数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 124-142

多次元底付き超幾何変換公式
–Cauchy の再生核からのアプローチ–

梶原 康史 (大阪大学理学研究科)
Yasushi KAJIHARA (Graduate school of science, Osaka University)

今は亡き祖母、田中多津に捧ぐ

本論説では、

- [10] Y.K: "Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications." to appear in Adv. in Math.
- [13] Y.K and Masatoshi Noumi: "Multiple elliptic hypergeometric series – An approach from the Cauchy determinant–." Indag. Math. New Ser. 14, 395–421.

で得られた多次元超幾何級数の変換公式、和公式の Cauchy 再生核からの導出に関する概説を行います。それらのなかで述べなかった鍵となる計算等の補足や注釈もまじえつつ論じていきます。ここでの説明は全て底つき超幾何級数の場合で行います。通常の超幾何級数やここでは述べられなかった底つき超幾何級数に関する結果は [10] を、楕円超幾何級数についてのものは [13] を御覧になって下さい。

1 導入

高次元超幾何級数は量子力学に起源を持ち、Lie 群 $SU(n+1)$ の既約表現の tensor 積の分解係数を正確に記述するために Holman-Biedenharn-Louck [9]、[8] によって導入された超幾何級数の拡張の一つのクラスである。その後 Milne [19] によって導入された底つき類似も含め、様々な方法による種々の古典的に知られている変換公式、和公式の拡張がなされており、平面分割の数え上げ関数や η 関数の巾乗の展開公式などへの応用が知られている。(これについて、2000 年頃までの研究の進展については Milne による概説 [21] やそこで紹介されている文献を参照のこと。) 後に Frenkel-Turaev [5] によって導入された楕円超幾何級数についての多次元化も含め、現在盛んに研究されている。(高次元楕円超幾何級数の最近の研究としては Warnaar [26]、Rosengren[23]、 Rosengren-Schlosser [24] そして Kajihara-Noumi [13] など。)

一方、筆者が述べるまでもなく、本論説での出発点となる Cauchy の再生核 [16]、Cauchy 行列式はそれ自身 19 世紀から知られており、これまで実に多岐にわたる分野での応用が今もなおなされている汲めども尽きぬ源泉であることを否定しえないであろう。ここで述べる内容は、そのほんのささやかな一側面である。

本論説では、その Cauchy の再生核、そして Macdonald によって導入された可換な q-差分作用素 (の族の母関数) の対称性を用いることによってなされる A 型高次元

底付き超幾何級数に関するEuler変換公式[10]の導出について論じる。その顕著な性質の一つとしては、その両辺の和をとる格子の次元が独立にとれることが挙げられるであろう。次に、ここで得られたEuler変換公式をMaster formulaとしてとらえ、そこから派生する(高次元)底つき超幾何級数の種々の変換公式、和公式について論じる。その中で、とりわけ重要なクラスの変換公式として、双対変換公式(duality transformation formula)とその平衡版(balanced duality transformation formula)を提唱する。それらの公式を用いることによって、古典的に知られる超幾何級数の変換公式、和公式に関するクラスでBailey hierarchy(Bailey [3]、Slater [25]、底つきの場合はGasper-Rahman [7]を参照のこと)といわれるもののかなりの部分が再現もしくは多次元に拡張できる。ここでは、その[10]での結果の一部を紹介する。

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えて頂いた山根宏之先生に感謝致します。共同研究者であり院生時代の指導教官である野海正俊先生と現在の指導教官である伊達悦朗先生に感謝致します。また、この原稿の準備中(1/26)に亡くなった私の祖母田中多津さんに哀悼の意を表するとともに、この論説を今は亡き祖母に捧げます。

2 道具と記号の準備

この章では、対称関数に関するCauchyの再生核、Cauchyの行列式、そして底つき超幾何級数について本論説のなかで必要な事柄を手短に復習し、記号の定義を行う。その他の性質などは各節で示す文献を参照のこと。

2.1 Cauchyの再生核

この節での参考文献はMacdonald[16]である。

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0$ に対して、変数 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_N)$ のSchur関数 $S_\lambda(z)$ を次のように定義する。:

$$S_\lambda(z) = \frac{\det\left(z_i^{\lambda_j+N-j}\right)_{i,j=1}^{N}}{\Delta(z)} \tag{2.1}$$

ここで $\Delta(z)$ は

$$\Delta(z) = \prod_{1\leq i<j\leq N} (z_i - z_j) = \det\left(z_i^{N-j}\right)_{i,j=1}^{N}$$

はVandermonde行列式を表す。上で定義したSchur関数に関して、次の母関数表示が知られており、それをCauchyの再生核(もしくはCauchy-Binetの公式)と言う。:

変数 $z = (z_1, \cdots z_N)$、$w = (w_1, \cdots, w_M)$ に対して

$$\begin{aligned} \prod(z;w) &:= \sum_{l(\lambda)\leq \min(N,M)} S_\lambda(z) S_\lambda(w) \\ &= \prod_{1\leq i\leq N} \prod_{1\leq k\leq M} \frac{1}{1 - z_i w_k} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで $l(\lambda)$ は分割 λ の長さである。

2.2 関数 $[x]$ に関する Cauchy 行列式

$[x]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の nonzero の正則な奇関数であり、Riemann 関係式を満たすものとする。すなわち $[x]$ は次の 2 条件を満たす。

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad [-x] = -[x], \qquad\qquad (2.3)\\
&(2) \qquad [x+y]\,[x-y]\,[u+v]\,[u-v]\\
&\qquad = [x+u]\,[x-u]\,[y+v]\,[y-v] - [x+v]\,[x-v]\,[y+u]\,[y-u]
\end{aligned}
$$

上の条件 (2.3) を満たす関数のクラスとして、以下の 3 つが知られている (例えば Whittaker-Watson [27] などを参照)。

- $\sigma(x;\omega_1;\omega_2)$: 周期 (ω_1,ω_2) の Weierstrass の σ 関数 (楕円関数)
- $\sin(\pi x)$:(三角関数)
- x : (有理関数)

条件 (2.3) を満たす関数に関して、次のような行列式が知られおりそれを Cauchy 行列式という。

Theorem 2.1. (Cauchy 行列式) *2 つの変数の組 $z=(z_1,\dots,z_M)$ と $w=(w_1,\dots,w_M)$ に対して次が成り立つ。:*

$$
\begin{aligned}
D(z|w) &:= \det\left(\frac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}\right)_{i,j=1}^{M} \qquad (2.4)\\
&= \frac{\left[\lambda+\sum_{1\le i\le M}(z_i+w_i)\right]\prod_{1\le i<j\le M}[z_i-z_j]\,[w_i-w_j]}{[\lambda]\prod_{1\le i,j\le M}[z_i+w_j]}
\end{aligned}
$$

ここで λ は複素数のパラメータである。

この行列式は Frobenius[6] によって知られており、また Fay の trisecant formula[4] の特別な場合として知られている。$M=2$ の場合は Riemann 関係式と等価である。

$D(z|w)$ は各変数 (z_i 達と w_j 達) 内での置換に関して交代的であり、z 達と w 達の入れ換えについて対称であることに注意しよう。

2.3 底付き超幾何級数に対する Euler(第 3Heine) 変換

この節では、底つき超幾何級数の記号の定義をしながら、Euler(第 3Heine) 変換公式を紹介する。概ね、底つき超幾何級数の記号等は、[7] に従う。その他、底つき超幾何級数の変換公式、和公式やその性質等は [7] 、[1] 等を参照のこと。また、本論説内では $0<|q|<1$ であることを仮定する。

Theorem 2.2. (底付き超幾何級数に関する Euler(第3Heine) 変換)

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};q;u\right] = \frac{(abu/c)_\infty}{(u)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,c/a\\c\end{matrix};q;abu/c\right] \tag{2.5}$$

ここで ${}_{r+1}\phi_r$ は一般化底つき超幾何級数

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_0,a_1,\dots a_r\\c_1,\dots c_r\end{matrix};q;u\right] = \sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{(a_0)_n(a_1)_n\dots(a_r)_n}{(c_1)_n\dots(c_r)_n(q)_n}u^n. \tag{2.6}$$

を表す。また

$$ (a)_\infty := \prod_{n\in\mathbf{N}}(1-aq^n), \quad (a)_k := \frac{(a)_\infty}{(aq^k)_\infty} \quad \text{for } k\in\mathbf{C}$$

は q-shifted factorial を表す (q-shifted factorial の底 q は略記する)。さらに、$c_1\cdots c_r = a_1\cdots a_{r+1}q$ のとき、${}_{r+1}\phi_r$ 級数は平衡的 (balanced) であるという。(2.5) は Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ に関する Euler 変換公式の q-類似であり、$q\to 1$ の極限で Euler 変換に収束する。

2.4 多次元底付き超幾何級数と多次元 q-二項定理

次に本論説の主なテーマとなる多次元超幾何級数とそのもっとも基本的な例である多次元 q-二項定理について説明する。

次のような形をした形式的巾級数で、添字の入れ換えに関して不変なものを (A_n 型) 多次元超幾何級数という。:

$$ \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}u_1^{\beta_1}\cdots u_n^{\beta_n}\times(\text{q-shifted factorial の比}) \tag{2.7}$$

ここで $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbf{N}^n$ は多重指数、$|\beta|=\sum_{i=1}^n\beta_i$ はその長さ、そして

$$ \Delta(xq^\beta) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_iq^{\beta_i}-x_jq^{\beta_j})$$

は $xq^\beta=(x_1q^{\beta_1},\dots,x_nq^{\beta_n})$ の Vandermonde 行列式を表す。

もっとも、基本的な例としては、S.Milne[18] による多次元 (A_n 型) の q-二項定理が挙げられる。

Theorem 2.3. (A_n 型 q-二項定理 (S.C.Milne [18]))

$$ \frac{(a_1\cdots a_nu)_\infty}{(u)_\infty} = \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n}u^{|\beta|}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\beta_i}}{(qx_i/x_j)_{\beta_i}} \tag{2.8}$$

Remark 2.1. (2.8) は $n=1$ のとき、q-二項定理

$$ \frac{(au)_\infty}{(u)_\infty} = \sum_{k\in\mathbf{N}}u^k\frac{(a)_k}{(q)_k} \tag{2.9}$$

に帰着する。

以前の野海氏との Macdonald 多項式の行型の昇降演算子の共同研究 [12] で、作用素の正確な型を決定するために、この多次元 q-二項定理 (の特別な場合) が必要になった。そのときは、Milne 達の多次元超幾何級数の一連の研究についてはまったく知らなかったので、(2.8) の別証明を与えた。それが筆者が多次元超幾何級数の研究を始めるきっかけである。そのときの証明は次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ に対する Poincare 多項式の恒等式 (4 章の Macdonald 作用素を定数関数 1 に作用させたもの)

$$D_x(u)\cdot 1 = \sum_{K\subset[1,\ldots,n]}(-u)^{|K|}q^{\binom{|K|}{2}}\prod_{i\in K,j\notin K}\frac{1-qx_i/x_j}{1-x_i/x_j}=(u)_n \qquad (2.10)$$

に、これまた 4 章で説明する Multiple principal specialization を施して得られるというものであった。

3 多次元底つき超幾何級数に対する Euler 変換公式

ここで、この論説の主結果の一つである多次元超幾何級数に関する Euler 変換公式を提示する。

Theorem 3.1. (A 型多次元底付き超幾何級数に関する Euler 変換公式 [10]) *分母がつぶれないことを仮定する。このとき、次の多次元底つき超幾何級数に関する Euler 変換が成り立つ。*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n}u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}} \qquad (3.1)\\
&\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(b_kx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}\\
=&\frac{(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)_\infty}{(u)_\infty}\\
&\sum_{\delta\in\mathbf{N}^m}(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)^{|\delta|}\frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)}\\
&\prod_{1\le k,l\le m}\frac{((c/b_l)y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}}\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{((c/a_i)x_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}
\end{aligned}$$

特に $m=1$ のとき、多次元超幾何級数に関する Euler 変換公式 (3.1) の右辺は (一次元の) 一般化超幾何級数 ${}_{n+1}\phi_n$ 級数に帰着し、以下の様に表される。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n}u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(bx_i/x_n)_{\gamma_i}}{(cx_i/x_n)_{\gamma_i}} \qquad (3.2)\\
=&\frac{(a_1\cdots a_nbu/c)_\infty}{(u)_\infty}\\
&{}_{n+1}\phi_n\left[\begin{matrix}c/b,(c/a_1)x_1/x_n,\ldots,c/a_n\\ cx_1/x_n,\ldots,c\end{matrix};q,a_1\ldots a_nbu/c\right]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{1\le i\le N}\prod_{1\le k\le M}\frac{1}{1-z_i w_k}$$

から出発し、下で定義するMacdonald作用素の作用の対称性を用いて、有理関数の恒等式(タネの恒等式)(4.6)を導出までを実行しよう。

ここで、(Schur関数に作用する) Macdonaldのq-差分作用素(の特別な場合)を以下のように定義する。(以降はこれをMacdonald作用素と呼ぶ事にする。):

$x=(x_1,\cdots x_n)$に対して、

$$\begin{aligned} D_x(u) &:= \sum_{K\subset[1,\ldots,n]}(-u)^{|K|}q^{\binom{|K|}{2}}\prod_{i\in K,j\notin K}\frac{1-qx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{i\in K}T_{x_i,q} \qquad (4.1)\\ &= \frac{1}{\Delta(x)}\prod_{1\le i\le n}(1-uT_{x_i,q})\Delta(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-u)^k D_k(x),\end{aligned}$$

ここでT_{q,x_i}は変数x_iに対するq-差分作用素を表す。すなわち

$$T_{x_i,q}f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_iq,\ldots,x_n).$$

Schur関数$S_\lambda(x)$はD_k, $k=0,1,\cdots n$の同時固有関数である。すなわち

$$\begin{aligned} D_x(u)S_\lambda(x) &= \frac{1}{\Delta(x)}\prod_{1\le i\le n}(1-uT_{x_i,q})\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{i,j=1}^{n} \qquad (4.2)\\ &= S_\lambda(x)\prod_{i=1}^{n}(1-uq^{\lambda_i+n-i})\end{aligned}$$

ここで、$\Pi(z;w)$(2.2)へのz変数のMacdonald作用素$D_z(u)$の作用とw変数のMacdonald作用素$D_w(u)$の作用とを比較することにより、次の関係式を得る。

Proposition 4.1. **((双対性)Kirillov-Noumi[14], Mimachi-Noumi[17])**
$N\ge M$とする。そのとき

$$D_z(u)\prod(z;w)=(u)_{N-M}D_w(uq^{N-M})\prod(z;w). \qquad (4.3)$$

が成り立つ。

ここで、変数の組$z=(z_1,\ldots,z_N)$と$w=(w_1\ldots w_M)$に対して有理関数$F(u|z;w)$を

$$F(u|z;w)=\prod(z;w)^{-1}D_z(u)\prod(z;w) \qquad (4.4)$$

と定義する。$F(u|z;w)$を陽に書き下すと次のような表示を持つ。

$$F(u|z;w)=\sum_{K\subset[1,\ldots,N]}(-u)^{|K|}q^{\binom{|K|}{2}}\prod_{i\in K,j\notin K}\frac{1-qz_i/z_j}{1-z_i/z_j}\prod_{i\in K,1\le k\le M}\frac{1-z_iw_k}{1-qz_iw_k}. \qquad (4.5)$$

そのとき、(4.3)を関数$F(u|z;w)$を用いると次のように表される。これをタネの恒等式と呼ぶことにする。:

$$F(u|z;w)=(u)_{N-M}F(uq^{N-M}|w;z). \qquad (4.6)$$

なお、Andrews による一般化超幾何級数 ${}_{n+1}\phi_n$ と Appell-Lauricella の n 変数超幾何級数の底付き版 $\phi_D^{(n)}$ との間の変換公式を用いると、この場合の多次元底付き超幾何級数は、$\phi_D^{(n)}$ との変換公式も得られる事を付記しておく ([10] を参照のこと)。

Remark 3.1. さらに (3.2) において $n=1$(つまり (3.1) において $m=n=1$) の場合は、底つき超幾何級数 ${}_2\phi_1$ に対する Euler(第 3Heine) 変換 (2.5) に帰着する。

4 Cauchy 再生核から (多次元)Euler 変換へ

この章で、Cauchy 再生核から出発して多次元の底つき超幾何級数に関する Euler 変換公式 (3.1)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n} u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\\
&\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(b_kx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}\\
=\;&\frac{(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)_\infty}{(u)_\infty}\\
&\sum_{\delta\in\mathbf{N}^m}(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)^{|\delta|}\frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)}\\
&\prod_{1\le k,l\le m}\frac{((c/b_l)y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}}\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{((c/a_i)x_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}
\end{aligned}
$$

の導出を行う。[10] では Macdonald 多項式一般の場合での導出を行っているが、楕円超幾何級数の場合 [13] との対応を見易くするために、ここでは Schur 関数に付随する形に変更してある。(1 節の結論の有理関数の恒等式 (4.6) は同じになる。) 導出の手順は以下のとおり。

1. Cauchy 再生核に、(後で定義する)Macdonald の q-差分作用素を各変数 z,w に作用させ、その作用から関係式を導く。その関係式を、有理関数の恒等式として書き下す。

2. その有理関数の恒等式において、(後で導入する)multiple principal specialization という特殊化を行い、特殊な場合の (多重指数に関する有限和版の) 多次元 Euler 変換を導く。

3. 上で求めた特殊な場合の Euler 変換について、パラメータに関する解析接続を行う。

4.1 有理関数の恒等式の導出

この節では、先程の手順の第一段階、つまり Cauchy の再生核 (2.2)

$$\prod(z;w) \;:=\; \sum_{l(\lambda)\le\min(N,M)} S_\lambda(z)S_\lambda(w)$$

$$
\begin{aligned}
[1,2,\cdots,N] &\leftrightarrow \{(i,a); 1 \le i \le n, 0 \le a \le \alpha_i\} \\
K &\leftrightarrow \{(i,a); 1 \le i \le n, 0 \le a \le \gamma_i\}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

ここで γ_i は i 番目にいる部分集合 K の要素の個数を表す。
その上で次の補題を用意する。

Lemma 4.1.

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i\in K, j\notin K} \frac{qz_i - z_j}{z_i - z_j}\Big|_{z=p_\alpha(v;x)} = \prod_{i\in K, j\notin K} \frac{qz_i - z_j}{z_i - z_j}\Big|_{z=p_\alpha(1;x)} \\
&= (-q^{|\alpha|})^{|\gamma|} q^{-\binom{|\gamma|}{2}} \frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)} \prod_{1\le i,j\le n} \frac{(q^{-\alpha_j} x_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

が成り立ち、また

$$
\prod_{i\in K} \prod_{k=1}^{M} \frac{1 - z_i w_k}{1 - qz_i w_k}\Big|_{z=p_\alpha(1;x), w=p_\beta(q^{-1};y)} = q^{-|\beta||\gamma|} \prod_{1\le i\le n} \prod_{1\le k\le m} \frac{(q^{\beta_j} x_i y_j)_{\gamma_i}}{(x_i y_j)_{\gamma_i}} \tag{4.9}
$$

が成り立つ。

この補題は簡単な計算によって示すことが出来る。

この補題を用いると、(4.6) に先程の multiple principal specialization を施した姿は、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n, \gamma\le\alpha} (q^{|\alpha|-|\beta|}u)^{|\gamma|} \frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)} \\
&\prod_{1\le i,j\le n} \frac{(q^{-\alpha_j} x_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}} \prod_{1\le i\le n, 1\le k\le m} \frac{(q^{\beta_k} x_i y_k)_{\gamma_i}}{(x_i y_k)_{\gamma_i}} \\
&= (u)_{|\alpha|-|\beta|} \sum_{\delta\in\mathbf{N}^m, \delta\le\beta} (u)^{|\delta|} \frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)} \\
&\prod_{1\le k,l\le m} \frac{(q^{-\beta_l} y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}} \prod_{1\le i\le n, 1\le k\le m} \frac{(q^{\alpha_i} x_i y_k)_{\delta_k}}{(x_i y_k)_{\delta_k}}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

となる。この式が (3.1) の多重指数に関する有限和版である。
これで、章の最初に指し示した第2段階はおしまい。

あとは (4.10) において、$u \to uq^{|\beta|}$ と置き換え、適当に因子の移行をすると、(4.10) は $q^{\alpha_i}, (1 \le i \le n)$ と $q^{\beta_k}, (1 \le k \le m)$. の多項式の恒等式であることが分かるので、$\alpha_i$ や β_k は任意の複素数で成り立つことが分かる。最後に、パラメータのつけかえを行えば、(3.1) が得られる。

Remark 4.1. このタネの恒等式 (4.6) は有理関数の恒等式として、Macdonald 多項式一般の場合でこの双対性を書き下したものと一致する。実際 Kirillov-Noumi [14]、Mimachi-Noumi [17] でも [10] でも一般の場合で行っているが、最終的には (4.6) に到達する。

Remark 4.2. タネの恒等式の導出において、まず双対性 (4.3) を見付けるときは、Cauchy の再生核 (2.2) では Schur 関数で展開した表示、Macdonald 作用素 (4.1) では Vandermonde 行列式ではさんだ表示で見る。その後、再生核では因子分解の表示、Macdonald 作用素では、u の巾展開の表示を用いて書き下すと (4.6) が得られる。楕円関数に付随する Cauchy 行列式から出発する場合も手順としては同じ。(ただ、作用させる作用素はもっと単純なものを用意する。)

4.2 多次元超幾何級数へ

この節では、先程のタネの恒等式 (4.6) から、multiple principal specialization を行い、多次元 Euler 変換公式を導出する。

変数 $y=(y_1,\ldots,y_r)$ に対して、$|\alpha|=r$ である多重指数 α に付随する次のような特殊化 $p_\alpha(v;x)$ を考えよう。以降、この特殊化を multiple principal specialization ということにする。

$$
\begin{aligned}
y &= (y_1,\ldots,y_r)\to\\
p_\alpha(v;x) &= (-v/x_1,-v/x_1q,\ldots,-v/x_1q^{\alpha_1-1},\\
&\quad -v/x_2,\ldots,-v/x_2q^{\alpha_2-1}\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad -v/x_n,\ldots,-v/x_nq^{\alpha_n-1}).
\end{aligned}
$$

これからタネの恒等式 (4.6) において $\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=N$ そして $\beta\in\mathbb{N}^m, |\beta|=M$ なる多重指数に対応して $z\to p_\alpha(1;x)$ それから $w\to p_\beta(q^{-1};y)$ という特殊化をする。(例として下の図は $N=13,(\alpha_1,\alpha_2)=(7,6)$ の場合。丸印は部分集合 K の要素を表すことにする。)

○	○		○	○	○		○		○			○

ここで同じブロックの中で、$i\notin K, i+1\in K$ となっていると、$z_i=-v/x_jq^a, z_{i+1}=-v/x_jq^{a+1}$ なので、

$$
\frac{qz_i-z_{i+1}}{z_i-z_{i+1}}=0
$$

つまり、このような K の part は和に寄与しない。したがって、$K\subset[1,2,\cdots,p]$ は、「左詰め」でない限り寄与しない。和に寄与する部分集合 K に対応するものは、全ての i で $\gamma_i\leq\alpha_i$ を満たす多重指数でパラメトライズされる (先程の図の例で言うと下のようなもの)。

○	○	○	○	○			○	○	○			

対応を書き下すと次のとおり。

5 q-Pfaff-Saalschutz の和公式とその先

この章では、多次元超幾何級数に関する Euler 変換公式 (3.1) を形式的べき級数の恒等式と見做して、そのべきの係数に現れる恒等式について論じていく。

Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ に関する Euler 変換公式の変数の n 次の係数を比較することによって、(有限和かつ平衡的な ${}_3F_2$ 級数に関する) Pfaff-Saalschutz の公式が導かれる事はよく知られている。ここでは同様のことを (3.1) やその特別な場合を用いて行うことにより、もっと大きな自由度を持つ底付き超幾何変換公式や和公式、特に"very well-poised" と呼ばれるクラスの変換公式達も導出できるという著しい性質を持つことを見ていく。標語的に言うと、

この多次元底付き超幾何級数の Euler 変換公式 (3.1) は沢山の子持である。

と言えるだろう。

まず、以下の多次元超幾何級数に対する q-Pfaff-Saalschutz の公式は、Milne [20] によって知られていたが、実は、$m=1$ の場合の多次元超幾何級数に関する Euler 変換公式 (3.2) で u^l の係数を比較することにより、非常に簡単に得られる [10]。

Proposition 5.1. **(A_n 型 q-Pfaff-Saalschutz の和公式 (S.C.Milne:[20]))**

$$\sum_{|\gamma|\le l} q^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^{\gamma})}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}} \tag{5.1}$$

$$\prod_{1\le i\le n}\frac{(bx_i/x_n)_{\gamma_i}}{(cx_i/x_n)_{\gamma_i}}\frac{(q^{-l})_{|\gamma|}}{(a_1\cdots a_nbq^{1-l}/c)_{|\gamma|}}$$

$$= \frac{(c/b)_l}{(c/a_1\cdots a_nb)_l}\prod_{1\le i\le n}\frac{((c/a_i)x_i/x_n)_l}{(cx_i/x_n)_l}.$$

Remark 5.1. $n=1$ の場合は、有限和かつ平衡的な ${}_3\phi_2$ に関する Pfaff-Saalschutz の和公式になる。(Gasper-Rahman[7] の (1.7.2) 式)

$${}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,b,q^{-l}\\ c,q^{1-l}ab/c\end{matrix};q;q\right]=\frac{(c/a)_l(c/b)_l}{(c)_l(c/ab)_l}. \tag{5.2}$$

に帰着する。

いま、(3.1) の $m=1$ の場合である (3.2) を用いて、多次元の q-Pfaff-Saalschutz の和公式を導出したが、ここでは、一般の場合の (3.1) において同じことを行うと、何が現れるのであろうか？

それに答える前に、いくつか (特別なクラスの) 底つき超幾何級数の定義をしておこう。

5.1 多次元 Very-well-poised 底付き超幾何級数

${}_{r+1}\phi_r$ 級数 (2.6) において、パラメータが $a_0q=a_1c_1=\cdots=a_rc_r$ を満たしているとき、well-poised といい、さらに $a_1=q\sqrt{a_0}$ かつ $a_2=-q\sqrt{a_0}$ であるとき、very well-poised という。(この"very well-poised" にいい訳語はありませんか?) つまり、

very well-poised である ${}_{n+1}\phi_n$ 級数は以下のような型に表され、以降は ${}_{r+1}W_r$ と表すことにする。:

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_0, & q\sqrt{a_0}, & -q\sqrt{a_0}, & a_3, & \ldots, & a_r \\ & \sqrt{a_0}, & -\sqrt{a_0}, & a_0q/a_3, & \ldots, & a_0q/a_r \end{matrix}; q, u\right] \qquad (5.3)\\
= &\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{1-a_0q^{2k}}{1-a_0} \frac{(a_0)_k(a_3)_k\cdots(a_r)_k}{(q)_k(a_0q/a_3)_k\cdots(a_0q/a_r)_k} u^k \\
:= &\ {}_{r+1}W_r\,[a_0; a_3, \ldots, a_r; q; u]
\end{aligned}
$$

${}_{r+1}W_r$ 級数の場合の平衡条件は

$$
a_3\cdots a_r = a_0^{\frac{r-3}{2}} q^{\frac{r-5}{2}} \qquad (5.4)
$$

である。以降で、論じていくように、パラメータの自由度の大きい級数に関しても変換公式、和公式が存在するなど、この"very well-poised" な(底つき)超幾何級数に関しては、いくつか特殊によい性質を持つことが知られている(Andrews-Askey-Roy[1],Bailey[3],Gasper-Rahman[7], Slater[25] 等も参照のこと)。ここで、$a_3, \cdots, a_r$ に関して対称であることに注意しよう。

次に、very well-poised 底つき超幾何級数の多次元版(のひとつ)として、以下の $W^{n,m}$ 級数を定義する。

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m}\left(\begin{matrix}\{a_i\}_n \\ \{x_i\}_n\end{matrix} \middle|\, s; \{u_k\}_m; \{v_k\}_m; z\right) \qquad (5.5)\\
:= &\sum_{\gamma\in\mathbf{N}^n} z^{|\gamma|} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)} \prod_{1\le i\le n} \frac{1-q^{|\gamma|+\gamma_i}sx_i/x_n}{1-sx_i/x_n} \\
&\prod_{1\le j\le n} \frac{(sx_j/x_n)_{|\gamma|}}{((sq/a_j)x_j/x_n)_{|\gamma|}} \left(\prod_{1\le i\le n} \frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\right) \\
&\prod_{1\le k\le m} \frac{(v_k)_{|\gamma|}}{(sq/u_k)_{|\gamma|}} \left(\prod_{1\le i\le n} \frac{(u_kx_i/x_n)_{\gamma_i}}{((sq/v_k)x_i/x_n)_{\gamma_i}}\right)
\end{aligned}
$$

ここで $\{u_i\}_n$ は $u_1, \ldots, u_n$ がこの順で並んでいることを意味する。

この級数は、

$$
\frac{(ux_1/x_n)_{\gamma_1}\cdots(ux_{n-1}/x_n)_{\gamma_{n-1}}\cdot(u)_{\gamma_n}}{(sq/u)_{|\gamma|}}, \qquad (5.6)
$$

$$
\frac{(v)_{|\gamma|}}{((sq/v)x_1/x_n)_{\gamma_1}\cdots((sq/v)x_{n-1}/x_n)_{\gamma_{n-1}}\cdot(sq/v)_{\gamma_n}}
$$

のような項が含まれているという意味で、well-poised と思うことが出来る。"very" とつくのは、

$$
\prod_{1\le i\le n} \frac{1-q^{|\gamma|+\gamma_i}sx_i/x_n}{1-sx_i/x_n} \qquad (5.7)
$$

の項があるから。また $n=1$ のとき、$W^{1,m}$ は ${}_{2m+4}W_{2m+3}$ 級数に帰着する。また、ここまでで現れてきた多次元超幾何級数に関して、和をとる範囲を多重指数の長さが N のものだけをとることに制限すると、この $W^{n,m}$ 級数で表せることを注意しておく。

5.2 A_n 型 q-二項定理と多次元 Rogers${}_6W_5$ 和公式

ここで、本論に向かう前にちょっと寄り道をしてみよう。多次元二項定理 (2.8) において、$n \to n+1$ とつけかえたもの

$$\frac{(b_1 \cdots b_{n+1}u)_\infty}{(u)_\infty} = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{n+1}} (u)^{|\beta|} \frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)} \prod_{1 \le i,j \le n+1} \frac{(b_j x_i/x_j)_{\beta_i}}{(qx_i/x_j)_{\beta_i}}.$$

において、左辺を1次元の二項展開を行い、そのうえで u^N の巾係数を比較する。最後に適当にパラメータのつけかえを行うと、以下の Rogers の ${}_6W_5$ の和公式の多次元版 (Milne[18])

$$\begin{aligned} &\frac{(aq/b_1 \cdots b_n c)_N}{(aq/c)_N} \prod_{1 \le i \le n} \frac{(aqx_i/x_n)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n)_N} \\ &= W^{n,1}\left(\begin{matrix} \{b_i\}_n \\ \{x_i\}_n \end{matrix} \middle| a; c; q^{-N}; \frac{aq^{1+N}}{b_1 \cdots b_n c} \right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

が得られる。

Remark 5.2. $n=1$ のときは、上の和公式は Rogers の有限和の ${}_6W_5$ 級数の和公式

$${}_6W_5\left[a; b, c, q^{-N}; q; \frac{aq^{1+N}}{bc}\right] = \frac{(aq/bc)_N}{(aq/c)_N} \frac{(aq)_N}{(aq/b)_N}. \tag{5.9}$$

に帰着する。

5.3 双対変換公式

さて、ここで本題に戻ろう。多次元底つき超幾何級数に関する Euler 変換公式の一般型 (3.1) において、$m \to m+1$ と取り換えた後、u^N の係数を比較することによって、次の変換公式を得る。そして、これを双対変換公式 (duality transformation formula) と呼ぶことにする。:

Proposition 5.2. (*A* 型多次元底付き超幾何級数に関する双対変換公式 [10])

$$\begin{aligned} &W^{m,n+1}\left(\begin{matrix} \{b_k\}_m \\ \{y_k\}_m \end{matrix} \middle| a; c, \{d_i x_i/x_n\}_n; q^{-N}, \{ex_n/x_i\}_n; \frac{a^{n+1}q^{N+n+1}}{BcDe^n} \right) \qquad (5.10) \\ &= \frac{(a^{n+1}q^{n+1}/b_1 \cdots b_m c d_1 \cdots d_n e^n)_N}{(aq/c)_N} \\ &\quad \prod_{1 \le k \le m} \frac{(aqy_k/y_m)_N}{((aq/b_k)y_k/y_m)_N} \prod_{1 \le i \le n} \frac{(ex_n/x_i)_N}{((aq/d_i)x_n/x_i)_N} \\ &\quad \sum_{\gamma \in \mathbf{N}^n, |\gamma| \le N} q^{|\gamma|} \frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)} \prod_{1 \le i,j \le n} \frac{((aq/d_j e)x_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}} \\ &\quad \prod_{1 \le i \le n, 1 \le k \le m} \frac{((aq/b_k e)x_i y_k/x_n y_m)_{\gamma_i}}{((aq/e)x_i y_k/x_n y_m)_{\gamma_i}} \prod_{1 \le i \le n} \frac{((aq/ce)x_i/x_n)_{\gamma_i}}{(q^{1-N}e^{-1}x_i/x_n)_{\gamma_i}} \end{aligned}$$

$$\frac{(q^{-N})_{|\gamma|}}{(a^{n+1}q^{n+1}/BcDe^n)_{|\gamma|}}$$

ここで $B=b_1\cdots b_m$ であり、$D=d_1\cdots d_n$ である。

Remark 5.3. [10] では、(5.10) は Watson 型変換公式と呼んでいた。この「双対変換公式」の命名者は筆者の院生時代の指導教官であり共同研究者でもある、野海正俊先生である。[13] では次節に紹介する多次元楕円超幾何級数に対する平衡的双対変換公式のことを単に「双対変換公式」と呼んでいるが底付き超幾何級数の場合には、こちらも双対性を通じて得られるものなので、こう呼び名を改めることにする。$m=n=1$ のとき、(5.10) は次の底つき超幾何級数の変換公式に帰着する。:

$$\begin{aligned}
&{}_8W_7\left[a;b,c,d,e,q^{-N};q;\frac{a^2q^{N+2}}{bcde}\right] \qquad (5.11)\\
&= \frac{(a^2q^2/bcde)_N(e)_N(aq)_N}{(aq/b)_N(aq/c)_N(aq/d)_N}\,{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-N},aq/be,aq/ce,aq/de\\ q^{1-N}/e,a^2q^2/bcde,aq/e\end{matrix};q;q\right]
\end{aligned}$$

級数の型が、同じ Watson 変換公式 [7]

$$\begin{aligned}
&{}_8W_7\left[a;b,c,d,e,q^{-N};q,\frac{a^2q^{2+N}}{bcde}\right] \qquad (5.12)\\
&= \frac{(aq)_N(aq/de)_N}{(aq/d)_N(aq/e)_N}\,{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-N},d,e,aq/bc\\ aq/b,aq/c,deq^{-N}/a\end{matrix};q,q\right]
\end{aligned}$$

とよく似ているが、パラメータの変換の様子が異なる。しかし、一次元の双対変換公式の右辺の ${}_4\phi_3$ 級数において、Sears 変換 [7]

$$\begin{aligned}
&{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-N},a,b,c\\ d,e,f\end{matrix};q,q\right] \qquad (5.13)\\
&= a^N\frac{(e/a)_N(f/a)_N}{(e)_N(f)_N}\,{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-N},a,d/b,d/c\\ d,aq^{1-N}/e,aq^{1-N}/f\end{matrix};q,q\right], \quad (abc=defq^{N-1})
\end{aligned}$$

をうまく施すと Watson 変換が得られる。

Remark 5.4. ここで、紹介した双対変換公式、並びに次節で紹介するその平衡版については Rosengren [22] によっても再現されている。そこでは、これ等の結果が彼によって導出された A 型 Karlsson-Minton 型の帰着公式の応用として導かれた。

5.4 平衡的双対変換公式

$a_1\cdots a_nb_1\cdots b_m=c^m$ のとき、多次元 Euler 変換公式は

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n}u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}} \qquad (5.14)\\
&\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(b_kx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}\\
&= \sum_{\delta\in\mathbb{N}^m}(u)^{|\delta|}\frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)}
\end{aligned}$$

$$\prod_{1\le k,l\le m}\frac{((c/b_l)y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}}\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{((c/a_i)x_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}$$

となり、q-shifted factorial の (通常の超幾何級数に対する Euler 変換で言うと巾関数の) 項がなくなってしまう。$m=n=1$ のとき、この式 (5.14) は、両辺がまったく同じ級数になってしまい、意味がなくなる。しかし、それ以外の場合にやはり u^N の係数比較を行うと、平衡条件をみたす非自明でなおかつ美しい多次元超幾何変換公式が得られる。

Remark 5.5. multiple principal specialization を施す前のタネの恒等式 (4.6) のレベルで言うと、$N=M$ つまり用意しておく 2 組の変数の数が一致している場合に対応する。(Cauchy 行列式から出発する場合はこの場合である。) 楕円超幾何級数 [13] の場合は、出発点が Cauchy 行列式からなのと、(和をとる多重指数のレベルで) 無限和の収束条件が未だ明らかになっていないのが現状なので、この節の結果と次節で紹介する平衡的双対変換公式を用いた楕円超幾何級数に対する Bailey の ${}_{10}E_9$ 変換公式の多次元版のみが、ここでの結果と並行して得られている。

Proposition 5.3. **(平衡的双対変換公式** [10]**)** $a_1\cdots a_nb_1\cdots b_m=c^m$ のとき

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n,|\gamma|=N}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\\&\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(b_kx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}\\=&\sum_{\delta\in\mathbb{N}^m,|\delta|=N}\frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)}\prod_{1\le k,l\le m}\frac{((c/b_l)y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}}\\&\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{((c/a_i)x_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

が成り立つ。

ただし、この式自身は自明なものである。これから、先程までと同じように $W^{n,m}$ 級数で表すとどうなるのかをみていこう。

まず、$m=1$ とする。その上で、$n\to n+1$ と書き換えたうえで $W^{n,2}$ 級数で表せる型で書き直した後、適当にパラメータを付け換えると以下のような和公式に帰着する。:

Corollary 5.1. **(A_n 型 ${}_8W_7$Jackson の和公式)**
$a^2q^{N+1}=b_1\cdots b_ncde$ のとき、

$$\begin{aligned}&W^{n,2}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_n\\\{x_i\}_n\end{matrix}\,\middle|\,a;c,e;q^{-N},d;q\right)\\=&\frac{(aq/b_1\cdots b_nc)_N}{(aq/b_1\cdots b_ncd)_N}\frac{(aq/cd)_N}{(aq/c)_N}\\&\prod_{1\le i\le n}\frac{((aq/b_id)x_i/x_n)_N(aqx_i/x_n)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n)_N((aq/d)x_i/x_n)_N}\end{aligned}\tag{5.16}$$

が成り立つ。

Remark 5.6. この多次元 Jackson 和公式は既に S.C.Milne によって知られている ([21] を参照のこと)。また $n=1$ のとき、(5.16) は、平衡的かつ有限和の ${}_8W_7$ 級数に対する Jackson の和公式 (Gasper-Rahman [7] 等を参照のこと)

$$
\begin{aligned}
&{}_8W_7\left[a;b,c,d,e,q^{-N};q;q\right] &&(5.17)\\
=\ &\frac{(aq)_N(aq/bc)_N(aq/bd)_N(aq/cd)_N}{(aq/b)_N(aq/c)_N(aq/d)_N(aq/bcd)_N}, && a^2q^{N+1}=bcde
\end{aligned}
$$

に帰着する。

$m,n\geq 2$ のときは、双対変換公式の導出と同じ手順で次のような多次元 ${}_{10}W_9$ 級数に関する変換公式が得られる。:

Corollary 5.2. (A 型 ${}_{10}W_9$ 変換公式 [10])

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m+2}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_n\\ \{x_i\}_n\end{matrix}\ \middle|\ a;\{c_ky_k/y_m\}_m,d,e;\{fy_m/y_k\}_m,\mu fq^N,q^{-N};q\right) \quad (5.18)\\
=\ &\frac{(\mu df/a)_N(\mu ef/a)_N}{(aq/d)_N(aq/e)_N}\prod_{1\leq k\leq m}\frac{((\mu c_kf/a)y_k/y_m)_N(fy_m/y_k)_N}{(\mu qy_k/y_m)_N((aq/c_k)y_m/y_k)_N}\\
&\prod_{1\leq i\leq n}\frac{(aqx_i/x_n)_N((\mu b_if/a)x_n/x_i)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n)_N((\mu f/a)x_n/x_i)_N}\\
&W^{m,n+2}\left(\begin{matrix}\{aq/c_kf\}_m\\ \{y_k\}_m\end{matrix}\ \middle|\ \mu;\{(aq/b_if)x_i\}_n,aq/df,aq/ef;\{(\mu f/a)/x_i\}_n,\mu fq^N,q^{-N};q\right)
\end{aligned}
$$

ここで $\mu=a^{m+2}q^{m+1}/BCdef^{m+1}$ である。

$m=1$ のとき、(5.18) の右辺は ${}_{2n+8}W_{2n+7}$ 級数で表せ次のようになる。:

$$
\begin{aligned}
&W^{n,3}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_n\\ \{x_i\}_n\end{matrix}\ \middle|\ a;c,d,e;f,\mu fq^N,q^{-N};q\right) \quad (5.19)\\
=\ &\frac{(\mu df/a)_N(\mu ef/a)_N}{(aq/d)_N(aq/e)_N}\frac{(\mu cf/a)_N(f)_N}{(\mu q)_N(aq/c)_N}\\
&\prod_{1\leq i\leq n}\frac{(aqx_i/x_n)_N((\mu b_if/a)x_n/x_i)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n)_N((\mu f/a)x_n/x_i)_N}\\
&{}_{2n+8}W_{2n+7}\left[\mu;\{(aq/b_if)x_i\}_n,aq/cf,aq/df,aq/ef,\right.\\
&\qquad\left.\{(\mu f/a)x_n/x_i\}_n,\mu fq^N,q^{-N};q;q\right],\\
&(\mu=a^3q^2/Bcdef^2)
\end{aligned}
$$

Remark 5.7. [10] では、(5.15) を Bailey-Jackson 型変換-和公式、(5.18) を Bailey 型変換公式と呼んでいた。$m=n=1$ のとき、(5.18) は以下の ${}_{10}W_9$ 級数の変換公式に帰着する。:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(aq/b)_N(aq/c)_N(aq/d)_N(aq/e)_N(\mu q)_N(\mu f/a)_N}{(\mu bf/a)_N(\mu cf/a)_N(\mu df/a)_N(\mu ef/a)_N(aq)_N(f)_N} \quad (5.20)\\
&{}_{10}W_9\left[a;b,c,d,e,f,\mu fq^N,q^{-N};q;q\right]\\
=\ &{}_{10}W_9\left[\mu;aq/bf,aq/cf,aq/df,aq/ef,\mu f/a,\mu fq^N,q^{-N};q;q\right]
\end{aligned}
$$

$(\mu = a^3q^2/bcdef^2)$

先程の双対変換公式同様、古典的に知られている Bailey の ${}_{10}W_9$ 級数の変換公式 (Gasper-Rahman [7] 等を参照のこと)

$$\begin{aligned} & {}_{10}W_9\left[a; b, c, d, e, f, \lambda aq^{N+1}/ef, q^{-N}; q; q\right] \qquad (5.21)\\ = & \frac{(aq)_N(aq/ef)_N(\lambda q/e)_N(\lambda q/f)_N}{(aq/e)_N(aq/f)_N(\lambda q)_N(\lambda q/ef)_N} \\ & {}_{10}W_9\left[\lambda; \lambda b/a, \lambda c/a, \lambda d/a, e, f, \lambda aq^{N+1}/ef, q^{-N}; q; q\right] \\ & (\lambda = a^2q/bcd) \end{aligned}$$

と級数の型、平衡条件は同じなのだが変換の様子は異なる。しかし、(5.20) と (5.21) はお互いに一方の変換をうまく組み合わせて 2 回繰り返すと他方が得られると言う関係になっている。

5.5 多次元 Bailey 変換の導出

最後に、平衡的双対変換の $m = 1$ の場合を用いて先程の Bailey の ${}_{10}W_9$ 変換 (5.21) の多次元版が二通り作れる事を報告して、この論説を閉じる。(この部分は底付き超幾何級数の場合も野海氏との共同研究 [13] で初めて得られた結果である。)

平衡的双対変換の $m = 1$ の場合 (5.19) は $W^{n,3}$ 級数から $W^{1,n+2} \propto {}_{2n+8}W_{2n+7}$; への変換であった。その右辺の ${}_{2n+8}W_{2n+7}(s; u_1, \ldots, u_{2n+5})$ 級数は $2n+5$ 個のパラメータ $u_1, \ldots, u_{2n+5}$ に関して対称であることに注意しよう。その対称性を利用して、$u_1, \ldots, u_{2n+5}$ の変換の役割をうまく入れ換えた後、もう一度 (5.19) を施すと、2 通りの多次元 Bailey${}_{10}W_9$ 変換が得られる。その設計図は以下のとおり。なお、縦の矢印は $m = 1$ の場合の平衡的双対変換公式 (5.19) を表す。:

$$\begin{array}{ccc} W^{n,3} & \xrightarrow{\text{Bailey}} & W^{n,3} \\ \downarrow & & \uparrow \\ {}_{2n+8}W_{2n+7} & \xrightarrow{\text{Symmetry}} & {}_{2n+8}W_{2n+7} \end{array} \qquad (5.22)$$

こうして、$W^{n,3}$ 級数に関する多次元 Bailey 変換が 2 通り得られる。:

Proposition 5.4. **(Multiple Bailey transformation I (Milne-Newcomb))**

$$\begin{aligned} & W^{n,3}\left(\begin{matrix}\{e_i\}_n\\ \{x_i\}_n\end{matrix} \,\middle|\, a; d, f, a\lambda q^{1+N}/e_1\cdots e_nf; q^{-N}, b, c; q\right) \qquad (5.23)\\ = & \frac{(aq/e_1\cdots e_nf)_N(\lambda q/f)_N}{(aq/f)_N(\lambda q/e_1\cdots e_nf)_N} \prod_{1\le i\le n} \frac{(aqx_i)_N((\lambda q/e_i)x_i)_N}{((aq/e_i)x_i)_N(\lambda qx_i)_N} \\ & W^{n,3}\left(\begin{matrix}\{e_i\}_n\\ \{x_i\}_n\end{matrix} \,\middle|\, \lambda; aq/bc, f, a\lambda q^{1+N}/e_1\cdots e_n; q^{-N}, aq/cd, aq/bd; q\right) \end{aligned}$$

ここで $\lambda = a^2q/bcd$。

Proposition 5.5. (Multiple Bailey transformation II (M.Noumi-Y.K))

$$W^{n,3}\left(\begin{matrix}\{e_i\}_n \\ \{x_i\}_n\end{matrix} \middle| a; b, c, d; q^{-N}, f, a\lambda q^{1+N}/e_1\cdots e_n f; q\right) \tag{5.24}$$
$$= \prod_{1\le i\le n} \frac{(aqx_i)_N((aq/e_if)x_i)_N((\lambda q/e_i)z_i)_N((\lambda q/f)z_i)_N}{((aq/e_i)x_i)_N((aq/f)x_i)_N(\lambda qz_i)_N((\lambda q/e_if)z_i)_N}$$
$$W^{n,3}\left(\begin{matrix}\{e_i\}_n \\ \{z_i\}_n\end{matrix} \middle| \lambda; aq/cd, aq/bd, aq/bc; q^{-N}, f, a\lambda q^{1+N}/e_1\cdots e_n f; q\right)$$

ここで $\lambda = a^2q/bcd$ で $z_i = e_i/e_1\cdots e_n x_i$ である。

Remark 5.8. (5.23) は、すでに Milne-Newcomb によって知られている (Milne [21] を参照のこと)。また、(5.23) も (5.24) も $n = 1$ のときは Bailey の ${}_{10}W_9$ 変換公式 (5.21) に帰着する。

最後に

ここで紹介した以外にも [10] で、Sears 変換 (5.13) をはじめ ([11] も参照下さい) いくつかの多次元超幾何級数に関する変換公式、和公式が見つかっています。興味のある方は是非 [10]、[11]、そして Kajihara-Noumi [13] を御覧下さい。さらに、ここで紹介した双対変換、平衡的双対変換から派生するさらなる多次元超幾何変換公式については現在準備中です。

References

[1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions.* Cambridge University Press, 1999.

[2] W.N. Bailey: *Some identities involving generalized hypergeometric series.* Proc. London Math. Soc. (2), **29**(1929), 503–516.

[3] W.N. Bailey: *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No.32, Cambridge University Press, 1935.

[4] J.D. Fay: *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math. **352**, Springer-Verlag, 1973.

[5] I.B. Frenkel and V.G. Turaev: *Elliptic solution of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions.* in *The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars*, pp.171–204, Birkhäuser, 1997.

[6] G. Frobenius: *Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art.* J. für die reine und angew. Math. **93**(1882), 53–68.

[7] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, (G.C.Rota, ed.), vol. 35, Cambridge Univ. press, Cambridge, 1990.

[8] W. J. Holman, *Summation theorems for hypergeometric series in $U(n)$.* SIAM J. Math Anal. **11**(1980), pp523–532.

[9] W. J. Holman, L.C, Biedenharn, J.D.Louck, *On hypergeometric series well-poised in $SU(n)$*. SIAM J. Math Anal. 7(1976), pp529–541.

[10] Y. Kajihara: *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications.* to appear in Adv. Math.

[11] Y. Kajihara, *Some remarks on multiple Sears transformations.* Contemp. Math. **291** (2001), 139–145.

[12] Y. Kajihara, M. Noumi,: *Raising operators of row type for Macdonald polynomials.* Compositio Math. **120** (2000), 119–136.

[13] Y. Kajihara, M. Noumi,: *Multiple elliptic hypergeometric series – An approach from the Cauchy determinant –.* Indag. Math. New Ser. **14**, 395–421.

[14] A.N. Kirillov and M. Noumi, *q-difference raising operators for Macdonald Polynomials and the integrality of transition coefficients.* in "Algebraic Methods and q-Special functions", CRM Proceedings and Lecture Notes **22** (1999), 227–243.

[15] I.G. Macdonald, *The Poincare series of a Coxeter group.* Math. Ann. **199**, 161–174

[16] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition.* Oxford Univ. Press,(1995).

[17] K. Mimachi, M. Noumi, *An integral representation of eigenfunction for Macdonald's q-difference operators.* Tohoku Math. J. **91**, (1997), 517–525.

[18] S.C. Milne. *An elementary proof of Macdonald identities for $A_l^{(1)}$.* Adv. in Math. **57**, (1985), 34–70.

[19] S.C. Milne, *A q-analogue of hypergeometric series well-poised in $SU(n)$ and invariant G-functions.*Adv. in Math. **58** (1985), 1–60.

[20] S.C. Milne. *Balanced ${}_3\phi_2$ summation formulas for $U(n)$ basic hypergeometric series.* Adv. in Math. **131**, (1997), 93–187.

[21] S.C. Milne, *Transformations of $U(n+1)$ multiple basic hypergeometric series.* in "Physics and combinatorics 1999 (Nagoya)", 201–243, World Sci. publishing, River Edge, NJ, 2001.

[22] H. Rosengren, *Reduction formula for Karlsson-Minton type hypergeometric series.* to appear in Constr. Approx.

[23] H. Rosengren, *Elliptic hypergeometric series on root systems.* to appear in Adv. Math.

[24] H. Rosengren, M. Schlosser, *Summations and transformations for multiple basic and elliptic hypergeometric series by determinant evaluations.* Indag. Math. New Ser. **14**, 481–513.

[25] L.J. Slater, *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge University Press, 1966.

[26] S.O. Warnaar, *Summation and transformation formulas for elliptic hypergeometric series.* Constr. Approx. 18(2002), 479–502.

[27] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition Cambridge University Press, 1927.

560-0043 豊中市待兼山 1-1 大阪大学理学研究科数学専攻

e-mail: kaji@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp