数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 101-108

保型 L 関数の d-aspect について

慶應義塾大学 理工学部 数理科学科 上西 千春 (Chiharu Kaminishi)
Department of Mathematics, Keio University

1 凸評価と aspect

本稿の目的は, 判別式 d の虚 2 次体で定義される Bianchi group に対する保型 L 関数の d-aspect の凸評価を求めることである. 本節では凸評価と aspect について説明する.

Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ やそれに類似した L 関数 $L(s,f)$ の $\Re(s)=1/2$ 上での値の評価を考える問題がある. ここでは L 関数の臨界線が $\Re(s)=1/2$ であるように, (すなわち関数等式が s と $1-s$ の間で成り立つように) L 関数が正規化されているものとする. L 関数の収束域における評価と関数等式を用いることにより, 臨界領域 $0\leq\Re(s)\leq 1$ 以外の部分における評価はよくわかる. 臨界領域内において良い評価を得ることは一般に困難であるが, Phragmén-Lindelöf の凸定理を用いて荒い評価を得ることができる. これを凸評価と呼ぶことにする. 以下に凸評価の例を挙げる.

例 1 Riemann zeta 関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

の 凸評価は

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O\left(t^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right),\quad \forall\epsilon>0,\quad t\to\infty.$$

例 2 合同部分群 $\Gamma_0(N), N\in\mathbb{N}$ に対する 2 次元上半平面 $\mathbb{H}^2$ 上の正則な Hecke eigen cusp form $f_N(z)$ の L 関数

$$L(s,f_N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_N(n)}{n^s}$$

(ここで $\lambda_N(n)$ は Hecke 作用素に対する $f_N(z)$ の固有値.) の $\Re(s)=1/2$ 上の N- aspect の凸評価は

$$L\left(\frac{1}{2}+it,f_N\right)=O_{\epsilon,t}\left(N^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right),\quad \forall\epsilon>0,\quad N\to\infty.$$

例2のように, N 以外の変数による値を定数とみなし, $N \to \infty$ の振る舞いのみに注目するという意味を込めた変数 N に関する評価のことを N-aspect という. このほか, Dirichlet L 関数で指標の導手を動かす q-aspect , 保型 L 関数で保型形式の重さを動かす k-aspect , Maass form の L 関数でラプラシアンの固有値を動かす r-aspect などがこれまでに研究されている.

本稿では, L 関数の評価に関する新たな aspect として虚2次体 K の判別式 $d < 0$, $d \neq -3, -4$ を動かす 'd-aspect' を提唱する. 評価の対象となる L 関数は, K の整数環 $\mathcal{O}_d$ 上の Bianchi group $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ に対する Maass form $\phi_{d,r}(\omega)$ の L 関数 $L(s, \phi_{d,r})$ であり, 以下のような d-aspect の凸評価を得ることができた. (注1)

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \phi_{d,r}\right) = O_{\epsilon,t,r}\left(|d|^{\frac{1}{2}+\epsilon h(d)}\right), \quad \forall\epsilon > 0, \quad |d| \to \infty. \tag{1}$$

ここで $h(d)$ は K の類数である. また同様に t-aspect, r-aspect も得ることができる. (注2)

次節より表記が煩雑にならないように添え字を省略して $\phi_{d,r} = \phi$ と書くことにする.

2 Maass form と L 関数の定義

本節では, 本稿で扱う Hecke eigen even Maass cusp form と L 関数の定義を説明する.

$\mathbb{H}^3$ を 3 次元上半空間

$$\mathbb{H}^3 = \{\omega = (y, z) \mid y > 0\ ,\ z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}\}$$

とすると $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ は $\mathbb{H}^3$ に一次分数変換で離散的に作用する. 商空間 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 上のラプラシアン

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}$$

は $L^2\left(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3\right)$ 上に自己共役拡張を持ち, Δ の固有値 $1 + r^2$ は正の実数となる. この固有値 $1 + r^2$ に対する固有関数を Maass form $\phi(\omega)$ といい, さらに全ての cusp $\mathfrak{a}_n$ $(1 \le n \le h(d), \mathfrak{a}_1 = \infty)$ に対して $\phi(\mathfrak{a}_n) = 0$ であるとき,

ϕをMaass cusp formという. Maass cusp formの集合を$\mathcal{S}(\Gamma, r)$とおく. [7] (1) 式より $\phi \in \mathcal{S}(\Gamma, r)$ のcusp ∞ での Fourier 展開は以下のように表される.

$$\phi(\omega) = \sum_{0 \neq \nu \in \mathcal{O}_d} c(\nu) y K_{ir}\left(2\pi\left|\frac{2\nu}{\sqrt{d}}\right|y\right) e\left(\Re\left(\overline{\frac{2\nu}{\sqrt{d}}}z\right)\right).$$

ここで$K_{ir}(z)$はK-Bessel functionである.

ιを$\mathbb{H}^3$上の作用素$\iota(y, z) = (y, -z)$とする. $\phi \in \mathcal{S}(\Gamma, r)$に対して$\phi \circ \iota \in \mathcal{S}(\Gamma, r)$である. $\iota^2 = 1$より固有値は± 1であり, $\phi \circ \iota = \phi$のとき, ϕをevenといい, $c(\nu) = c(-\nu)$が成り立つ. また$\phi \circ \iota = -\phi$のときϕをoddといい, $c(\nu) = -c(-\nu)$が成り立つ.

Hecke作用素$T(\nu): L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3) \to L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3)$ を以下のように定義する:

$$T(\nu)\phi(\omega) = \frac{1}{|\nu|} \sum_{\substack{\alpha\delta = \nu \\ \Re(\delta) > 0}} \sum_{\beta \bmod \delta} \phi\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ * & \delta \end{pmatrix} \cdot \omega\right).$$

$\mathcal{S}(\Gamma, r)$には, 全てのHecke 作用素の同時固有関数からなる基底が存在し, これらを Hecke eigen Maass cusp form という. $T(\nu)$ に対する $\phi(\omega)$ の固有値を $\lambda(\nu)$ とする. 即ち,

$$T(\nu)\phi = \lambda(\nu)\phi.$$

また, Hecke 作用素の性質から以下が成り立つ.

$$c(\nu) = c(1)\lambda(\bar{\nu}). \tag{2}$$

この性質より$c(1) \neq 0$であることがわかる. 以降では, $d \neq -3, -4$に関する Hecke eigen even Maass cusp form ϕについて扱う.

任意のϕに対して保型L関数を以下のように定義する:

$$L(s, \phi) = \sum_{0 \neq (\nu) \in \mathcal{O}_d} \frac{\lambda(\nu)}{N(\nu)^s}.$$

ここで$N(\nu)$はνのノルムである. この定義はϕがevenのときwell-definedとなる.

3 主定理

本節では前節で定義した保型 L 関数の d-aspect の凸評価を求める.

定理 3.1

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\phi\right)=O_{\epsilon,t,r}\left(|d|^{\frac{1}{2}+\epsilon h(d)}\right)\quad,\forall\epsilon>0.$$

[定理 3.1 の証明] まず Rankin-Selberg method を用いて $\lambda(\nu)$ の平均的な評価を得る.

補題 3.2 任意の $X>0$ に対し

$$\sum_{N(\nu)\leq X}|\lambda(\nu)|^2\ll_{\epsilon,r}|d|^{\epsilon h(d)}X,\quad\forall\epsilon>0.$$

ここで $X\ll_\epsilon Y$ とは, ϵ による定数 $C(\epsilon)$ が存在し, $|X|\leq C(\epsilon)Y$ が成り立つことを意味する.

補題 3.2 より $L(s,\phi)$ は $\Re(s)>1$ において絶対収束し, 以下の評価が得られる.

$$L(1+\epsilon+it.\phi)\ll_{\epsilon,r}|d|^{\epsilon h(d)},\quad\forall\epsilon>0. \tag{3}$$

次に $L(s,\phi)$ の関数等式を explicit に書き下す.

補題 3.3 完備 L 関数を以下のように定める:

$$\Lambda(s,\phi)=(2\pi)^{-2s}|d|^s\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}\right)L(s,\phi).$$

このとき $L(s,\phi)$ は全複素平面上に解析接続され, 以下の関数等式が成り立つ.

$$\Lambda(1-s,\phi)=\Lambda(s,\phi).$$

補題 3.3 より

$$|L(s,\phi)|=\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2\pi}\right)^{2-4\sigma}\left|\frac{\Gamma\left(1-s+\frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(1-s-\frac{ir}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}\right)}\right||L(1-s,\phi)|$$

であるから, (3) 式を適用して

$$L(-\epsilon+it,\phi) \ll_{\epsilon,t,r} \left(\sqrt{|d|}\right)^{2+4\epsilon} |d|^{\epsilon h(d)}, \quad \forall\epsilon>0.$$

よって 再び (3) 式と併せて, Phragmén-Lindelöf の凸定理 ([6]Theorem2) より臨界帯 $0 \le \sigma = \Re(s) \le 1$ での評価を得る.

$$L(\sigma+it,\phi) \ll_{\epsilon,t,r} |d|^{1+\epsilon-\sigma+\epsilon h(d)}, \quad \forall\epsilon>0.$$

よって $\sigma=1/2$ を代入し定理 3.1 が成り立つ. □

4 補題 3.2 の証明

本節では補題 3.2 の証明の概要を述べる. 証明の方針は Iwaniec[2]Theorem 8.3 と同様である.

cusp $\mathfrak{a}_n$ に対する Fourier 係数を $c_{\mathfrak{a}_n}(\nu)$ とおき, 以下のように normalize しておく.

$$\hat{c}_{\mathfrak{a}_n}(\nu) = \left(\frac{\sqrt{|d|}}{||\phi||e^{\pi|1+ir|}}\right)^{\frac{1}{2}} c_{\mathfrak{a}_n}(\nu).$$

この $c_{\mathfrak{a}_n}(\nu)$ を用いて Rankin-Selberg L 関数を以下のように定義する:

$$L_{\mathfrak{a}_n}(s,\phi\otimes\bar{\phi}) = \sum_{0\neq\nu\in\mathcal{O}_d} \frac{|\hat{c}_{\mathfrak{a}_n}(\nu)|^2}{N(\nu)^s}.$$

$|\hat{c}_{\mathfrak{a}_n}(\nu)|^2$ の有限和の評価について

$$\sum_{N(\nu)\le X} |\hat{c}_{\mathfrak{a}_n}(\nu)|^2 \ll |1+ir| + \frac{X}{|1+ir|} \tag{4}$$

が成り立つことから $L_{\mathfrak{a}_n}(s,\phi\otimes\bar{\phi})$ は $\Re(s)>1$ で絶対収束し, Eisenstein 級数 $E_{\mathfrak{a}_n}(\omega,s)$ を用いて以下のような積分表示を満たす.

$$\Lambda_{\mathfrak{a}_n}(s,\phi\otimes\bar{\phi}) = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^3} E_{\mathfrak{a}_n}(\omega,2s-1)\,|\phi(\omega)|^2\,\frac{dzdy}{y^3} \tag{5}$$

ここで

$$\Lambda_{\mathfrak{a}_n}(s,\phi\otimes\bar{\phi}) = \frac{|d|^{s+\frac{1}{2}}\Gamma(s)^2\Gamma(s+ir)\Gamma(s-ir)}{16(2\pi)^{2s}\Gamma(2s)} L_{\mathfrak{a}_n}(s,\phi\otimes\bar{\phi}),$$

$$E_{\mathfrak{a}_n}(\omega, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}_n} \backslash \Gamma} \left(y\left(\sigma_{\mathfrak{a}_n}^{-1} \gamma \cdot \omega \right) \right)^{s-1}.$$

(5) 式と Eisenstein 級数の関数等式 ([1] Theorem 5.8) より $h(d)$ 個の成分からなるベクトル $\{L_\infty(s, \phi \otimes \bar{\phi}), L_{\mathfrak{a}_2}(s, \phi \otimes \bar{\phi}), \cdots, L_{\mathfrak{a}_{h(d)}}(s, \phi \otimes \bar{\phi})\}$ は全複素平面に有理型関数として解析接続され, s と $1-s$ の間で関数等式が成り立つ. $\Re(s) > 1/2$ での極は $s = 1$ のみで 1 位, 留数 $R = \mathrm{res}_{s=1} L_{\mathfrak{a}_n}(s, \phi \otimes \bar{\phi})$ は

$$R = \frac{512\pi^4}{|d|\Gamma(1+ir)\Gamma(1-ir)\zeta_K(2)e^{\pi|1+ir|}} \gg \frac{1}{|d\,r|} \tag{6}$$

である. ここで $\zeta_K(s)$ は K の Dedekind zeta 関数である. (4) 式と関数等式, Phragmén-Lindelöf の凸定理より $L_\infty(s, \phi \otimes \bar{\phi})$ の $\Re(s) = 1 - 1/(h(d)+2)$ 上での評価を得ることができる.

$$\exists\, C_1 > 0 \quad s.t. \quad (s-1)L_\infty(s, \phi \otimes \bar{\phi}) \ll |d(1+|t|+|r|)|^{C_1}. \tag{7}$$

Perron の公式と (7) 式より, 任意の $X > 0$ に対して以下を得る.

$$\sum_{N(\nu) \le X} |\hat{c}(\nu)|^2 = RX + O\left(X^{1-\frac{1}{h(d)+2}} |d(1+|r|)|^{C_1} \right) \tag{8}$$

ここで $\hat{c}(\nu) = \hat{c}_\infty(\nu)$ である.

X が次を満たす程度に十分大きい場合に, 補題 3.2 が成り立つことを示す.

$$X \ge |d|^{C_2 h(d)} \gg_r \left(\frac{|d|^{C_1}}{R} \right)^{h(d)+2}.$$

ここで $C_2 > 0$ は定数である. このとき (6), (8), (2) 式より

$$\frac{R}{|\hat{c}(1)|^2} X \ll_r \sum_{N(\nu) \le X} \frac{|\hat{c}(\nu)|^2}{|\hat{c}(1)|^2} = \sum_{N(\nu) \le X} |\lambda(\nu)|^2 \ll_r \frac{R}{|\hat{c}(1)|^2} X,$$

が成り立つ. よって $R/|\hat{c}(1)|^2 \ll_{\epsilon, r} |d|^{\epsilon h(d)}$ を示せば補題 3.2 を導くことができる. $R/|\hat{c}(1)|^2$ は X に因らないので, $X = |d|^{C_2 h(d)}$ の場合に示せば十分である. partial summation を用いて, $L(X) = \sum_{N(\nu) \le X} |\lambda(\nu)|^2 N(\nu)^{-1/2}$ の上からの評価を得る.

$$\frac{R}{|\hat{c}(1)|^2} X^{\frac{1}{2}} \ll_r \sum_{N(\nu) \le X} \frac{|\lambda(\nu)|^2}{X^{\frac{1}{2}}} \ll L(X) \ll_r \frac{R}{|\hat{c}(1)|^2} X^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

次にIwaniecの方法[3] (19) に従い, Hecke作用素の性質を用いて以下を得る.

$$L(X)^2 \ll_\epsilon X^\epsilon L(X^2), \quad \forall\epsilon > 0. \tag{10}$$

(9) を (10) に代入し, 以下を得る.

$$\frac{R^2}{|\hat{c}(1)|^4}X \ll_r L(X)^2 \ll_\epsilon X^\epsilon L(X^2) \ll_r X^\epsilon \frac{R}{|\hat{c}(1)|^2}X.$$

従って $R/|\hat{c}(1)|^2 \ll_{\epsilon,r} X^\epsilon$. ここで $X = |d|^{C_2 h(d)}$ を代入すれば $R/|\hat{c}(1)|^2 \ll_{\epsilon,r} |d|^{\epsilon h(d)}$ が成り立つ.

以上より $X \geq |d|^{C_2 h(d)}$ の場合に補題 3.2 が成り立つことを導くことができた. $X < |d|^{C_2 h(d)}$ の場合については, Iwaniec [2]Theorem8.3. に詳しいのでそちらを参照のこと. □

5 注意

注 1 講演後に江上先生, 松本先生, 村田先生よりご指摘があり, 講演内容に誤りがあったことが判明しました. 本稿において (1) 式右辺の $|d|$ のベキを講演時の $1/2+\epsilon$ ではなく $1/2+\epsilon h(d)$ とすることで誤りを訂正します. ご指摘いただいた先生方に感謝いたしますと共に, 講演を聴講して下さった方々にお詫び申し上げます.

注 2 変数 r の振る舞いにも注意することで, 補題 3.2 の $\lambda(\nu)$ の平均的な評価は, d, r に因らずに求めることもできる.

$$\sum_{N(\nu)\leq X} |\lambda(\nu)|^2 \ll_\epsilon |d(1+|r|)|^{\epsilon h(d)} X, \quad \forall\epsilon > 0. \tag{11}$$

(11) 式と補題 3.3 より, $L(s,\phi)$ の $\Re(s) = 1/2$ 上での評価を d, t, r どの変数にも因らずに求めることができる. 証明は定理 3.1 の証明と同様である.

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\phi\right) \ll_\epsilon |\sqrt{d}(1+|r|)|^{1+\epsilon h(d)}(1+|t|)^{1+\epsilon}. \tag{12}$$

(12) 式より直ちに t-aspect, r-aspect を得ることができる.

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\phi\right) = O_{\epsilon,d,r}\left(t^{1+\epsilon}\right), \quad \forall\epsilon > 0, \quad t \to \infty,$$

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\phi\right)=O_{\epsilon,d,t}\left(|r|^{1+\epsilon}\right),\quad \forall\epsilon>0,\quad |r|\to\infty.$$

注 3 (11) 式について, $d=-4$, 即ち $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合は S. Koyama[4] により示されている.

注 4 補題3.3について, 一般の保型 L 関数に対して関数等式が存在し, 解析接続可能であることは既に知られている (Hecke Theory) が, 今回これを具体的に書き下した式を得ることができた. また $d=-4$, 即ち $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合は Y. Petridis and P. Sarnak[5] により示されている.

参考文献

[1] J. Elstrodt, F. Grunewald and J. Mennicke, Eisenstein series on three-dimentional hyperbolic space and imaginary quadratic number fields, J. Reine Angew. Math., **360** (1985), 160-213.

[2] H. Iwaniec, Spectral method of automorphic forms, Graduate studies in mathematics 53, American mathematical society, 2002.

[3] H. Iwaniec, Small eigenvalues of Laplacian for $\Gamma_0(N)$, Acta Arith., **56** (1990), 65-82.

[4] S. Koyama, L^∞-norms of eigenfunctions for arithmetic hyperbolic 3-manifolds, Duke Math. J., **77** (1995), *no. 3*, 799-817.

[5] Y. N. Petridis and P. Sarnak, Quantum unique ergodicity for $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash\mathrm{H}^3$ and estimates for L-functions, J. Evol. Equ., **1** (2001), 277-290.

[6] H. Rademacher, On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications, Math.Z., **72** (1959/1960), 192-204.

[7] S. Raghavan and J. Sengupta, On Fourier coefficients of Maass cusp forms in 3-dimensional hyperbolic space, Proc. Steklov Inst. Math., **207** (1995), 251-257.