数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 171-180

アーベル曲面の定義方程式と保型形式

軍司圭一 (Keiichi Gunji)
東京大学大学院数理科学研究科・博士課程3年
Graduate School of Mathematical Sciense, the University of Tokyo

0 Introduction

$\mathbb{P}^2$ の中の3次曲線

$$E: \quad X^3+Y^3+Z^3=3\mu XYZ$$

を考える. これは $\mu\neq\infty,1,\omega,\omega^2$ $(\omega=e^{2\pi i/3})$ のときにレベル3構造をもつ楕円曲線を与える. 一方で, ある $\tau\in\mathbb{H}_1$ が存在して $E=\mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z})$ とかけるので, μ は τ の関数と思うことができる. 実際,

$$\vartheta(\tau)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^2}\exp\pi i(\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix}[l]\tau),$$

$$\chi(\tau)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^2}\exp\pi i(\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix}[l+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}])$$

と定義すれば $(X[Y]:={}^tYXY$ とかく$)$, $\mu=\vartheta/\chi$ が成り立つ.

さらに $M_k(\Gamma(3))$ をレベル3の主合同部分群に関する重さ k の保型形式の生成する空間とするとき,

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_k(\Gamma(3))=\mathbb{C}[\vartheta,\chi]$$

となり, これより $X(3)$ をレベル3の modular curve とすれば, その関数体は $K(\Gamma(3))=\mathbb{C}(\mu)$ となる. また, 関係式

$$\Delta(\tau)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=3^{-3}\chi^3(\vartheta^3-\chi^3),\quad q=e^{2\pi i\tau}$$

から $\mathbb{H}_1$ 上で μ は正則かつ $\mu\neq 1,\omega,\omega^2$ であることが確かめられ, $\mathbb{H}_1/\Gamma(3)$ の各 cusp で $\mu=1,\omega,\omega^2$ となる.

ここでは上の有名な事実の，アーベル曲面への拡張を考えてみたい．そのための主要な問題は次の2つである．

(1) アーベル曲面の射影空間の中での定義方程式を書き下すこと．

(2) 係数を Siegel modular form としてとらえること．

記号 $\Gamma^g = Sp(g, \mathbb{Z})$ を整数係数の g 次 symplectic 群，$\mathbb{H}_g$ を g 次の Siegel 上半空間とする．また，$\gamma \in \Gamma^g$ 及び $\mathbb{H}_g$ 上の関数 f と $k \geq 0$ に対して，$f|_k(\tau) = \det(C\tau + D)^{-k} f(\langle\tau\rangle)$ と表わす．ただし，C, D はそれぞれ，左下，右下の $g \times g$ 行列であり，$\gamma\langle\tau\rangle$ は自然な一次分数変換としての作用である．$\Gamma^g(n)$ で Γ^g のレベルが n の主合同部分群，$M_k(\Gamma^g(n))$ で $\mathbb{H}_g$ 上の $\Gamma^g(n)$ に付随する重さが k の正則保型形式の空間を表わす．

1　アーベル多様体の定義方程式

上で提起した問題の (1) から考える．X を $\mathbb{C}$ 上定義された g 次元のアーベル多様体とし，L を X 上の very ample な line bundle とする．$N = \dim H^0(X, L)$ とおくとき，L による X の $\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}(H^0(X, L))$ への埋め込みの定義方程式は，自然な射

$$\varphi_L : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^n H^0(X, L) \longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, L^n)$$

の kernel で与えられる．よって，上の写像 φ_L を調べることが定義方程式を考える上での問題となる．

Theorem 1.1 (Koizumi [Ko]) L_0 を X 上の ample line bundle とする．このとき $L = L_0^k$ に対し，$k \geq 3$ で φ_L は全射である．特に L は very ample になる．

上の性質が成り立つとき，L を normally generated という．

Theorem 1.2 (Mumford [M2], Sekiguchi [S], Kempf [Ke]) $L = L_0^k$ とおく．

(1) $k \geq 4$ のとき，$\ker \varphi_L$ は2次で生成される．

(2) $k = 3$ のとき，$\ker \varphi_L$ は2次および3次で生成される．

(3) $k = 2$ かつ L が normally generated であれば，$\ker \varphi_L$ は2次，3次および4次で生成される．

今，X を principal polarization をもつアーベル多様体とし，それを与える line bundle を L_0 とする．$L = L_0^3$ とすれば，上の定理より定義方程式は 2 次及び 3 次で与えられる．一方次に示すとおり，この場合の 3 次の関係式は Birkenhake と Lange により既に決定されている ([BL])．明らかに 3 次の関係式を与えれば定義方程式は本質的に解ったことになるため，以下，彼らの定理を説明しよう．

$L = L(H, \alpha)$ を $X = V/\Lambda$ 上の ample line bundle とする．ここで V は g 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間，Λ は rank $2g$ の lattice である．即ち H は V 上の正定値 Hermite 形式であって $E = \operatorname{Im} H$ に対して $E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ でを満たすもの，$\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}_1^\times = \{z \mid |z| = 1\}$ は $\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) = \exp(\pi i E(\lambda_1, \lambda_2))\alpha(\lambda_1)\alpha(\lambda_2)$ を満たす Λ 上の semi-character であって，$L(H, \alpha)$ は自明な line bundle $V \times \mathbb{C}$ を Λ の作用

$$\Lambda \times (V \times \mathbb{C}) \ni (\lambda, (v, x)) \longmapsto (v + \lambda, e_\lambda(v)x),$$
$$e_\lambda(v) = \alpha(\lambda)\exp(\pi H(v, \lambda) + \frac{\pi}{2}H(\lambda, \lambda))$$

で割ったものである．

L が ample であることから E は Λ 上の非退化交代形式となり，$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ と totally isotropic subspace の和に分解する．これに従い $V = V_1 \oplus V_2$，また $\Lambda(L) = \{v \in V \mid E(v, \Lambda) \subset \mathbb{Z}\}$ とし，$K(L) := \Lambda(L)/\Lambda = K(L)_1 \oplus K(L)_2$ 分解すると Riemann-Roch の定理から

$$\dim H^0(X, L) = \#\Lambda(L)_1 = \#\Lambda(L)_2$$

が成り立つ．

このとき $H^0(X, L)$ の標準的な基底を以下のように作ることができる (cf. [LB, §2, Chapter 3])．H を V_2 に制限したものを $\mathbb{C}$-linear に拡張した対称形式を B とする．まず $\alpha_0(\lambda) = \exp \pi i E(\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$ で与えられる semi-character α_0 をとり，$L = L(H, \alpha_0$ とおくと，$x \in K(L)_1$ に対して

$$\vartheta_x^L(v) = \exp\left(\frac{\pi}{2}B(v, v) - \frac{\pi}{2}(H - B)(x + 2v, x)\right)$$
$$\times \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \exp\left(\pi(H - B)(x + v, \lambda) - \frac{\pi}{2}(H - B)(\lambda, \lambda)\right)$$

と定めれば $\{\vartheta_x^L\}_{x \in K(L)_1}$ は $H^0(X, L)$ の基底をなす．一般の $L(H, \alpha)$ は L の平行移動による引き戻しでかけるので，同様に標準基底が定義される．

L がある line bundle L_0 によって $L = L_0^3$ とかけているときを考える．X_6 を X の 6 分点全体とし $Z_6 = X_6 \cap K(L)_1$, $\rho \in \widehat{Z}_6 = \operatorname{Hom}(Z_6, \mathbb{C}^\times)$ に対して

$$\theta_{(y_1, y_2), \rho}(v) = \sum_{a \in Z_6} \rho(a)\vartheta_{y_1 - a}^{L^6}(v)\vartheta_{y_2 - 3a}^{L^2}(v)$$

と定める．

Theorem 1.3 (Cubic theta relations, [BL, Theorem 3.3]) L を X 上の ample line bundle であって $L = L_0^3$ とかけているとする．このとき ϑ_x^L たちの 3 次の関係式は以下で尽くされる．

$$\begin{aligned}&\theta_{(y_1,y_2),\rho}(0)\sum_{b\in Z_6}\rho(b)\vartheta^L_{y_1'+y_2'+y_3+2b}\vartheta^L_{y_1'-y_2'+y_3+2b}\vartheta^L_{-2y_1'+y_3+2b}\\&=\theta_{(y_1',y_2'),\rho}(0)\sum_{b\in Z_6}\rho(b)\vartheta^L_{y_1+y_2+y_3+2b}\vartheta^L_{y_1-y_2+y_3+2b}\vartheta^L_{-2y_1+y_3+2b}.\end{aligned}$$

但し $\rho\in\widehat{Z}_6$ であり，$y_1, y_1'\in K(L^6)_1$, $y_2, y_2'\in K(L^2)_1$, $y_3\in K(L^3)_1$ は

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3, & y_1-y_2+y_3, \quad -2y_1+y_3,\\ y_1'+y_2'+y_3, & y_1'-y_2'+y_3, \quad -2y_1'+y_3\end{cases}$$

がすべて $K(L)_1$ に属するようなものを走る．

この定理により，一般論としてはアーベル多様体の定義方程式の問題は解決されたように見える．しかし実際には，上で与えられた関係式には自明なものや，見かけは違うが同一のものが多数入っており，その中で意味のあるものを抜き出すのは決して簡単ではない．

2 Siegel 保型形式としての係数

次に (2) の問題を考えよう．X 上の line bundle $L_0 = L(H,\alpha_0)$ が principal polarization を与えているとする．このとき上で与えられた分解 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2$ に対して $\Lambda_2\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}=V$ であるから，Λ_2 の基底を V の $\mathbf{C}$ 上の基底とみなして $V=\mathbf{C}^g$ とする．すると $X=\mathbf{C}^g/(\tau\mathbf{Z}+\mathbf{Z})$, $\tau\in\mathbb{H}_g$ とかくことができ，その polarization H は固定された基底に対して $H=(\operatorname{Im}\tau)^{-1}$ で与えられる．よってこの H に対し，上の定義方程式に現れる係数 $\theta_{(y_1,y_2),\rho}$ を τ の関数とみなすと以下のようになる．

$$K(L^6)_1=K(L_0^{18})_1\ni y_1=\frac{1}{18}\tau\eta_1,\quad K(L^2)_1=K(L_0^9)_1\ni y_2=\frac{1}{6}\tau\eta_2,\quad Z_6\ni b=\frac{1}{6}\tau\beta,$$

と書けば，

$$\begin{aligned}\theta_{(y_1,y_2),\rho}(0)&=\sum_{\beta\in(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^g}\rho(\beta)\sum_{m,n\in\mathbf{Z}^g}\exp\pi i(18\tau[m+\frac{1}{6}\beta-\frac{1}{18}\eta_1]+6\tau[n+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{6}\eta_2])\\&=\sum_{\beta\in(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^g}\rho(\beta)\sum_{N\in M_{g,2}(\mathbf{Z})}\exp\pi i\operatorname{Tr}(\begin{pmatrix}18&0\\0&6\end{pmatrix}\left[N+\frac{1}{36}\begin{pmatrix}6{}^t\beta-2{}^t\eta_1\\18{}^t\beta-6{}^t\eta_2\end{pmatrix}\right]\tau).\end{aligned}$$

このとき二次形式のtheta関数の理論から([A, Chapter 1,2]参照), $\theta_{(y_1,y_2),\rho} \in M_1(\Gamma^g(36))$ が成り立つことが分かる.

$g=2$ すなわちアーベル曲面の場合について考える. このとき $\dim H^0(X,L)=9$ であるから X は $\mathbb{P}^8$ に埋め込まれる. 係数をmodular formとみなしているため、定義方程式のうち自明な式が現れるかどうかは, theta関数の関数等式の問題として置き換えられていることを注意しておく.

主定理を述べるために記号を用意しておく. $K(L^6)_1 = {}^t(a,b)$, $a,b \in \{0,1,\ldots,17\}$ とかき, $K(L)_1$, $K(L^2)_1 = Z_6$, $K(L^3)_1$ を $K(L)_1 = \{{}^t(0,0), {}^t(0,6), \ldots\}$ 等と $K(L^6)_1$ に埋め込んで表すことにする. 上で与えた標準的な $H^0(X,L)$ の基底に対応して, $\mathbb{P}^8$ の座標を

$$X_{0,0}, X_{0,6}, X_{0,12}, X_{6,0}, X_{6,6}, X_{6,12}, X_{12,0}, X_{12,6}, X_{12,12}$$

で表す.

$$\Theta\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) := \sum_{N \in M_2(\mathbb{Z})} \exp \pi i (\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \left[N + \frac{1}{36}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \tau)$$

と定め, $\rho \in \widehat{Z}_6$, に対して

$$\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \rho\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} \Theta\begin{bmatrix} 6a-2x & 6b-2z \\ 18a-2y & 18b-2w \end{bmatrix},$$

とおく. さらに $W_3 = \{0,3,6\}$ とし, $\widehat{Z}_6^+$ を $\rho \in \widehat{Z}_6$ で $\rho^2 \equiv 1$ なるもの, すなわち $W_3^2 \bmod 9 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ の指標とする. さらに4つの指標 $\rho_1, \ldots, \rho_4 \in \widehat{Z}_6^+$ を

$$\begin{cases} \rho_1\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1, \\ \rho_1\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \omega. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_2\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 1, \\ \rho_2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \omega. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_3\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 1, \\ \rho_3\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \omega. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_4\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = 1, \\ \rho_4\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \omega. \end{cases}$$

で定める.

Theorem 2.1 (主定理1) X の $\mathbb{P}^8$ への埋め込みの定義方程式のうち3次の部分は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}\sum_{(a,b)\in K(L)_1} X_{a,b}^3 &= 3\,\frac{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&0\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,0}X_{12,0}+X_{0,6}X_{6,6}X_{12,6}+X_{0,12}X_{6,12}X_{12,12}) \\ &= 3\,\frac{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{0,6}X_{0,12}+X_{6,0}X_{6,6}X_{6,12}+X_{12,0}X_{12,6}X_{12,12}) \\ &= 3\,\frac{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,6}X_{12,12}+X_{0,6}X_{6,12}X_{12,0}+X_{0,12}X_{12,6}X_{6,0}) \\ &= 3\,\frac{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&12\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,12}X_{12,6}+X_{6,6}X_{0,12}X_{12,0}+X_{12,12}X_{0,6}X_{6,0})\end{aligned}$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,0}^3+X_{12,0}^3-X_{0,6}^3-X_{6,6}^3-X_{12,6}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_1}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&0\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,0}X_{12,0}-X_{0,6}X_{6,6}X_{12,6})$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,0}^3+X_{12,0}^3-X_{0,12}^3-X_{6,12}^3-X_{12,12}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_1}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&0\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,0}X_{12,0}-X_{0,12}X_{6,12}X_{12,12})$$

$$X_{0,0}^3+X_{0,6}^3+X_{0,12}^3-X_{6,0}^3-X_{6,6}^3-X_{6,12}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_2}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_2}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{0,6}X_{0,12}-X_{6,0}X_{6,6}X_{6,12})$$

$$X_{0,0}^3+X_{0,6}^3+X_{0,12}^3-X_{12,0}^3-X_{12,6}^3-X_{12,12}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_2}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_2}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{0,6}X_{0,12}-X_{12,0}X_{12,6}X_{12,12})$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,6}^3+X_{12,12}^3-X_{0,6}^3-X_{6,12}^3-X_{12,0}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_3}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_3}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,6}X_{12,12}-X_{0,6}X_{6,12}X_{12,0})$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,6}^3+X_{12,12}^3-X_{0,12}^3-X_{6,0}^3-X_{12,6}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_3}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_3}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,6}X_{12,12}-X_{0,12}X_{6,0}X_{12,6})$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,12}^3+X_{12,6}^3-X_{6,0}^3-X_{12,12}^3-X_{0,6}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_4}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_4}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&12\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,12}X_{12,6}-X_{6,0}X_{12,12}X_{0,6})$$

$$X_{0,0}^3+X_{6,12}^3+X_{12,6}^3-X_{12,0}^3-X_{0,12}^3-X_{6,6}^3 = 3\,\frac{\theta^{\rho_4}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho_4}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&12\end{smallmatrix}\right)}(X_{0,0}X_{6,12}X_{12,6}-X_{12,0}X_{0,12}X_{6,6})$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{2a,6+2b}^2X_{2a,12+2b} = \frac{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\4&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\4&0\end{smallmatrix}\right)}(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,6+2b}X_{12+2a,6+2b}X_{2a,12+2b})$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,2b}^2X_{12+2a,2b} = \frac{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}4&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}4&0\\0&6\end{smallmatrix}\right)}(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,6+2b}X_{6+2a,12+2b}X_{12+2a,2b})$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{2a,6+2b}^2X_{2a,2b} = \frac{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\2&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^{\rho}\left(\begin{smallmatrix}0&6\\2&0\end{smallmatrix}\right)}(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,6+2b}X_{12+2a,6+2b}X_{2a,2b})$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X^2_{6+2a,2b}X_{2a,2b}=\frac{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&6\end{smallmatrix}\right)}\Big(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,6+2b}X_{6+2a,12+2b}X_{2a,2b}\Big)$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X^2_{6+2a,6+2b}X_{12+2a,12+2b}=\frac{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}4&0\\4&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}4&0\\4&6\end{smallmatrix}\right)}\Big(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,12+2b}X_{6+2a,2b}X_{12+2a,12+2b}\Big)$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X^2_{6+2a,6+2b}X_{12+2a,2b}=\frac{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&6\end{smallmatrix}\right)}\Big(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,12+2b}X_{6+2a,2b}X_{12+2a,2b}\Big)$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X^2_{6+2a,6+2b}X_{2a,12+2b}=\frac{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&0\\4&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&6\\4&0\end{smallmatrix}\right)}\Big(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{12+2a,6+2b}X_{2a,6+2b}X_{2a,12+2b}\Big)$$

$$\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X^2_{6+2a,6+2b}X_{2a,2b}=\frac{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&0\\2&0\end{smallmatrix}\right)}{\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2&6\\2&0\end{smallmatrix}\right)}\Big(\sum_{a,b\in W_3}\rho\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}X_{6+2a,12+2b}X_{6+2a,6+2b}X_{2a,2b}\Big)$$

但し最後の 8 つの式については，ρ は $\widehat{Z}_6^+$ の元すべてを走る．

$\dim \mathrm{Sym}^3 H^0(X,L)=165$ かつ $\dim H^0(X,L^3)=81$ から独立な式の数は 84 個であることに注意する．

次に最初の 4 つの式に注目する．そこに出てくる係数を簡単に

$$\Theta_1=\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\quad \Theta_2=\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&0\end{smallmatrix}\right),\quad \Theta_3=\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&6\end{smallmatrix}\right),\quad \Theta_4=\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&6\end{smallmatrix}\right),\quad \Theta_5=\theta^1\left(\begin{smallmatrix}0&6\\0&12\end{smallmatrix}\right)$$

とかくことにする．

一方で $t_1,\ldots,t_5\in M_1(\Gamma^2(3))$ を

$$t_j(\tau)=\sum_{N\in M_2(\mathbf{Z})}\exp\pi i(\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix}[N+\frac{1}{9}T_j]\tau),\quad (1\le j\le 5)$$

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad T_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad T_5=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

で定める．[G1] によりこれは $M_1(\Gamma^2(3))$ の基底を与えることが示される．

Theorem 2.2 (主定理 2)

$$t_i = \Theta_i \quad (1 \le i \le 5),$$

特に $\Theta_1, \ldots, \Theta_5$ はレベル 3 の modular form である．

これは t_i たちで張られる空間 $(= M_1(\Gamma^2(3)))$ と Θ_i たちで張られる空間が，Γ^2 の表現空間として，すなわち Γ^2-module として同型であることから従う． □

講演の際は，その他の係数については何も言及しなかった．しかしその後，他の係数についても保型性が成り立っていることが分かったので，それを説明する．

その前に，定義方程式の係数は，すべて $\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right) / \theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6u\\ 2z & 6v\end{smallmatrix}\right)$ の形をしていることに注意しておく．

Theorem 2.3 (主定理 3) 任意の $\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right)$ に対して，ある $\Gamma^2(3)$ 上の指標 χ が存在して，$\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right) \in M_1(\Gamma^2(3), \chi)$，すなわち

$$\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right)|_1\gamma = \chi(\gamma)\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right) \quad \forall\gamma \in \Gamma^2(3)$$

を満たす．χ は $\Gamma^2(9)$ 上 trivial であって $\chi^3 \equiv 1$ を満たし，さらに x, y, ρ のみに依存して決まる．特に，主定理 1 におけるすべての係数は，$\Gamma^2(3)$-不変な有理関数である．

以下に証明の方針を記す．

まず $\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix}2x & 6y\\ 2z & 6w\end{smallmatrix}\right) \in M_1(\Gamma^2(36))$ であることは，すでに注意したので，定理を調べるためには，有限群 $\Gamma^2(3)/\Gamma^2(36)$ の構造を知る必要がある．

Lemma 2.4 $\Gamma^2(9)/\Gamma^2(36)$ は

$$\begin{pmatrix}1_2 & 9S\\ 0 & 1_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1_2 & 0\\ 9S & 1_2\end{pmatrix}, \qquad S = {}^tS \in M_2(\mathbb{Z})$$

で生成される．

これは Γ^2 が $\begin{pmatrix}1_2 & S\\ 0 & 1_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1_2 & 0\\ S & 1_2\end{pmatrix}$ で生成されること及び，同型

$$\Gamma^2(9)/\Gamma^2(36) = \Gamma^2(9)/\Gamma^2(4) \cap \Gamma^2(9) \cong \Gamma^2(9)\Gamma^2(4)/\Gamma^2(4) = \Gamma^2/\Gamma^2(4)$$

から明らか．

Lemma 2.5 $\Gamma^2(3)/\Gamma^2(9)$ は $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{10}$ と同型なアーベル群であって，その生成元は

$$\gamma(S_i) = \begin{pmatrix} 1_2 & 3S_i \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}, \quad \delta(S_i) = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 3S_i & 1_2 \end{pmatrix}, \ (1 \leq i \leq 3),$$

$$\mu(U_j) = \begin{pmatrix} U_j & 0 \\ 0 & {}^tU_j^{-1} \end{pmatrix}, \ (1 \leq j \leq 3), \quad \nu = \begin{pmatrix} 1_2 & S_1 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 3S_1 & 1_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & -S_1 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ただし，

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ U_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$(1_2 + 3X)(1_2 + 3Y) \equiv 1_2 + 3(X+Y) \bmod 9$ であるから，$\Gamma^2(3)/\Gamma^2(9)$ がアーベル群になることはすぐに分かる．また上で与えた元はすべて位数が 3 であるから，後はこれらの元が独立になることを見ればよい．詳しくは [G2] 参照．

これら二つの補題から，Lemma 2.4 で与えた生成元が，$\Gamma^2(3)/\Gamma^2(36)$ の生成元になっていることが分かる．よってこれら 10 個の元に対しての $\theta^\rho\left(\begin{smallmatrix} 2x & 6y \\ 2z & 6w \end{smallmatrix}\right)$ への作用を計算すればよいが，それは二次形式の theta 関数の変換公式から，直接計算することができる．詳細は [G2]. □

Remark 指標 χ は以下の条件から定まるものである．

$$\chi(\gamma(S_i)) = \begin{cases} \omega^{x^2} & i=1; \\ \omega^{2xz} & i=2; \\ \omega^{z^2} & i=3; \end{cases} \qquad \chi(\delta(S_i)) = \begin{cases} \omega^{\alpha^2} & i=1; \\ \omega^{2\alpha\beta} & i=2; \\ \omega^{\beta^2} & i=3; \end{cases}$$

$$\chi(\mu(U_j)) = \begin{cases} \omega^{2\beta z} & j=1; \\ \omega^{2\alpha x} & j=2; \\ \omega^{2\alpha(x+z)+\beta(x+z)} & j=3; \end{cases} \qquad \chi(\nu) = \omega^{(\alpha-x)^2}.$$

ただし α, β は

$$\rho\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} = \exp\frac{2\pi i}{3}(\alpha a + \beta b)$$

で定まる数である．

参考文献

[A] A. N. Andrianov, "Quadratic forms and Hecke operators", Glundl. math. Wiss. 286, Springer-Verlag, 1987

[BL] Ch. Birkenhake, H. Lange, "Cubic theta relations", J. reine. angew. Math., **407**(1990), 167-177.

[G1] K. Gunji, "On the graded ring of Siegel modular forms of degree 2 and level 3", to appear.

[G2] K. Gunji "On the defining equations of abelian surfaces and modular forms", preprint.

[Ke] G. Kempf, "Projective coordinate rings of abelian varieties" in: Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory. Edited by J. Igusa. 225-236 The John Hopkins Press (1989)

[Kl] H. Klingen, "Introductory lectures on Siegel modular forms", Cambridge Std. in Adv. Math. 20, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990

[Ko] S. Koizumi, "Theta relations and projective normality of abelian varieties", Am. J. Math., **98**(1976) 865-889.

[LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, "Complex Abelian Varieties", Glundl. Math. Wiss., **302**, Springer-Verlag, 1992.

[M1] D. Mumford "On the equations defining abelian varieties I", Invent. Math., **1**(1967) 287-354.

[M2] D. Mumford "Varieties defined by quadratic equations" Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969) Edizioni Cremonese, Rome(1970) 29-100.

[S] T. Sekiguchi "On the cubics defining abelian varieties", J. Math. Soc. Japan, **30**(1978), NO.4 701-721.