数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 25-32

ある特異楕円型方程式の正値解の多重存在性について

平野載倫 (NORIMICHI HIRANO)† ・CLAUDIO SACCON‡ ・塩路直樹 (NAOKI SHIOJI)†

† 横浜国立大学大学院環境情報研究院
Graduate School of Environment and Information Sciences
Yokohama National University
‡ Department of Applied Mathematics "Ulisse Dini"
University of Pisa

1. 序

次の特異楕円型方程式の正値解の多重存在について論じる。

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{-q} + u^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

ただし、Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界集合で、$\lambda > 0, q > 0, p > 1$ とする。$\partial\Omega$ が C^3 級のとき、Coclite–Palmieri [2] は、$0 < \lambda < \tilde{\lambda}$ ならば (1.1) は少なくとも 1 つの正値解を持ち、$\lambda > \tilde{\lambda}$ ならば (1.1) は正値解をもたないということを満たす $\tilde{\lambda} > 0$ が存在することを示した。一方、

$$
(1.2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{q} + u^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}
$$

に対して、$\partial\Omega$ が滑らかで $0 < q < 1 < p \le 2^* - 1$ のとき、Ambrosetti–Brezis–Cerami [1] は、$\lambda^* = \sup\{\lambda > 0 : (1.2)$ は正値解を持つ$\}$ は正数であり、各 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ に対して (1.2) は少なくとも 2 つの正値解が存在することを示した。それぞれの問題に付随する汎関数を眺めると、$\lambda > 0$ が小さいとき、問題 (1.1) に 2 つの正値解が存在すると予想するのは自然なことである。ここでは、この予想が正しいこと、すなわち、$\lambda > 0$ が小さいとき、(1.1) は少なくとも 2 つの正値弱解を持つことを示す。さらに、得られた正値弱解がある条件の下で古典解であることを示す。正値弱解の存在については、Sun–Wu–Long [4] が既に結果を得ているが、我々の結果の方が、2 つの正値弱解が存在を保証する $\lambda > 0$ の範囲が広く、$\partial\Omega$ の正則性の仮定を必要とせず、$p = 2^* - 1$ の場合を扱っているなどの優越性がある。また、この中では述べないが、我々は $0 < p < 2^* - 1, q = 1$ の場合についても結果がある [3]。我々は、この問題に対して変分法を用いたアプローチを行なう。付随する汎関数がフレッシェ微分可能でないことや、解の正値性を示すために強最大値原理を使えないなどの難点があるが、これらを克服して 2 つの正値弱解の存在を導く。さらに、適当な条件の下で、得られた正値弱解が古典解になることを示す。

2. 結果

u が (1.1) の正値弱解であるとは、Ω において $u > 0$ であり、$u \in H_0^1(\Omega)$ であり、すべての $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$
\int_\Omega \left(\nabla u \nabla \psi - \lambda u^{-q} \psi - u^p \psi \right) dx = 0
$$

を満たすこととする。

$$(2.1)\qquad I_{p,q,\lambda}u = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\lambda}{1-q}\int_\Omega |u|^{1-q}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx,\quad u\in H_0^1(\Omega)$$

により、$I_{p,q,\lambda}: H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ を定める。

$$H_+ = \{u\in H_0^1(\Omega) : u\ge 0\}\setminus\{0\}$$

と置く。

まず、2つの正値弱解の存在についての結果を述べる。

定理 1 (subcriticalの場合). $0<q<1$, $1<p<2^*-1$ とする。

$$\Lambda = \sup\{\lambda>0 : \text{各 } u\in H_+ \text{ に対し } t\mapsto I_{p,q,\lambda}(tu) : (0,\infty)\to\mathbb{R} \text{ は } 2 \text{ つの臨界点を } (0,\infty) \text{ に持つ}\}$$

と置く。このとき、各 $\lambda\in(0,\Lambda)$ に対して、$C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に属する少なくとも 2 つの (1.1) の正値弱解が存在する。

註 1. 次節の補助定理1で示すように、$\Lambda>0$ である。

註 2. この中では述べないが、$1<p<2^*-1$ のときは、$q=1$ の場合についても結果がある。詳しくは、[3] を参照のこと。

定理 2 (criticalの場合). $0<q<1$ かつ $p=2^*-1$ とする。

$$\Lambda_* = \sup\Big\{\lambda>0 : \text{各 } u\in H_+ \text{ に対して } I_{p,q,\lambda}(tu)\ge 0 \text{ を満たす } t>0 \text{ が存在し、}$$
$$\sup\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx : u\in H_+,\ \frac{d}{dt}I_{p,q,\lambda}(tu)\Big|_{t=1}=0,\ \frac{d^2}{dt^2}I_{p,q,\lambda}(tu)\Big|_{t=1}>0\Big\} \le \Big(\frac{2^*}{2}\Big)^{\frac{2}{2^*-2}} S^{\frac{2^*}{2^*-2}}\Big\}$$

と置く。ただし、

$$S = \inf\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx : u\in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^{2^*}dx = 1\Big\}$$

である。このとき、各 $\lambda\in(0,\Lambda_*]$ に対して、$C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に属する少なくとも 2 つの (1.1) の正値弱解が存在する。

次に、得られた正値弱解が古典解であるための条件を考察する。$d:\Omega\to[0,\infty)$ を $d(\cdot)=\operatorname{dist}(\cdot,\partial\Omega)$ とし、各 $a>0$ に対し

$$\Omega_a = \{x\in\Omega : d(x)<a\}$$

と置く。各 $a>0$, $u\in H^1_{\rm loc}(\Omega)$, $v\in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ に対し、$-\int_\Omega \nabla u\nabla\psi\,dx \le \int_\Omega v\psi\,dx$ が、$\psi\ge 0$ 及び $\operatorname{supp}\psi\subset\Omega_a$ を満たすすべての $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ について成り立つとき、

$$\Delta u\le v \quad \text{in } \Omega_a$$

と定める。

定理 3 ($0<q<1$ の場合の正則性). $\lambda>0,\ 1<p\le 2^*-1$ とする。

$$\Delta d \le K d^{-\mu} \quad in\ \Omega_a$$

を満たす $a>0,\ K\ge 0,\ \mu\in[q,1)$ が存在すると仮定する。このとき、(1.1) の各正値弱解に対して、$u\le Md$ を満たす正数 M が存在する。

定理 4 ($q=1$ の場合の正則性). $\lambda>0,\ 1<p\le 2^*-1$ とする。

$$\Delta d \le K d^{-1}(\ln(e/d))^{-\nu} \quad in\ \Omega_a$$

を満たす $a>0,\ K\ge 0,\ \nu>1$ が存在すると仮定する。このとき、(1.1) の各正値弱解 u に対して、Ω_δ において $u\le Md\sqrt{\ln(e/d)}$ を満たす $M,\delta>0$ が存在する。

註 3. 定理 3, 4 の条件の下では、正値弱解は古典解である。すなわち、$C^\infty(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ に含まれる。

註 4. 次の命題が成り立つので、Ω が凸であることや $\partial\Omega$ が C^2 級であることは、定理 3, 4 の仮定に対する十分条件である。

命題 1. 各 $x\in\partial\Omega$ に対して $|x-y|=R$ かつ $\{z\in\mathbb{R}^N : |z-y|<R\}\cap\Omega=\emptyset$ を満たす $y\in\mathbb{R}^N$ が必ず取れる $R>0$ が存在すると仮定する。このとき、$\Delta d\le (N-1)/R$ が成り立つ。特に、Ω が凸であれば、$\Delta d\le 0$ が成り立つ。

3. 証明

定理 1 と定理 3 の証明を与える。その他については、[3] を参照のこと。

定理 1 の証明を終えるまで、定理 1 の条件を仮定する。$H_0^1(\Omega)$ のノルム $\|\cdot\|$ を

$$\|u\|^2=\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \quad u\in H_0^1(\Omega)$$

と定める。各 $\alpha>0$ に対し、

$$C_\alpha=\sup\left\{\int_\Omega |u|^\alpha\,dx : \|u\|=1\right\}$$

と置く。

まず、定理 1 に現れる Λ が正数であることを示しておく。

補助定理 1. Λ は正数。

証明. $\lambda>0$ とし、 $u\in H_+$ とする。

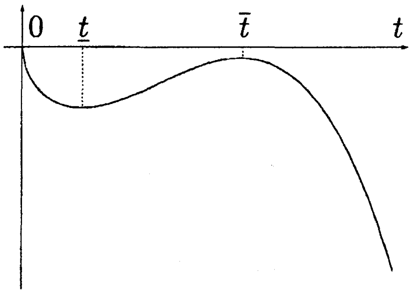
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_{p,q,\lambda}(tu)&=t\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\lambda t^{-q}\int_\Omega |u|^{1-q}\,dx-t^p\int_\Omega|u|^{p+1}\,dx\\ &\ge t^{-q}\|u\|^{1-q}\big((t\|u\|)^{1+q}-\lambda C_{1-q}-C_{p+1}(t\|u\|)^{p+q}\big)\end{aligned}$$

が成り立つ。$\tau^{1+q}-\lambda C_{1-q}-C_{p+1}\tau^{p+q}>0$ を満たす正数 τ が存在することと $\big(\lambda C_{1-q}/(p-1)\big)^{p-1}\big(C_{p+1}/(1+q)\big)^{1+q}<\big(1/(p+q)\big)^{p+q}$ は同値であることが簡単にわかるので、

$$\Lambda\ge\left(\frac{(p-1)^{p-1}(1+q)^{1+q}}{(p+q)^{p+q}C_{1-q}^{p-1}C_{p+1}^{1+q}}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

を得る。 □

$\lambda \in (0, \Lambda)$ を満たすように λ を固定する。以下、$I = I_{p,q,\lambda}$ と略記する。$u \in H_+$ に対し、$J_u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $J_u(t) = I(tu)$ と定める。仮定 $\lambda \in (0, \Lambda)$ により、$u \in H_+$ に対する J_u のグラフは次のようになる。すなわち、$0 < \underline{t} < \bar{t}$ 及び $J_u''(\underline{t}) > 0$, $J_u''(\underline{t}) < 0$ を満た



J_u のグラフ

す 2 つの臨界点 $\underline{t}, \bar{t}$ を J_u は持つ。

さて、

$$U = \left\{ u \in H_+ : \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{1-q} \, dx + \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx, \right.$$
$$\left. \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda q \int_\Omega |u|^{1-q} \, dx - p \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx > 0 \right\},$$
$$V = \left\{ v \in H_+ : \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega |v|^{1-q} \, dx + \int_\Omega |v|^{p+1} \, dx, \right.$$
$$\left. \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \lambda q \int_\Omega |v|^{1-q} \, dx - p \int_\Omega |v|^{p+1} \, dx < 0 \right\}$$

と U, V を定める。すなわち、

$$U = \{u \in H_+ : J_u'(1) = 0,\ J_u''(1) > 0\} = \{\underline{t}u : u \in H_+, \underline{t} > 0,\ J_u'(\underline{t}) = 0,\ J_u''(\underline{t}) > 0\},$$
$$V = \{v \in H_+ : J_v'(1) = 0,\ J_v''(1) < 0\} = \{\bar{t}v : v \in H_+, \bar{t} > 0,\ J_v'(\bar{t}) = 0,\ J_v''(\bar{t}) < 0\}$$

である。

補助定理 2. 次が成立。

(i) $\sup\{\|u\| : u \in U\} < \infty$

(ii) $\inf\{\|v\| : v \in V\} > 0$, 任意の正数 M に対して $\sup\{\|v\| : v \in V, Iv \leq M\} < \infty$

(iii) $\inf I(U) > -\infty$ 及び $\inf I(V) > -\infty$

証明. (i): $u \in U$ とする。$0 < J_u''(1) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda q \int_\Omega |u|^{1-q} \, dx - p\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^{1-q} \, dx\right)$ より、

$$\|u\|^{1+q} \leq \frac{\lambda(p+q)C_{1-q}}{p-1} \tag{3.1}$$

を得る。(ii): $v \in V$ とする。先と同様にして、$\|v\|^{p-1} \geq (1+q)/((p+q)C_{p+1})$ を得る。$Iv \leq M$ とすると、$\left(1/2 - 1/(p+1)\right)\|v\|^2 - \lambda C_{1-q}\left(1/(1-q) - 1/(p+1)\right)\|v\|^{1-q} \leq M$ を得る。(iii): (i), (ii) から明らか。 □

定理 1 の証明において、次は重要である。

命題 2. $Iu = \inf I(U)$, $Iv = \inf I(V)$ を満たす $u \in U$, $v \in V$ がそれぞれ存在する。

証明. まず、$Iu=\inf I(U)$ を満たす $u\in U$ が存在することを示す。$Iu_n\to\inf I(U)$ を満たす $\{u_n\}\subset U$ を取る。補助定理 2 (i) により、$\{u_n\}$ は $u\in H_0^1(\Omega)$ に弱収束するとして良い。もし $u=0$ とすると、$0=Iu\le \underline{\lim}\, Iu_n<0$ より矛盾を得るので、$u\in H_+$ がわかる。$\{u_n\}$ は u に強収束することを示す。このことを否定すると、$\|u_n-u\|\to c>0$ として良い。$J_u'(1)+c^2=0$ が成り立つことが容易にわかる。仮定 $\lambda\in(0,\Lambda)$ により、$J_u'(\underline{s})=J_u'(\overline{s})=0$ を満たす $0<\underline{s}<\overline{s}$ が存在する。$\underline{s}u\in U$ に注意する。$J_u'(1)<0$ より、$1<\underline{s}$ または $\overline{s}<1$ が成り立つ。$1<\underline{s}$ とすると、

$$\inf I(U)\ge J_u(1)+\frac{c^2}{2}>J_u(1)>J_u(\underline{s})\ge\inf I(U)$$

のように矛盾を得るので、$\overline{s}<1$ である。$t>0$ に対し、$f(t)=J_u(t)+c^2t^2/2$ と置く。$0<\overline{s}<1$ 及び $f'(1)=0,\ f'(\overline{s})=c^2\overline{s}>0$ から、$[\overline{s},1]$ 上で f は増加関数であることがわかる。よって、

$$\inf I(U)\ge f(1)>f(\overline{s})>J_u(\overline{s})>J_u(\underline{s})\ge\inf I(U)$$

となり、矛盾を得る。したがって、$\{u_n\}$ は u に強収束することを得た。仮定 $\lambda\in(0,\Lambda)$ により、$J_u''(1)>0$ であるから、$u\in U$ 及び $Iu=\inf I(U)$ が成り立つ。

次に、$Iv=\inf I(V)$ を満たす $v\in V$ が存在することを示す。$Iv_n\to\inf I(V)$ を満たす $\{v_n\}\subset V$ を取る。補助定理 2 (ii) より $\{v_n\}$ は $v\in H_0^1(\Omega)$ に弱収束するとしてよい。もし $v=0$ とすると、$\{v_n\}$ は 0 に強収束することがわかるので、補助定理 2 (ii) に矛盾するから、$v\in H_+$ がわかる。$\{v_n\}$ は v に強収束することを示す。このことを否定すると、$\|v_n-v\|\to a>0$ として良い。

$$\inf I(V)\ge Iv+\frac{a^2}{2},\quad J_v'(1)+a^2=0\quad \text{かつ}\quad J_v''(1)+a^2\le 0$$

が成り立つことがわかる。$J_v'(1)<0$ かつ $J_v''(1)<0$ より、$J_v'(\overline{t})=0$ 及び $J_v''(\overline{t})<0$ を満たす $\overline{t}\in(0,1)$ が存在することがわかる。$\overline{t}v\in V$ に注意する。$t>0$ に対し、$g(t)=J_v(t)+a^2t^2/2$ と置く。$0<\overline{t}<1$ 及び $g'(1)=0,\ g'(\overline{t})=a^2\overline{t}>0$ より、$[\overline{t},1]$ 上 g は増加関数であることがわかる。よって、

$$\inf I(V)\ge g(1)>g(\overline{t})>I(\overline{t}v)\ge\inf I(V)$$

のように矛盾を得る。したがって、$a=0$ であり、$\{v_n\}$ は v に強収束することがわかる。仮定 $\lambda\in(0,\Lambda)$ より、$J_v''(1)<0$ であることに注意すると、$v\in V$ 及び $Iv=\inf I(V)$ がわかる。 □

定理 1 の証明を終えるまで、命題 2 で得られた $u\in U$ 及び $v\in V$ を固定する。

補助定理 3. 各 $w\in H_+$ に対し、次が成立する。

(i) $0\le\varepsilon<\varepsilon_0$ ならば $I(u+\varepsilon w)\ge Iu$ を満たす正数 ε_0 が存在する。

(ii) $\varepsilon\to+0$ のとき、$t_\varepsilon\to 1$ となる。ただし、各 $\varepsilon\ge 0$ に対し、t_ε は、$t_\varepsilon(v+\varepsilon w)\in V$ を満たすただ一つの正数である。

証明. $w\in H_+$ とする。(i):

$$\sigma(\varepsilon)=\int_\Omega|\nabla(u+\varepsilon w)|^2\,dx+\lambda q\int_\Omega|u+\varepsilon w|^{1-q}\,dx-p\int_\Omega|u+\varepsilon w|^{p+1}\,dx,\quad \varepsilon\ge 0$$

と置く。$\sigma(0)=J_u''(1)>0$ より、$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ ならば $\sigma(\varepsilon)>0$ が成り立つ正数 ε_0 が存在する。各 $\varepsilon>0$ に対し、$s_\varepsilon(u+\varepsilon w)\in U$ を満たす $s_\varepsilon>0$ が取れるので、各 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ に対し、$I(u+\varepsilon w)\ge I(s_\varepsilon(u+\varepsilon w))\ge Iu$ を得る。

(ii): C^∞-関数 α を、$(t,a,b,c) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ に対し $\alpha(t,a,b,c) = at - \lambda bt^{-q} - ct^p$ と定める。

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}\left(1, \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \int_\Omega |v|^{1-q}\,dx, \int_\Omega |v|^{p+1}\,dx\right) = J_v''(1) < 0,$$
$$\alpha\left(t_\varepsilon, \int_\Omega |\nabla(v+\varepsilon w)|^2\,dx, \int_\Omega |v+\varepsilon w|^{1-q}\,dx, \int_\Omega |v+\varepsilon w|^{p+1}\,dx\right) = J'_{v+\varepsilon w}(t_\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \ge 0$$

となるので、陰関数定理から結論を得る。 □

補助定理 4. 各 $w \in H_+$ に対して、$u^{-q}w, v^{-q}w \in L^1(\Omega)$ 及び

$$\int_\Omega (\nabla u\nabla w - \lambda u^{-q}w - u^p w)\,dx \ge 0 \text{ かつ } \int_\Omega (\nabla v\nabla w - \lambda v^{-q}w - v^p w)\,dx \ge 0$$

が成り立つ。特に、ほとんど至るところ $u, v > 0$ がわかる。

証明. $w \in H_+$ とする。補助定理 3 (i) より、十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{1-q}&\int_\Omega \frac{|u+\varepsilon w|^{1-q} - |u|^{1-q}}{\varepsilon}\,dx \\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+\varepsilon w)|^2 - |\nabla u|^2}{\varepsilon}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{|u+\varepsilon w|^{p+1} - |u|^{p+1}}{\varepsilon}\,dx\end{aligned}$$

がわかる。$\varepsilon \downarrow 0$ に際して、上の不等式の右辺は有限の極限値を持つことに注意する。各 $x \in \Omega$ に対し、$\varepsilon \downarrow 0$ に際して $\left(|u(x)+\varepsilon w(x)|^{1-q} - |u(x)|^{1-q}\right)/\left((1-q)\varepsilon\right)$ は単調に増加し、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{|u(x)+\varepsilon w(x)|^{1-q} - |u(x)|^{1-q}}{(1-q)\varepsilon} = \begin{cases} 0 & w(x) = 0 \text{ のとき} \\ (u(x))^{-q}w(x) & w(x) > 0 \text{ かつ } u(x) > 0 \text{ のとき} \\ \infty & w(x) > 0 \text{ かつ } u(x) = 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

となることがわかる。したがって、単調収束定理により、$u^{-q}w \in L^1(\Omega)$ 及び $\int_\Omega (\nabla u\nabla w - \lambda u^{-q}w - u^p w)\,dx \ge 0$ を得る。

次に v についての性質を示す。各 $\varepsilon > 0$ に対し、$t_\varepsilon(v+\varepsilon w) \in V$ を満たす正数 t_ε が存在する。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $I(t_\varepsilon(v+\varepsilon w)) \ge Iv \ge I(t_\varepsilon v)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}\lambda t_\varepsilon^{1-q}&\int_\Omega \frac{|v+\varepsilon w|^{1-q} - |v|^{1-q}}{(1-q)\varepsilon}\,dx \\ &\le \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla(v+\varepsilon w)|^2 - |\nabla v|^2}{\varepsilon}\,dx - \frac{t_\varepsilon^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \frac{|v+\varepsilon w|^{p+1} - |v|^{p+1}}{\varepsilon}\,dx\end{aligned}$$

を得る。補助定理 3 (ii) より、$v^{-q}w \in L^1(\Omega)$ 及び $\int_\Omega (\nabla v\nabla w - \lambda v^{-q}w - v^p w)\,dx \ge 0$ を得る。 □

φ_1 を、ディリクレ境界条件のもとでの $-\Delta$ の正値固有関数とする。$\partial\Omega$ に対する正則性の仮定なしに $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$ が成り立つことを注意しておく。$\varphi = \eta\varphi_1$ で定義される φ が、Ω 上 $\Delta\varphi + \lambda\varphi^{-q} + \varphi^p > 0$ 及び $\varphi^{p+q} \le \lambda q/p$ を満たすように $\eta > 0$ を取っておく。すなわち、φ は、L^∞ ノルムの値が十分小さい (1.1) の正値劣解である。

補助定理 5. $u \ge \varphi$ 及び $v \ge \varphi$ が成り立つ。

証明. 各 w_n は Ω に含まれるコンパクトなサポートを持ち、$0 \leq w_n \leq (\varphi - u)^+$ であり、$\{w_n\}$ は $(\varphi - u)^+$ に強収束するような $\{w_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ を取る。補助定理 4 及び φ が劣解であることと $0 < t^{p+q} \leq \lambda q/p$ において $d/dt\,(\lambda t^{-q} + t^p) \leq 0$ が成り立つことから、

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega (\nabla u \nabla w_n - \lambda u^{-q} w_n - u^p w_n)\,dx - \int_\Omega (\nabla \varphi \nabla w_n - \lambda \varphi^{-q} w_n - \varphi^p w_n)\,dx \\
&= -\int_\Omega \nabla(\varphi - u)^+ \nabla w_n\,dx - \int_\Omega \big((\lambda u^{-q} + u^p) - (\lambda \varphi^{-q} + \varphi^p)\big) w_n\,dx \\
&\leq -\int_\Omega \nabla(\varphi - u)^+ \nabla w_n\,dx
\end{aligned}
$$

を得る。$n \to \infty$ として、$\int_\Omega |\nabla(\varphi - u)^+|^2\,dx \leq 0$ を得る。すなわち、$u \geq \varphi$ である。同様にして、$v \geq \varphi$ を得る。 □

補助定理 6. u 及び v は、(1.1) の正値弱解である。

証明. $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする。補助定理 5 より、$\operatorname{supp}\psi$ において $u \geq \delta$ かつ $v \geq \delta$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。補助定理 3 と同様の議論により、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $I(u+\varepsilon\psi) \geq Iu$ が成り立ち、$\varepsilon \to +0$ ならば $t_\varepsilon \to 1$ となる。ただし、t_ε は、$t_\varepsilon(v+\varepsilon\psi) \in V$ を満たすただ一つの正数である。したがって、

$$
0 \leq \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{I(u+\varepsilon\psi) - Iu}{\varepsilon} = \int_\Omega \nabla u \nabla \psi\,dx - \lambda \int_\Omega \frac{\psi}{u^q}\,dx - \int_\Omega u^p \psi\,dx
$$

及び

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{I(t_\varepsilon(v+\varepsilon\psi)) - Iv}{\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{I(t_\varepsilon(v+\varepsilon\psi)) - I(t_\varepsilon v)}{\varepsilon} \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla \psi\,dx - \lambda \int_\Omega \frac{\psi}{v^q}\,dx - \int_\Omega v^p \psi\,dx
\end{aligned}
$$

を得る。$\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ は任意だから、u 及び v は (1.1) の正値弱解であることがわかる。 □

標準的な議論により、$u, v \in C^\infty(\Omega)$ がわかり、Brezis–Kato の補助定理と同様な議論と Moser の反復法を用いて $u, v \in L^\infty(\Omega)$ もわかる。さらに、Ω 上 $u < v$ もわかる。これらのことは、[3] を参照のこと。以上で、定理 1 の証明を終える。

次に、定理 3 の証明を与える。

定理 3 の証明. (1.1) の任意の正値弱解 u を固定する。$h(t) = \lambda t^{-q} + t^p$ と置き、すべての $t \in (0, |u|_\infty]$ に対して

$$
ct^{-q} \geq \max\{h(s) : t \leq s \leq |u|_\infty\}
$$

を満たす $c > 0$ を取る。ここで、$|u|_\infty$ は、u の L^∞ ノルムの値を表す。$\bar{u} > |u|_\infty$ を満たす $\bar{u}$ を取り、

$$
\theta_0(s) = \begin{cases} \bar{u}(2s - s^{2-\mu}) & 0 \leq s \leq 1 \text{ のとき} \\ \bar{u} & s \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}
$$

と置き、$\theta(s) = \theta_0(\gamma s)$ と定める。$\gamma > 1/a$ とし、$\operatorname{supp}\psi \subset \Omega$ となる $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla(\theta(d)) \nabla \psi\,dx &= -\int_\Omega \theta'(d) \nabla d \nabla \psi\,dx \\
&= -\int_\Omega \nabla d \nabla(\theta'(d)\psi)\,dx + \int_\Omega \theta''(d) |\nabla d|^2 \psi\,dx
\end{aligned}
$$

$$\leq \int_\Omega (K\theta'(d)d^{-\mu} + \theta''(d))\psi \, dx$$

となるから、

$$\Delta(\theta(d)) \leq \theta''(d) + K\theta'(d)d^{-\mu} \quad \text{in } \Omega_{1/\gamma}$$

を得る。

$$\begin{aligned} -\Delta(\theta(d)) - c(\theta(d))^{-q} &\geq -\gamma^2\theta_0''(\gamma d) - \gamma\theta_0'(\gamma d)Kd^{-\mu} - c(\theta_0(\gamma d))^{-q} \\ &\geq (\gamma d)^{-\mu}\left(\gamma^2(2-\mu)(1-\mu)\bar{u} - 2\gamma^{1+\mu}K\bar{u} - c(2\bar{u})^{-q}\right) \quad \text{in } \Omega_{1/\gamma} \end{aligned}$$

だから、$\gamma > 1/a$ を十分大きく取ることにより

$$-\Delta(\theta(d)) - c(\theta(d))^{-q} \geq 0 \quad \text{in } \Omega_{1/\gamma}$$

が成り立つ。$w = u - \theta(d)$ と置くと、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left(\nabla u \nabla w^+ - h(u)w^+\right) dx \\ &= \int_\Omega \nabla w \nabla w^+ \, dx + \int_\Omega \left(c(\theta(d))^{-q} - h(u)\right) w^+ \, dx \\ &\quad + \int_\Omega (\nabla\theta(d)\nabla w^+ - c(\theta(d))^{-q}w^+) \, dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla w^+|^2 \, dx \end{aligned}$$

を得る。これは、$u \leq \theta(d) \leq \theta'(+0)\, d = 2\gamma\bar{u}\, d$ を意味する。 □

参考文献

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519–543.

[2] M. M. Coclite and G. Palmieri, *On a singular nonlinear Dirichlet Problem*, Comm. Part. Diff. Eq. **14** (1989), 1315–1327.

[3] N. Hirano, C. Saccon and N. Shioji, *Existence of multiple positive solutions for singular elliptic problems with concave and convex nonlinearities*, to appear in Adv. Diff. Eq.

[4] Y. Sun, S. Wu and Y. Long, *Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems*, J. Diff. Eq. **176** (2001), 511–531.