数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 178-182

Dirichlet's Prime Number Theorem for $PGL(2)$ over Function Fields

慶應義塾大学大学院理工学研究科　中村 朝子 (Asako Nakamura)
Graduate School of Science and Technology,
Keio University

1　背景と概略

Dirichlet型の素数定理とは，素数や素数の類似物の分布についての定理である．例えば，$p \in \mathbf{Z} > 0$ (p: 素数) の場合，任意の $n \in \mathbf{Z} > 0$, $(a, n) = 1$ なる $a \in \mathbf{Z} > 0$ に対して

$$\pi(x, a; n) = \#\{p : \text{素数} \mid p \leq x,\ p \equiv a \pmod{n}\}$$

とおき，φ をEuler関数とすると，

$$\pi(x, a; n) \sim \frac{1}{\varphi(n)} \cdot \frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

となることが知られている．

また，その類似として，$PSL(2, \mathbf{Z})$ の場合のDirichlet型の素数定理 [Sa] [Kur] がある．$P \in PSL(2, \mathbf{Z})$ が双曲的であるとは $|\mathrm{tr}(P)| > 2$ のことを，$P \in PSL(2, \mathbf{Z})$ が素であるとは，$PSL(2, \mathbf{Z})$ の他の元のベキで表せないこととし，Conjで共役類全体の集合を，Primで素双曲的共役類全体の集合を表わすとする．また，

$$\begin{aligned} N(P) &= \max\{|\alpha_P|^2, |\beta_P|^2\} > 1 \\ &\quad (\alpha_P, \beta_P : P \text{の固有値}) \end{aligned}$$

とおき，$\pi_{PSL(2,\mathbf{Z})}(x, \alpha; n)$ を次のように定義する．

$$\pi_{PSL(2,\mathbf{Z})}(x, \alpha; n) = \#\{P \in \mathrm{Prim}(PSL(2, \mathbf{Z})) \mid N(P) \leq x,\ P \equiv \alpha \pmod{n}\}.$$

このとき，任意の $\alpha \in \mathrm{Conj}(PSL(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$ に対して

$$\pi_{PSL(2,\mathbf{Z})}(x, \alpha; n) \sim \frac{\#\alpha}{\#PSL(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})} \cdot \frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

が成り立つ[Kur].

ここでは，この $PSL(2,\mathbf{Z})$ でのDirichlet型の素数定理の類似として，$PGL(2,\mathbf{F}_q[T])$ でのDirichlet型の素数定理を考える．以降で，その定理と証明の概略を述べる．

2 定義

q を奇素数のベキ，$\mathbf{F}_q$ を位数 q の有限体とする．$\mathbf{F}_q[T]$ を T を不定元とする $\mathbf{F}_q$ 上の多項式環，$\mathbf{F}_q(T)$ を $\mathbf{F}_q[T]$ の商体，$\mathbf{F}_q((T^{-1}))$ を $\frac{1}{T}$ についての Laurent 展開の体とする．$\mathbf{F}_q((T^{-1}))$ は $\mathbf{F}(T)$ を ∞ で完備化した体となる．$x \in \mathbf{F}_q((T^{-1}))$ は $x = \sum_{i=-\infty}^{k} a_i T^i$ $(a_i \in \mathbf{F}_q, k \in \mathbf{Z}, a_k \neq 0)$ と表せる．$\deg(x) = k$，$|x| = q^{\deg x}$ と定義する．

$\Gamma = PGL(2,\mathbf{F}_q[T])$ とする．$P \in \Gamma$ が双曲的であるとは $\deg(\mathrm{tr}P) > 0$ のことを，$P \in \Gamma$ が素であるとは Γ の他の元のベキで表せないこととし，Conj で共役類全体の集合を，Prim で素双曲的共役類全体の集合を表わすとする．また，ノルム $N(P)$ を

$$N(P) = \max\{|\alpha_P|^2, |\beta_P|^2\} > 1$$
$$(\alpha_P, \beta_P : P \text{ の固有値})$$

と定義する．このとき，$N(P) = q^{2\deg(\mathrm{tr}P)}$ と表わせる．

$A \in \mathbf{F}_q[T]$ を $\deg(A) \geq 1$ とする．$\alpha \in \mathrm{Conj}(PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T]))$ に対して $\pi_\Gamma(x,\alpha;A)$ を次のように定義する．

$$\pi_\Gamma(x,\alpha,A) = \#\{P \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(P) \leq x,\ P \equiv \alpha \pmod{A}\}.$$

3 定理と証明の概略

定理 1 任意の $\alpha \in \mathrm{Conj}(PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T]))$ に対して

$$\pi_\Gamma(x,\alpha,A) \sim \frac{\#\alpha}{\#PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T])} \cdot \frac{x}{\log x} \quad as \quad x \to \infty$$

証明の方針は[Kur]と同様である．一様分布と L 関数の研究[Se][Ku]より次の補題が言えればよい．

補題 1 $PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T])$ の非自明な任意の既約ユニタリ表現 τ に対して，L 関数 $\zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau})$ は $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ において正則で零点を持たない．

ただし，$\tilde{\tau}$ は Γ のユニタリ表現

$$\tilde{\tau}:\Gamma \longmapsto PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T]) \xmapsto{\tau} U(\deg(\tau))$$

とし，$\zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau})$ は

$$\zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau}) = \prod_{P\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \det(1-\tilde{\tau}(P)N(P)^{-s})^{-1}$$

とする．

この補題を示すには，Γ の主合同部分群

$$\Gamma(A) = \{\gamma \in PGL(2,\mathbf{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv I \,(\mathrm{mod}\, A)\}, \quad A \in \mathbf{F}_q[T]$$

に関する Selberg zeta 関数

$$\zeta_{\Gamma(A)}(s) = \prod_{P\in\mathrm{Prim}(\Gamma(A))} (1-N(P)^{-s})^{-1}$$

を考える．このとき，

$$\zeta_{\Gamma(A)}(s) = \prod_{\tau} \zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau})^{\deg(\tau)}$$

より，

$$\prod_{\tau\neq 1} \zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau})^{\deg(\tau)} = \frac{\zeta_{\Gamma(A)}(s)}{\zeta_\Gamma(s)} \tag{1}$$

が成り立つ．ここに，[Na] を用いることで，(1) の右辺が $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ において正則で零点を持たないことがわかり，また，$\zeta_\Gamma(s,\tilde{\tau})$ が $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ で正則であることを示すことで補題 1 を得ることができる．

4 例

$q=3$，$A=T^2$ とする．

$$\#PGL(2,\mathbf{F}_q[T]/A\mathbf{F}_q[T]) = q^{3\deg(A)} \prod_{\substack{A_i \mid A \\ A_i:\text{既約}}} (1-q^{-2\deg(A_i)})$$

より，$PGL(2,\mathbf{F}_3[T]/T^2\mathbf{F}_3[T])$ の元の個数は 648 個で，また，その共役類 $\alpha_i \in \mathrm{Conj}(PGL(2,\mathbf{F}_3[T]/T^2\mathbf{F}_3[T]))$ の元の個数と代表元は以下のようになる．

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\#\alpha_i$	1	6	8	12	27	54	54
代表元	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&T\\2T&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\T&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&T\\T&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
54	54	54	72	72	72	108
$\begin{pmatrix}1&1\\T+1&T\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\2&T\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&T\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\T&T+1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\T+2&T\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\T&T+2\end{pmatrix}$

例えば共役類を $\alpha=\alpha_2=\left\{\begin{pmatrix}1&T\\2T&1\end{pmatrix}\right\}$ とすると，定理より

$$\pi_\Gamma\left(x,\left\{\begin{pmatrix}1&T\\2T&1\end{pmatrix}\right\},T^2\right) \sim \frac{1}{108}\cdot\frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad x\to\infty$$

となる．

謝辞

この研究を取り組むにあたり，ご指導くださった先生方，特に小山信也先生，黒川信重先生，松本耕二先生に感謝を申し上げます．

参考文献

[Ku] N. Kurokawa, "On the meromorphy of Euler products I", Proc. London Math. Soc. 53 (1986), 1-47.

[Kur] H. Kuroyama, "Dirichlet's prime number theorem for modular groups", Kyusyu J. Math. 56 (2002), 293–297.

[Na] H. Nagoshi "Selberg zeta functions over function fields", J. Number Theory 90 (2001), 207–238.

[Sa] P.Sarnak, "Class numbers of indefinite binary quadratic forms", J. Number Theory 15 (1982), 229–247.

[Se] J. P. Serre, "Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves", Addison-Wesley, 1989.