{p}{2}} \\
= \ & B^p \natural_{\frac{p-\beta}{r+p}} A^{-r} = A^{-r} \natural_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p.
\end{aligned}$$

So the second inequality holds. The first one follows from

$$B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{t+p}} A^t = B^{-p} \sharp_{\frac{-p+\beta}{p}} (B^{-p} \sharp_{\frac{p}{t+p}} A^t) \geq B^{-p} \sharp_{\frac{-p+\beta}{p}} I = I \sharp_{\frac{2p-\beta}{p}} B^{-p} = B^{\beta-2p}.$$

Theorem 1. *Let $A \gg B$ for $A,\ B > 0$ and $\delta \in \mathbb{R}$, then the following statements hold:*
(1) *If $r \geq 0,\ t \geq 0$ and $0 \leq \delta \leq \beta \leq p$, then*

$$B^\delta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

(2) *If $r \geq t \geq |\delta|$ and $|\delta| \leq p \leq \beta \leq 2p + |\delta|$, then*

$$A^{-t} \sharp_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Proof. (1) It is proved by applying Theorem A twice. As a matter of fact, it follows from $B^\delta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta$ and $B^\beta \geq A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p$.
(2) By lemma and Theorem A (2), we have

$$\begin{aligned} & A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \leq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \\ \leq\ & A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-r} \natural_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p) = A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{p+r}} B^p = B^p \sharp_{\frac{p-\delta}{p+t}} A^{-r} \\ =\ & B^p \sharp_{\frac{p-\delta}{p+t}} (B^p \sharp_{\frac{p+t}{p+r}} A^{-r}) = B^p \sharp_{\frac{p-\delta}{p+t}} (A^{-r} \sharp_{\frac{-t+r}{p+t}} B^p) \leq B^p \sharp_{\frac{p-\delta}{p+t}} A^{-t} = A^{-t} \sharp_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p, \end{aligned}$$

where the last inequality is ensured by Theorem 2.

Theorem 1 は、古田の提起した Type I と Type II についてそれぞれ (c) と (u) を統一的に拡張したものとなっている。

Corollary . *Let $A,\ B > 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, then the following hold:*
(1) *If $A^\delta \geq B^\delta$, $0 \leq \delta \leq \beta \leq p$ and $r \geq 0,\ t \geq 0$, then*

$$A^\delta \geq B^\delta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

(2) *If $A^{|\delta|} \geq B^{|\delta|}$, $|\delta| \leq p \leq \beta \leq 2p + |\delta|$ and $r \geq t \geq |\delta|$, then*

$$A^{|\delta|} \geq B^{|\delta|} \geq A^{-t} \sharp_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Proof. (1) If $\delta = 0$, then Theorem (1) implies Type I-(c), that is,

$$I \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

If $\delta > 0$, since

$$A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta = (A^\delta)^{-\frac{r}{\delta}} \sharp_{\frac{\frac{\beta}{\delta}+\frac{t}{\delta}}{\frac{\beta}{\delta}+\frac{t}{\delta}}} (B^\delta)^{\frac{\beta}{\delta}} \leq (B^\delta)^{\frac{\beta}{\delta}} = B^\beta,$$

we have $A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$. Similarly, we obtain

$$A^{-r} \sharp_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta = (A^\delta)^{-\frac{r}{\delta}} \sharp_{\frac{1+\frac{r}{\delta}}{\frac{\beta}{\delta}+\frac{r}{\delta}}} (B^\delta)^{\frac{\beta}{\delta}} \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

So the case $\delta = 1$ is Type I(u).
(2) In the case $\delta = 0$, Theorem (2) contains Type II (c), that is,

$$I \geq A^{-t} \sharp_{\frac{t}{p+t}} B^p \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \sharp_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Since $A \gg B$ holds for $\delta \neq 0$, if $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$), Theorem A (1)(resp. (2)) implies $B^{\delta} \geq A^{-t} \natural_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p$ (*resp.* $A^{\delta} \geq A^{-t} \natural_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p$). So Theorem 3 (2) leads the conclusion. Especially, the case $\delta = 1$ is Furuta's Type II (u).

しかしながら、(GF) 又は (SGF) においては $t \geq 0$ に対し A^{-r} と $(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)$ の平均であるのに対し、これらは A^{-r} と $(A^{-t} \natural_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$ の平均となっており、(GF) 又は (SFG) の場合とは異なる。[10], [11] において古田の揚げている不等式の中で (GF) の version と見なせるのは次であろう。

For $r \geq 0$ and $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta \leq 2p - t$,

(GF′) $$A \geq B \Longleftrightarrow A \geq A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^{\beta} \geq A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p).$$

古田はこれを Type I (u) の例としているが、$1 \leq \frac{\beta-t}{p-t} \leq 2$ であることより、

$$A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p = B^p(B^{-p} \natural_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t})B^p \leq B^p(B^{-p} \natural_{\frac{\beta-p}{p-t}} B^{-t})B^p \leq B^{\beta},$$

であるから、(LH) より直ちに得られる事柄である。そこで (GF) の場合と同様 (GF') の一般化を与えておく。ここでも (GF) における Theorem B に相当する次の事柄が得られる。

Theorem 2. *If $A \geq B > 0$, then for $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$ the following holds.*

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p$$

Proof. First of all, suppose that $1 \leq \frac{\beta-t}{p-t} \leq 2$. Then

$$A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p = B^p \natural_{\frac{p-\beta}{p-t}} A^t = B^p(B^{-p} \natural_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t})B^p \leq B^p(B^{-p} \natural_{\frac{\beta-p}{p-t}} B^{-t})B^p = B^{\beta}$$

By (LH), we have $(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p$.

Since $p \geq 1$, we have $B_1 = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B \leq A$. Next if we take β_1 with $1 \leq \frac{\beta_1-t}{\beta-t} \leq 2$, then the preceding argument ensures that

$$A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p = A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) = A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} B_1^{\beta} \leq B_1^{\beta_1},$$

that is, $A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta_1}{\beta}}$. So

$$(A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta_1}} \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p$$

follows from (LH). Repeating this method, we have the conclusion.

Theorem 2 を用いることで (GF') は次のように精密化され一般化できる。

Theorem 3. *If $A \geq B > 0$ and $r \geq 0$, $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$, then*

$$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B.$$

Proof. Put $C = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}}$. Then we have $A \geq B \geq C$ and $C^p \leq B^p$ by Theorem 2. Therefore Theorem A (1) implies that

$$A^{-r} \natural_{\frac{p+r}{\beta+r}} C^{\beta} \leq C^p,$$

and so

$$\begin{aligned} A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) &= A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} C^\beta = A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} (A^{-r} \sharp_{\frac{p+r}{\beta+r}} C^\beta) \\ &\leq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} C^p \leq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \end{aligned}$$

by $C^p \leq B^p$ and (SF).

References

[1] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, Linear Alg. and Its Appl., 197(1994), 113-131.

[2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990), 67-72.

[3] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Alg. and Appl., 149(1991), 91-96.

[4] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 2751-2756.

[5] M.Fujii and E.Kamei, On an extension of grand Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 56 (2002), 501-504.

[6] M.Fujii and Y.Kim, Operator convexity in Furuta type operator inequalities, J. Nonlinear Convex Anal., to appear.

[7] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.

[8] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989), 126.

[9] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and Its Appl., 219(1995), 139-155.

[10] T.Furuta, $A \geq B > 0$ ensures $A^{1+r-t} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1+r-t}{(p-t)s+r}}$ for $t \in [0,1], r \geq t,\ p \geq 1, s \geq 1$ and related inequalities, preprint.

[11] T.Furuta, Some topics on order preserving operator inequalities, 京都大学数理解析研究所講究録 1259, 119-129.

[12] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

[13] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., 49(1999), 65-71.

[14] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, II, Math. Japon., 50(1999), 179-182.

[15] E.Kamei, Parametrized grand Furuta inequality, Math. Japon., 50(1999), 79-83.

[16] E.Kamei, Chaotic order and Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 221-225.

[17] E.Kamei and M.Nakamura, Remark on chaotic Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 535-539.

[18] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.