数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 149-156

L-packets of inner forms of SL(N)

京都大学・理学研究科　平賀　郁 (Kaoru Hiraga)
Graduate School of Science
Kyoto University
京都大学・理学研究科　齋藤　裕 (Hiroshi Saito)
Graduate School of Science
Kyoto University

この小論は、SL_2 の inner form の L-packet に関する Labesse -Langlands の結果 ([LL]) の SL_n への一般化についての報告である。非アルキメデス体上の表現に関する結果を中心に述べ、代数体上の保型表現については簡単に触れることにする。

1 L-packet

非アルキメデス局所体上の許容表現の分類のプログラムを簡単に復習する。話を簡単にするため、離散系列表現に話を限る (詳しくは、[Hi] を参照して下さい) 。F で標数 0 の非アルキメデス局所体、$\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$、$G$ で F 上定義された連結簡約代数群 $\mathbb{G}$ の F 有理点全体の群を表す。$\Pi_d(G)$ で、G の既約許容離散系列表現の同形類の全体を表す。W を F の Weil 群とし

$$\mathcal{L} = W \times SU_2(\mathbb{R})$$

を Langlands 群とする。標準的な予想によれば、$\Pi_d(G)$ は Langlands parameter を指数とする有限集合に分かれる。

Conjecture 1.1. $\Pi_d(G) = \bigcup_\phi \Pi_\phi(G)$(disjoint union)

ここで、ϕ は elliptic な Langlands parameter

$$\phi \colon \mathcal{L} \longrightarrow {}^LG$$

全体を動く。一つの集合に含まれる表現は、同じ L 関数、 ε factor を持つ。有限集合 $\Pi_\phi(G)$ は、Langlands parameter ϕ の L-packet と呼ばれる。

L-packet の内部を記述するために、S 群を次のように定義する。ϕ に対し

$$C_\phi = Cent(\phi, \hat{G}), \qquad \bar{C}_\phi = C_\phi / Z(\hat{G})^\Gamma$$

と定義する。ϕ が elliptic という条件から、$\bar{C}_\phi$ は有限群である。$\mathrm{Irr}(\bar{C}_\phi)$ で $\bar{C}_\phi$ の既約表現全体を表す。

Conjecture 1.2. G が quasi-split ならば、$\Pi_\phi(G)$ は、$\mathrm{Irr}(\bar{C}_\phi)$ で記述される。

G が quasi-split でないときは、$\bar{C}_\phi$ の virtual character が $\Pi_\phi(G)$ を記述することが予想されている。ここで記述するというは、$\mathrm{Irr}(\bar{C}_\phi)$ の元と L-packet の元との一対一対応及び後述の指標関係式を意味する。

SL_n の inner form の場合に、より具体的に見る。 G を SL_n の inner form とすると、GL_n の inner form $\tilde{G}$（これはある F 上の中心単純多元環の乗法群）で G を含むものが存在する。 ${}^LG$ は $PGL_n(\mathbb{C}) \times W$ と同型で、ϕ は準同型

$$\phi : \mathcal{L} \longrightarrow PGL_n(\mathbb{C}) \times W$$

で、$\mathcal{L}$ から $PGL_n(\mathbb{C})$ への準同型 ϕ_0 により、$\phi(w \times u) = \phi_0(w \times u) \times w$ と表され、elliptic という条件から

$$Cent(\phi_0, PGL_n(\mathbb{C}))^0 = \{1\}$$

となっている。これに対して、ϕ の持ち上げである $\tilde{G}$ の Langlands parameter

$$\tilde{\phi} \colon \mathcal{L} \longrightarrow {}^L\tilde{G} = GL_n(\mathbb{C}) \times W$$

が存在することが知られている ([L])。また Harris-Taylor-Henniart の結果によれば ([H], [HT])、$G = GL_n$ のとき予想は正しく、$\Pi_{\tilde{\phi}}(GL_n)$ はただ一つの元 π_{GL_n} から成る 。$\Pi_{\tilde{\phi}}(\tilde{G})$ もただ一つの元 $\pi_{\tilde{G}}$ から成り、π_{GL_n} と $\pi_{\tilde{G}}$ は、Jacquet-Langlands 対応により、その関係が与えられている ([DKV])。

このとき、$\Pi_\phi(G)$ は次のように与えられる。$\pi_{\tilde{G}}$ の G への制限を

$$\pi_{\tilde{G}}|_G = m(\pi_1 \oplus \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_r)$$

とすると

$$\Pi_\phi(G) = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r\}.$$

これは、持ち上げ $\tilde{\phi}$ の取り方によらない。つまり G の L-packet を決めるには、$\tilde{G}$ の表現の G への制限を記述すればよい。

2 SL_2 の場合

SL_2 の場合には、[LL] による詳細な結果がある ([Hi] §3 を参照) 。この場合、SL_2 の inner form は division quaternion algebra D のノルム 1 の群 D^1 で、$\tilde{G} = D^\times$ である。次の 3 つの場合が生ずる。

Case1: $\bar{C}_\phi = \{1\}$
この場合、$\Pi_\phi(SL_2)$ も $\Pi_\phi(D^1)$ もただ一つの元から成る。

Case2: $\bar{C}_\phi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
この場合、$\Pi_\phi(SL_2)$ も $\Pi_\phi(D^1)$ も二つの元から成る。

Case3: $\bar{C}_\phi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
この場合、$\Pi_\phi(SL_2)$ は 4 つの元からなるが、inner form の制限は

$$\pi_{D^\times}|D^1 = 2\pi$$

と重複度 2 を持つ。従って、$\Pi_\phi(D^1)$ はただ一つの元からなる。[LL] では、これは $\bar{C}_\phi$ の正則表現の 1/2 に対応するという解釈が与えられている。

しかしこれは正しい解釈であろうか？

次のように考えるのが自然な解釈なのではないか、というのが我々の主張である。アルキメデス体上の Vogan([V]) のアイデアに従って、$\bar{C}_\phi$ を持ち上げた群を次のように導入する。今の場合

$$Z(\hat{G}) = Z(PGL_n(\mathbb{C})) = \{1\}, \quad \bar{C}_\phi = C_\phi$$

となっている。$\hat{G}$ の単連結被覆 $\hat{G}_{sc} = SL_n(\mathbb{C})$ と自然な写像

$$\lambda\colon \hat{G}_{sc} \longrightarrow \hat{G}$$

に対し

$$S_\phi = \lambda^{-1}(\bar{C}_\phi)$$

と定義する。S_ϕ は $Z(\hat{G}_{sc})$ を含んでいて

$$S_\phi/Z(\hat{G}_{sc}) = \bar{C}_\phi.$$

C_ϕ は可換群で、従って $s,\ s' \in S_\phi$ に対して

$$ss' = z(s, s')s's$$

となる $z(s,s') \in Z(\hat{G}_{sc})$ が存在する。

これを用いて、上記 [LL] の結果をもう一度見直してみよう。S_ϕ は次のようになる。問題となっていた Case 3 から見る。

Case 3: $S_\phi \simeq \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (quaternion group)

$\mathrm{Irr}(S_\phi)$ は、4つの一次元の既約表現と、一つの2次元の既約表現からなる。一次元の表現は $Z(\hat{G}_{sc})$ の上で trivial、すなわち C_ϕ の既約表現であり、2次元の表現は $Z(\hat{G}_{sc})$ 上 non-trivial である。しかも同型

$$Z(\hat{G}_{sc})^D \simeq H^1(F, G_{ad})$$

があった。$Z(\hat{G}_{sc})^D$ は、$Z(\hat{G}_{sc})$ の指標群であり、右辺のガロアコホモロジーは、SL_2 の inner form を分類していた。non-trivial な inner form に対しては、non-trival な $Z(\hat{G}_{sc})$ の指標が対応すると考えるのが自然であると思われる。

Case 2: $S_\phi \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\mathrm{Irr}(S_\phi)$ の既約表現は、$Z(\hat{G}_{sc})$ 上 trivial な一次元の表現が二つと、$Z(\hat{G}_{sc})$ 上 non-trivial な表現二つからなる。

Case 1: $S_\phi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathrm{Irr}(S_\phi)$ は、$Z(\hat{G}_{sc})$ 上 trivial なもの一つと、non-trivial なもの一つとからなる。

これらの場合も、S_ϕ の既約表現のうち、$Z(\hat{G}_{sc})$ 上 trivial なものは SL_2 の表現に対応し、non-trivial なものは D^1 に対応すると見るのが自然なように思われる。

3 主結果

主結果は、前節の考察が一般の場合にも成り立つことを主張する。同型

$$Z(\hat{G}_{sc})^D \simeq H^1(F, G_{ad})$$

により G には、$Z(\hat{G}_{sc})$ の指標 χ が対応している。そこで

$$\mathrm{Irr}_\chi(S_\phi) = \{\rho \in \mathrm{Irr}(S_\phi) |\ \rho|_{Z(\hat{G}_{sc})} = \chi\}$$

と定義する。

Main Theorem. $\mathrm{Irr}_\chi(S_\phi)$ が $\Pi_\phi(G)$ を記述する。

すなわち、$\mathrm{Irr}_\chi(S_\phi)$ と $\pi_{\tilde{G}}|_G$ との間に一対一の対応があり、Theorem 4.5 の指標関係式が成り立つ。

Remark 3.1. この主張は、ϕ が tempered のときにも成り立つことが示される。

4 証明の方針

S_ϕ は、条件

$$s\tilde{\phi}(w \times u)s^{-1} = a(w)\tilde{\phi}(w \times u),\ w \times u \in \mathcal{L},\ a(w) \in Z(\hat{G}_{sc})$$

を満たす G_{sc} の元 s で、W の 1-cocycle $w \longmapsto a(w)$ は次の対応

$$H^1(W, Z(\hat{G}_{sc})) \simeq \mathbb{X}(\tilde{G}(F)/(\tilde{Z}(F)G(F)))$$

により、$\tilde{G}$ の指標 ω_s を定める。上記の条件から

$$\pi_{\tilde{G}} \otimes \omega_s \simeq \pi_{\tilde{G}}$$

が従う。I_s をその intertwining operator とする。$\pi_{\tilde{G}} \otimes \omega_s$ も $\pi_{\tilde{G}}$ と同じ空間に実現し、I_s をこの空間の線形写像と見る。

Remark 4.1. $\pi_{\tilde{G}}$ が Whittaker model を持つときは、I_s がそれを保つという条件で normalize することができるが、一般には normalize する方法は分からない。

Proposition 4.2. 群 $\langle I_s,\ \mathbb{C}^\times | s \in S_\phi\rangle$ により, $\pi_{\tilde{G}}|_G$ の分解が記述される。

これは

$$\mathrm{End}_G(V_{\pi_{\tilde{G}}}) = \oplus_{s \in S_\phi}\mathbb{C}I_s$$

であることから分かる。

従って、上の分解を得るためには、

$$I_s I_{s'} = a_\chi(s, s')I_{s'}I_s$$

によって与えられる定数 $a_\chi(s, s')$ を決定すればよい。所で $S_\phi/Z(\hat{G}_{sc}) = \bar{C}_\phi$ で

$$ss' = z(s, s')s's,\ z(s, s') \in Z(\hat{G}_{sc})$$

であった。この $z(s, s')$ と $a_\chi(s, s')$ の関係は次で与えられる。

Theorem 4.3. $\chi(z(s,s')) = a_\chi(s,s')$

これにより、$\pi_{\tilde{G}}$ の表現空間 $V_{\pi_{\tilde{G}}}$ への S_ϕ の作用が定義できる。また $n=2$ の Case 3, では、s, s' を $\omega_s \neq \omega_{s'}$ を満たす元とすると

$$\begin{cases} I_s I_{s'} = I_{s'} I_s & G = SL_2 \\ I_s I_{s'} = -I_{s'} I_s & G = D^1 \end{cases}$$

で、この違いが、分解の違いを与えた。すなわち、SL_2 の場合は、intertwining operator 達は可換で、同型でない表現の直和に分かれた。一方 D^1 の場合は、可換ではなく、二次元の既約表現を生じ、重複度が現れた。

この定理は、Herb-Henniart [HH] の GL_n の automorphic induction を、一般の inner form の場合に一般化することにより証明される。より詳しく述べると、$s \in S_\phi$ は次のように $\tilde{G}$ の指標付き endoscopy を定める。s から決まる $\tilde{G}$ の指標 ω_s は、$F^\times/F^{\times n}$ の指標 ω を用いて

$$\omega_s = \omega \circ \det$$

と表される。ここで、det は、一般の場合は reduced norm を表す。指標 ω は、F の巡回拡大 K で、$n = m[K:F]$ となるものを定める。s から決まる endoscopic group H は $\mathrm{Res}_F^K(GL_m)$ で与えられる。

この局所的な endoscopic lifting を、代数体上の endoscopic lifting に埋め込むことにより、次の定理が示される。

Theorem 4.4. $\pi_{\tilde{G}}$ は H の表現 τ の endoscopic lift であり、0 でない定数 c があって次の式が成り立つ。

$$c\,\mathrm{Tran}_H^{\tilde{G}}\,\Theta_\tau(f) = \mathrm{trace}(\pi_{\tilde{G}}(f) I_s)$$

ここで、Θ_τ は τ の指標である。

この式と、この式に $f\omega_{s'}$, $s' \in S_\phi$ を代入したものを比較することにより次が得られる。

Therorem 4.5. 0 でない定数 c' があって指標関係式

$$c'\,\mathrm{Tran}_H^G\,\Theta_\tau = \sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \langle s,\pi\rangle \Theta_\pi$$

が成り立つ。ここで ρ_π は、π に対応する S_ϕ の既約表現、

$$\langle s,\pi\rangle = \mathrm{trace}\,\rho_\pi(s)$$

で、Θ_π は π の指標である。

5 重複度公式

F を代数体とし、$\mathbb{A}$ を F のアデール環とする。$\tilde{\pi}$ を $GL_n(\mathbb{A})$ の既約で cuspidal な保型表現とし、$\mathcal{V}_{\tilde{\pi}}$ をその表現空間とする。$\mathcal{V}_{\tilde{\pi}}$ の元を $SL_n(\mathbb{A})$ に制限して得られる $SL_n(\mathbb{A})$ 上の関数の空間を $V_{\tilde{\pi}}$ で表す。$V_{\tilde{\pi}}$ を $SL_n(\mathbb{A})$ の既約表現に分解することを考える。

$S(\tilde{\pi})$ で $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の指標 ω で

$$\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi} \otimes \omega \circ \det$$

を満たすものからなる群を表す。このとき $\tilde{\pi}$ と $\tilde{\pi} \otimes \omega \circ \det$ の間の intertwining operator は、二つの表現が $\mathcal{V}_{\tilde{\pi}}$ に実現されているとして、

$$I_\omega \colon f(g) \longrightarrow f(g)\omega(\det(g))$$

で与えられる。このとき、$S(\tilde{\pi})$ の trivial な表現の空間を $\mathcal{V}_{\tilde{\pi}}^1$ で表すことにすると $SL_n(\mathbb{A})$ の表現として、

$$\mathcal{V}_{\tilde{\pi}}^1 \simeq V_{\tilde{\pi}}$$

が示される。これはより一般な形で [HS2] で示されている。

$\tilde{\pi} = \otimes_v \tilde{\pi}_v$ とすると次の結果が成り立つ。

Theorem 5.1. $\tilde{\pi}_v$ が全て tempered であると仮定する。$\pi = \otimes_v \pi_v$ を $SL_n(\mathbb{A})$ の表現で、$V_{\tilde{\pi}}$ に現れるものとする。このとき、π の $V_{\tilde{\pi}}$ における重複度は $S(\tilde{\pi})$ の $\otimes \rho_{\pi_v}|_{S_{\phi,v}}$ における trivial representation の重複度に一致する。

inner form についても弱い形の重複度公式が成り立つ。

参考文献

[DKV] P. Deligne, D. Kazhdan, and M. F. Vigneras, *Représentations des algébres centrales simples p-adiques*, in J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhadan, M.F.Vigneras"Représentations des groupes réductifs sur un corps local", Hermann 1984.

[HT] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. With an appendix by Vladimir G. Berkovich*, Ann. of Math. Studies, 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[H] G. Henniart, *Une preuve simple de conjectures de Langlands pur $GL(n)$ sur un corps p-adique*, Invent. Math. 139(2000), no.2, 439–455.

[HH] G. Henniart and R. Herb, *Automorphic induction for $GL(n)$ (over local non-Archimedean fields)*, Duke Math. J. 78(1995), no.2, 131–192

[Hi] K. Hiraga, Arthur の予想について, 数理解析研究所講究録１１７３「代数群上の保型形式・保型表現と保型的Ｌ関数」、２１７－２４２。

[HS1] K. Hiraga and H. Saito, *On restriction of admissible representations.*

[HS2] K. Hiraga and H. Saito, *On L-packets of inner forms of SL_n.*

[L] J. P. Labesse, *Cohomologie, L-groupes et fonctorialité*, Comp. Math. 55(1984), 163–184.

[LL] J. P. Labesse and R. P. Langlands, *L-indistinguishability for $SL(2)$*, Canad. J. Math. 3(1979), 726–785,

[V] D. Vogan, *The local Langlands conjecture*, Contetmp. Math. 145(1993), 305–379.