数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 192-201

$\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数上の $\widehat{W}_n$ の $\widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)}$ による拡大について

中央大学・数学専攻 (M 2) 新妻 康弘 (Yasuhiro Niitsuma)
Department of Mathematics,
Chuo University

序.

S をスキーム, G を S の上の群スキーム, H を G が作用する S の上の可換群スキームとする. G の H による拡大の同値類の群 $\mathrm{Ext}^1_S(G,H)$ を決定すること, あるいは, G と H が線型的である場合に $\mathrm{Ext}^1_S(G,H)$ の部分群である Hochschild cohomology 群 $H^2(G,H)$ を決定すること, さらに, G が可換で G の H の上への作用が自明である場合に $H^2(G,H)$ の部分群である対称 Hochschild cohomology 群 $H^2_0(G,H)$ を決定することは群スキームの理論の中でも重要な問題であるが, $S=\mathrm{Spec}\,K$ (K は体) の場合, 基本的な群スキームに対する結果が Demazure-Gabriel [1] に集大成されている.

このような研究を一般の環の上で展開することは自然な試みであるが, 長さ n の Witt vector の加法的群スキーム W_n と乗法的群スキーム $\mathbb{G}_m$ に関して, 関口-諏訪 [3] では, 一般の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数 A に対して $H^2_0(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ や $H^2_0(W_{n,A},\mathbb{G}_{m,A})$ の記述が得られている. また, 乗法 $T\mapsto T\otimes 1+1\otimes T+\lambda T\otimes T$ をもつ群スキーム $\mathcal{G}^{(\lambda)}=\mathrm{Spec}\,A[T,1/(\lambda T+1)]$ に関して, 関口-諏訪 [4] では, 一般の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数 A に対して $H^2_0(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)})$ や $H^2_0(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{G}^{(\mu)})$ の記述が得られている.

本稿では, [3] の結果に [4] で提示されている Witt vector の変形と, Artin-Hasse exponential series の変形を援用することによって, 一般の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数 A に対して $H^2_0(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)})$ や $H^2_0(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)})$ の完全な記述を与える. また, A が離散付値環であるとき, $\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)})$ の完全な記述を与え, 自然な写像 $\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)})\to\mathrm{Ext}^1_A(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)})$ が単射である例と単射でない例を与える.

1. [3] の主結果の復習.

この節では, 今回得た結果の基となる [3] の主結果を復習する.

1.1. 多項式 $\Phi_{r,n}(\boldsymbol{T})\in\mathbb{Z}[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1}]$ を

$$\Phi_{r,n}(\boldsymbol{T})=\begin{cases}\Phi_r(T_0,T_1,\ldots,T_r) & (r\le n-1)\\ \Phi_r(T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},0,\ldots,0) & (r\ge n)\end{cases}$$

とおくとき, Artin-Hasse exponential series の変形 $E_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{T})$ は

$$E_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{T})=\exp\left[\sum_{r\ge 0}\frac{1}{p^r}\Phi_r(\boldsymbol{U})\Phi_{r,n}(\boldsymbol{T})\right]\in\mathbb{Z}_{(p)}[\boldsymbol{U}][[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1}]]$$

によって定義される．また，多項式 $S_{n,n+i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_{n-1},Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ を

$$S_{n,n+i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=S_{n+i}(X_0,\dots,X_{n-1},0,\dots,0,Y_0,\dots,Y_{n-1},0,\dots,0)$$

とおくとき，Artin-Hasse exponential series の変形 $F_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は

$$F_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\exp\left[\sum_{r\geq 0}\frac{1}{p^r}\Phi_r(\boldsymbol{U})\Phi_r(S_{n,n}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),S_{n,n+1}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots)\right]$$
$$\in\mathbb{Z}_{(p)}[\boldsymbol{U}][[X_0,X_1,\dots,X_{n-1},Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1}]]$$

によって定義される．

1.2. A を $\mathbb{Z}_{(p)}[M]$ 代数とする．複体

$$C^1(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})\xrightarrow{\partial}C^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

は

$$\begin{aligned}C^1(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})&=\{F(\boldsymbol{T})\in A[[T_0,T_1,\dots,T_{n-1}]];F(\boldsymbol{T})\equiv 1 \bmod \deg 1\},\\ C^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})&\\ =\{F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})&\in A[[X_0,\dots,X_{n-1},Y_0,\dots,Y_{n-1}]];F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\equiv 1 \bmod \deg 1\}\end{aligned}$$

によって定義される．ここで，boundary map は

$$\partial: F(\boldsymbol{T})\mapsto F(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y})F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))^{-1}$$

である．さらに，$B^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ を

$$B^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})=\{F(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y})F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))^{-1};F(\boldsymbol{T})\in C^1(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})\}$$

とおき，対称な 2-cocycle の群 $Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ を

$$Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})=\left\{\begin{array}{ll}F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) & ;F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=F(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\\ \in C^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})=F(\boldsymbol{X},S(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))F(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\end{array}\right\}$$

とおく．そして，この場合の対称 Hochschild cohomology 群は

$$H_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})=Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})/B^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

によって定義される．

1.3. 群の準同型写像 ξ_n^0, ξ_n^1 を, それぞれ

$$\boldsymbol{a} \mapsto E_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{T}) : W(A) \to C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),$$
$$\boldsymbol{a} \mapsto F_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : W(A) \to Z^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

によって定義する時, 次の複体に関する図式

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\xi_n^0} & C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \\ {\scriptstyle F^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ W(A) & \xrightarrow[\xi_n^1]{} & Z^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}). \end{array}$$

は可換である. さらに, この可換図式より cohomology 群の準同型

$$\xi_n^0 : \mathrm{Ker}[F^n : W(A) \to W(A)] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),$$
$$\xi_n^1 : \mathrm{Coker}[F^n : W(A) \to W(A)] \to H_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

が誘導される. この時, [3] では次のような結果が得られている:

関口-諏訪 [3] の主結果. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数とする. この時, 対応 $\boldsymbol{a} \mapsto E_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{T})$ は同型

$$\xi_n^0 : \mathrm{Ker}[F^n : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を与える. また, 対応 $\boldsymbol{a} \mapsto F_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は同型

$$\xi_n^1 : \mathrm{Coker}[F^n : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を与える.

群スキームの場合に対しても同様に, 次のような具体的な記述が得られている: A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数とする. この時, 対応 $\boldsymbol{a} \mapsto E_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{T})$ は同型

$$\xi_n^0 : \mathrm{Ker}[F^n : \widehat{W}(A) \to \widehat{W}(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A})$$

を与える. また, 対応 $\boldsymbol{a} \mapsto F_{p,n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は同型

$$\xi_n^1 : \mathrm{Coker}[F^n : \widehat{W}(A) \to \widehat{W}(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A})$$

を与える.

2. 主定理.

加法的群スキームと乗法的群スキームを結ぶ群スキーム $\mathcal{G}^{(M)}$ とその性質を復習する.

2.1. A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする. A 上の群スキーム

$$\mathcal{G}^{(M)} = \mathrm{Spec}\, A[T, \frac{1}{1+MT}]$$

は次によって定義される：

(1) multiplication : $T \mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T + MT \otimes T$;

(2) unit : $T \mapsto 0$;

(3) inverse : $T \mapsto -\dfrac{T}{1+MT}$.

$\mathcal{G}^{(M)}$ は，M が A において可逆の時 $\mathbb{G}_{m,A}$ と同型であり，$M=0$ の時 $\mathbb{G}_{a,A}$ に一致する．また，$\widehat{\mathcal{G}}^{(M)}$ によって $\mathcal{G}^{(M)}$ を zero section に沿って formal completion した形式群スキームを表わす．

2.1.1. A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする．$B = A[t]/(t^2 - Mt)$，ε を t の B における像とする時，formal group の split する exact sequence

$$0 \to \widehat{\mathcal{G}}^{(M)} \to (\widehat{\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}}) \to \widehat{\mathbb{G}}_{m,A} \to 0$$

が存在する．ここで，$\widehat{\mathcal{G}}^{(M)} \to (\widehat{\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}})$ の有理点の対応は $a \mapsto 1 + \varepsilon a$ で与えられ，$(\widehat{\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}}) \to \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}$ の有理点の対応は $b \mapsto b \bmod \varepsilon$ で与えられる (cf. [4])．

[4] で提示されている Witt vector の変形 $W^{(M)}$ とその性質を復習する．

2.2. 多項式 $\Phi_r^{(M)}(\boldsymbol{T})$, $S_r^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $P_r^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $F_r^{(M)}(\boldsymbol{T})$ をそれぞれ

$$\Phi_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{M}\Phi_r(MT_0,\ldots,MT_r) \in \mathbb{Z}[M][T_0,T_1,\ldots,T_r],$$

$$S_r^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M}S_r(MX_0,\ldots,MX_r,MY_0,\ldots,MY_r) \in \mathbb{Z}[M][X_0,\ldots,X_r,Y_0,\ldots,Y_r],$$

$$P_r^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M}P_r(X_0,\ldots,X_r,MY_0,\ldots,MY_r) \in \mathbb{Z}[M][X_0,\ldots,X_r,Y_0,\ldots,Y_r],$$

$$F_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{M}F_r(MT_0,\ldots,MT_{r+1}) \in \mathbb{Z}[M][T_0,\ldots,T_r,T_{r+1}]$$

によって定義する．この時 $\mathbb{Z}[M]$ 上の $W_{\mathbb{Z}[M]}$-module

$$W^{(M)} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots]$$

は次によって定義される：

(1) multiplication : $T_i \mapsto S_i^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T})$;

(2) action : $T_i \mapsto P_i^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T})$.

また，準同型写像 $F^{(M)} : W^{(M)} \to W^{(M)}$ は

$$T_0 \mapsto F_0^{(M)}(\boldsymbol{T}), T_1 \mapsto F_1^{(M)}(\boldsymbol{T}), T_2 \mapsto F_2^{(M)}(\boldsymbol{T}), \ldots$$

によって定義される.

$W^{(M)}$ は, $M=1$ の時 $W_{\mathbb{Z}}$ に一致し, $M=0$ の時 $\mathbb{G}^{\mathrm{N}}_{a,\mathbb{Z}}$ に一致する.

2.2.1. A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする. $B=A[t]/(t^2-Mt)$, ε を t の B における像とする時, group の split する exact sequence

$$0 \to W^{(M)} \to \prod_{B/A} W_B \to W_A \to 0$$

が存在する. ここで, 有理点の対応は $W^{(M)} \to \prod_{B/A} W_B$ の有理点の対応は $(a_0, a_1, \dots,) \mapsto (\varepsilon a_0, \varepsilon a_1, \dots)$ で与えられ, $\prod_{B/A} W_B \to W_A$ の有理点の対応は $(b_0, b_1, \dots) \mapsto (b_0 \bmod \varepsilon, b_1 \bmod \varepsilon, \dots)$ で与えられる (cf. [4]).

2.3. Artin-Hasse exponential series の変形

$$E^{(M)}_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{T}) \in \mathbb{Z}_{(p)}[M][\boldsymbol{U}][[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]],$$
$$F^{(M)}_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \mathbb{Z}_{(p)}[M][\boldsymbol{U}][[X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}]]$$

を, それぞれ

$$E^{(M)}_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{T}) = \frac{1}{M}\left[E_{p,n}(MU_0, MU_1, \dots; \boldsymbol{T}) - 1\right],$$
$$F^{(M)}_{p,n}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M}\left[F_{p,n}(MU_0, MU_1, \dots; \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) - 1\right]$$

によって定義する.

2.4. A を $\mathbb{Z}_{(p)}[M]$ 代数とする. 複体

$$C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)}) \xrightarrow{\partial} C^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$

を

$$C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)}) = \{F(\boldsymbol{T}) \in A[[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]]; F(\boldsymbol{T}) \equiv 0 \bmod \deg 1\},$$
$$C^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$
$$= \{F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in A[[X_0, \dots, X_{n-1}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]]; F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \equiv 0 \bmod \deg 1\}$$

によって定義する. ここで, boundary map は

$$\partial : F(\boldsymbol{T}) \mapsto \frac{F(\boldsymbol{X}) + F(\boldsymbol{Y}) + MF(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y}) - F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))}{1 + MF(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))}$$

である. さらに, $B^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$ を

$$B^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)}) = \left\{ \frac{F(\boldsymbol{X}) + F(\boldsymbol{Y}) + MF(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y}) - F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))}{1 + MF(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))}; F(\boldsymbol{T}) \in C^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)}) \right\}$$

とおき，対称な 2-cocycle の群 $Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$ を

$$
\begin{aligned}
&Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})\\
&=\left\{\begin{array}{ll}
F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) & ;F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=F(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\\
\quad\in C^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)}) & F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})+F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})+MF(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})F(S(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})\\
 & \quad =F(\boldsymbol{X},S(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))+F(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+MF(\boldsymbol{X},S(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}))F(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

とおく．そして，この場合の対称 Hochschild cohomology 群を

$$H_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})=Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})/B^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$

によって定義する．

以上の準備の下で，我々は次の定理を得る．

定理 2.5. A を $\mathbb{Z}_{(p)}[M]$ 代数とする．この時，対応 $\boldsymbol{a}\mapsto E_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{T})$ は同型

$$\xi_n^0:\mathrm{Ker}[F^{(M)^n}:W^{(M)}(A)\to W^{(M)}(A)]\ \xrightarrow{\sim}\ \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$

を与える．また，対応 $\boldsymbol{a}\mapsto F_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は同型

$$\xi_n^1:\mathrm{Coker}[F^{(M)^n}:W^{(M)}(A)\to W^{(M)}(A)]\ \xrightarrow{\sim}\ H_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$

を与える．

例 2.5.1. $M=0$ とし，$[1]=(1,0,0,\ldots)$ とおく．この時，

$$F_{p,n}^{(0)}([1];\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=S_{n,n}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\ =\ S_n(X_0,\ldots,X_{n-1},0,Y_0,\ldots,Y_{n-1},0)$$

であり，これは拡大 $\widehat{W}_{n+1}$ を決める $Z^2(\widehat{W}_n,\widehat{\mathbb{G}}_a)$ の 2-cocycle である．

3. 証明の概略と考察.

定理 2.5 の証明の概略を紹介した後，群スキームの場合に対する結果を紹介する．

3.1. 2.1.1 と 2.2.1 の exact sequence から得られる複体に関する次の図式

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 \arrow[rr] & & C^1(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & C^1(\widehat{W}_{n,B},\widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & C^1(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & W^{(M)}(A) \arrow[rr] \arrow[dd, "(F^{(M)})^n"] & & W(B) \arrow[rr] \arrow[dd, "F^n"] \arrow[ur, "\xi_n^0"] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[dd, "F^n"] \arrow[ur, "\xi_n^0"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,B},\widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,A},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & W^{(M)}(A) \arrow[rr] & & W(B) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi_n^1"] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi_n^1"] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

は可換である．この可換図式より $\xi_n^0 : W^{(M)}(A) \to C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$ と $\xi_n^1 : W^{(M)}(A) \to Z_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$ が誘導される．

さらに，この可換図式の縦の準同型写像に関して Ker, Coker をとることにより得られる本稿最終ページの図式は可換になる．この可換図式に，[3] の主結果を適用することにより，誘導された準同型写像

$$\xi_n^0 : \mathrm{Ker}[F^{(M)^n} : W^{(M)}(A) \to W^{(M)}(A)] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)}),$$
$$\xi_n^1 : \mathrm{Coker}[F^{(M)^n} : W^{(M)}(A) \to W^{(M)}(A)] \to H_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(M)})$$

が同型であることを得る．

さらに，誘導された準同型写像 ξ_n^0 と ξ_n^1 の具体的記述が，それぞれ，2.3 で定義した Artin-Hasse exponential series の変形 $E_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{T})$ と $F_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ によって得られる．

また，同様にして群スキームの場合に対しても具体的記述を行うことができ，実際，次の系を得る．

系 3.2. A を $\mathbb{Z}_{(p)}[M]$ 代数とする．M が nilpotent であれば，対応 $\boldsymbol{a} \mapsto E_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{T})$ は同型

$$\xi_n^0 : \mathrm{Ker}[F^{(M)^n} : \widehat{W}^{(M)}(A) \to \widehat{W}^{(M)}(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(M)})$$

を与える．また，対応 $\boldsymbol{a} \mapsto F_{p,n}^{(M)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ は同型

$$\xi_n^1 : \mathrm{Coker}[F^{(M)^n} : \widehat{W}^{(M)}(A) \to \widehat{W}^{(M)}(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(M)})$$

を与える．

ここで，群スキームの場合に，拡大の同値類の群 $\mathrm{Ext}_A^1(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(M)})$ との関係を次の exact sequence を用いて考察する．

補註 3.3. G を A 上のアフィン群スキームとし，F を fppf-sheaf とする．$\check{\mathcal{H}}^i(F)$ を $X \mapsto H_{\mathrm{fl}}^i(X, F)$ によって定義される $(\mathrm{Sch}_{/A})$ 上の presheaf とする．この時，我々は次の exact sequence

$$0 \to H_0^2(G,F) \to \mathrm{Ext}_A^1(G,F) \to H_0^1(G, \check{\mathcal{H}}^1(F)) \to H_0^3(G,F) \to \mathrm{Ext}_A^3(G,F)$$

を得る (cf. [1, Ch.III.6.2.5])．

今の場合 $G = W_{n,A}$，$F = \mathcal{G}^{(M)}$ であり，$H_0^1(W_{n,A}, \check{\mathcal{H}}^1(\mathcal{G}^{(\mu)}))$ は $H_{\mathrm{fl}}^1(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(M)})$ における primitive element の集合である．この時，$\mathcal{G}^{(M)}$ が smooth であるので，$H_{\mathrm{fl}}^1(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(M)})$ をétale topology に対して計算してもよく，また，M が A において nilpotent である時，

$H^1_{\mathrm{et}}(G,\mathcal{G}^{(M)})=0$ が知られているので，$H^2_0(W_{n,A},\mathcal{G}^{(M)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A},\mathcal{G}^{(M)})$ を得る．

4. 離散付値環上の場合.

この節では M が nilpotent でない時，特に離散付値環上の場合に $\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A},\mathcal{G}^{(M)})$ の具体的記述を与える．この節を通して，A を離散付値環とし，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．また，$\mu\in\mathfrak{m}$ とし，$A_0=A/(\mu)$ とする．

4.1. 補註 3.3 の exact sequence をこの場合に適用すると，

$$H^2_0(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)})=H^3_0(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)})=0$$

である事から，

$$\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A},\mathcal{G}^{(\mu)}) \xrightarrow{\sim} H^1_0(W_{n,A},\check{\mathcal{H}}^1(\mathcal{G}^{(\mu)}))$$

を得る．さらに，$H^1_{\mathrm{et}}(W_{n,A},\mathcal{G}^{(M)})$ の primitive element の集合を計算し，次のような群スキームを考えることで，定理 4.3 を得る．

4.2. 多項式 $F(T_0,\dots,T_{n-1})\in A[T_0,\dots,T_{n-1}]$ が次を満たすとする：
(1) $F(\boldsymbol{X})\equiv 1 \bmod \deg 1$ ； (2) $F(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y})\equiv F(S_0(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,S_{n-1}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})) \bmod \mu$.
この時，A 上の群スキーム

$$\mathcal{E}_n^{(\mu;F)}=\mathrm{Spec}\,A\left[T_0,T_1,\dots,T_{n-1},T_n,\frac{1}{\mu T_n+F(T_0,\dots,T_{n-1})}\right]$$

を次によって定義する：

(1) multiplication :

$$\begin{aligned} T_i &\longmapsto S_i(\boldsymbol{T}\otimes 1,1\otimes\boldsymbol{T}) \qquad (0\le i\le n-1),\\ T_n &\longmapsto \mu T_n\otimes T_n+T_n\otimes F(\boldsymbol{T})+F(\boldsymbol{T})\otimes T_n\\ &\qquad\qquad +\frac{1}{\mu}[F(\boldsymbol{T})\otimes F(\boldsymbol{T})-F(S(\boldsymbol{T}\otimes 1,1\otimes\boldsymbol{T}))]; \end{aligned}$$

(2) unit :

$$T_i \longmapsto 0 \quad (0\le i\le n-1),\quad T_n \longmapsto \frac{1}{\mu}[1-F(0,\dots,0)];$$

(3) inverse :

$$\begin{aligned} T_i &\longmapsto I_i(\boldsymbol{T}) \qquad (0\le i\le n-1),\\ T_n &\longmapsto \frac{1}{\mu}[\frac{1}{\mu T_n+F(T_0,\dots,T_{n-1})}-F(I_0(\boldsymbol{T}),I_1(\boldsymbol{T}),\dots,I_{n-1}(\boldsymbol{T}))]. \end{aligned}$$

ここで，$I_0(\boldsymbol{T}),I_1(\boldsymbol{T}),\dots,I_{n-1}(\boldsymbol{T})$ は Witt vector の加法的群スキームの inverse を決める多項式であり，よく知られているように，$p>2$ の時，$I_r(\boldsymbol{T})=-T_r$ である．

定理 4.3. 上の記号の下で，対応 $F(T) \mapsto \mathcal{E}_n^{(\mu;F)}$ は同型

$$\partial : \mathrm{Hom}_{A_0-\mathrm{gr}}(W_{n,A_0}, \mathbb{G}_{m,A_0}) \;\to\; \mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(\mu)})$$

を与える．

また，$\mathrm{Hom}_{A_0-\mathrm{gr}}(W_{n,A_0}, \mathbb{G}_{m,A_0})$ の具体的記述は [3] で与えられている．

4.4. A を混標数の環とする時，[3] の主結果や定理 2.5, 4.3 等を用いることにより，自然な写像

$$\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \mathrm{Ext}^1_A(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)}) = H^2_0(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)})$$

が単射か否かの考察をしている．今の所，以下のような例を得ている．

例 4.4.1. $p \nmid v(p)$，$v(\mu) \leq \dfrac{2p-1}{p^3-p^2}v(p)$ とする．この時，

$$\mathcal{E} \mapsto \widehat{\mathcal{E}} \;:\; \mathrm{Ext}^1_A(W_{2,A}, \mathcal{G}^{(\mu)}_A) \to \mathrm{Ext}^1_A(\widehat{W}_{2,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)})$$

は単射である．

例 4.4.2. $v(\mu) > \dfrac{v(p)}{p-1} + 1$ とする．この時，

$$\mathcal{E} \mapsto \widehat{\mathcal{E}} \;:\; \mathrm{Ext}^1_A(W_{2,A}, \mathcal{G}^{(\mu)}_A) \to \mathrm{Ext}^1_A(\widehat{W}_{2,A}, \widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)}_A)$$

は単射でない．

最後に． 詳細については，[5] を御参照下さい．

参考文献

[1] M. Demazure and P. Gabriel, *Groups algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland, Paris-Amsterdam, 1970

[2] T. Sekiguchi and N. Suwa, *Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 38 (1991), 1-45

[3] T. Sekiguchi and N. Suwa, *A note on extensions of algebraic and formal groups III*, Tôhoku Math. J. 49(1997), 241-257

[4] T. Sekiguchi and N. Suwa, *A note on extensions of algebraic and formal groups V*, Japan. J. Math. 29, no.2(2003), 221-284

[5] Y. Niitsuma, *On the extensions of* $\widehat{W}_n$ *by* $\widehat{\mathcal{G}}^{(\mu)}$ *over a* $\mathbb{Z}_{(p)}$*-algebra*, Preprint (2004)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & \\
 & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{gr}}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_{B-\mathrm{gr}}(\widehat{W}_{n,B}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{gr}}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \mathrm{Ker}\,(F^{(M)})^n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\xi_n^0"'] & & \begin{matrix}\mathrm{Ker}\,[F^n : \\ W(B) \to W(B)]\end{matrix} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\sim", "\xi_n^0"'] & & \begin{matrix}\mathrm{Ker}\,[F^n : \\ W(A) \to W(A)]\end{matrix} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\sim", "\xi_n^0"'] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & C^1(\widehat{W}_{n,B}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & C^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & W^{(M)}(A) \arrow[rr] \arrow[dd, "(F^{(M)})^n"] \arrow[ur, "\xi_n^0"'] & & W(B) \arrow[rr] \arrow[dd, "F^n"] \arrow[ur, "\xi_n^0"'] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[dd, "F^n"] \arrow[ur, "\xi_n^0"'] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,B}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & W^{(M)}(A) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\xi_n^1"'] & & W(B) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\xi_n^1"'] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\xi_n^1"'] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & H_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H_0^2(\widehat{W}_{n,B}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H_0^2(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \mathrm{Coker}\,(F^{(M)})^n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\xi_n^1"'] & & \begin{matrix}\mathrm{Coker}\,[F^n : \\ W(B) \to W(B)]\end{matrix} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\sim", "\xi_n^1"'] & & \begin{matrix}\mathrm{Coker}\,[F^n : \\ W(A) \to W(A)]\end{matrix} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, "\sim", "\xi_n^1"'] & & 0 & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$