数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 51-70

Clarksonの不等式の幾つかの証明について

新潟大学大学院 自然科学研究科　齋藤 元樹 (Motoki Saito)
Graduate School of Scinece and Technology, Niigata University
新潟大学大学院 自然科学研究科　松本 尚浩 (Naohiro Matsumoto)
Graduate School of Scinece and Technology, Niigata University

1．序文

1935 年に Jordan-von Neumann[1] はノルム空間 X が中線定理を満たすとき X におけるノルムは内積から定義されること，すなわちそのようなノルム空間は内積空間になることを示した．具体的な例として，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間としたとき，$L^2(= L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mu))$ では中線定理が成立するが，$p \neq 2$ のとき，$L^p(= L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu))$ では中線定理は成立しないことは周知のことである．そこで，Clarkson[2] は 1936 年に中線定理の一般化として，$L^p(1 < p < \infty)$ におけるノルム不等式，いわゆる Clarkson の不等式を証明し，それらの不等式を用いて L^p $(1 < p < \infty)$ が一様凸である事，すなわち $0 < \varepsilon \leq 2$ なる任意の ε に対してある正数 δ で，

$$||x|| = ||y|| = 1,\ ||x - y|| > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$$

を満たすものが存在する事を示し，Banach 空間の幾何学的性質の研究が行われるきっかけとなった．次の 4 つの不等式が Clarkson の不等式である．

(i) $1 < p \leq 2,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき，任意の $f, g \in L^p$ に対して，

$$(||f+g||^{p'} + ||f-g||^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(||f||^p + ||g||^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

$$(||f+g||^{p} + ||f-g||^{p})^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(||f||^p + ||g||^p)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

(ii) $2 \leq p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき，任意の $f, g \in L^p$ に対して，

$$(||f+g||^{p} + ||f-g||^{p})^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(||f||^{p'} + ||g||^{p'})^{\frac{1}{p'}} \tag{3}$$

$$(||f+g||^{p} + ||f-g||^{p})^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(||f||^p + ||g||^p)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

上の (1), (2), (3), (4) の f, g をそれぞれ $f+g, f-g$ に置き換える事により，一見 (1), (2), (3), (4) とは異なる 4 つの不等式が得られるが，それらはそれぞれ (1), (2), (3), (4) と同値になる．Clarkson が挙げたのはこの 8 つの不等式である．また，上の 4 つの不等式の関係で

あるが, 一般の Banach 空間における考察を行う事で, (1) と (3), (2) と (4) がそれぞれ同値で (2) と (4) はそれぞれ (1) と (3) から導かれるということがわかる. (下の図を参照.)

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Longleftrightarrow & (3) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (2) & \Longleftrightarrow & (4) \end{array}$$

すなわち, Clarkson の不等式は (1) と (3) の 2 つが本質的であり, しかもその 2 つが同値なのである. 従って, (1) もしくは (3) が証明されれば Clarkson の不等式が証明されたことになる. ここでは (1) を証明していく. (1) の証明は次の不等式の証明に帰着される.

$1 < p \leq 2$ とする. 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(|z+w|^{p'} + |z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

$z = 0$ または $w = 0$ のとき明らかに (5) は成り立つ. $z \neq 0$ かつ $w \neq 0$ のとき (5) は次の不等式の証明に帰着される.

$1 < p \leq 2$ とする. $0 \leq t \leq 1$ に対して,

$$((1+t)^{p'} + (1-t)^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

これから Clarkson の不等式の証明を 5 通り紹介する.

- Clarkson のオリジナルの証明 [2]

  → 二項展開を用いて (6) を証明している.

- 栗山-宮城-岡田-三好の証明 [6]

  → 初等的な手法のみで (6) を証明している.

- Maligranda-Persson の証明 (その 1)[7]

  → $\alpha > 0,\ \omega_1,\ \omega_2 > 0$ としたとき,

  $$f(\alpha) = \left(\frac{\omega_1 b_1^\alpha + \omega_2 b_2^\alpha}{\omega_1 + \omega_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

  という関数の単調増加性を用いて (6) を証明している.

- Maligranda-Persson の証明 (その 2)[7]

  → M.Riesz の convexity thorem[9] を用いて (5) を証明している.

- 補間定理を使った証明 [9]

  → Riesz-Thorin の定理を用いて (5) を証明している.

2．Clarksonのオリジナルの証明

補題 2.1 $0<s<1$ として $\mathbb{R}^+$ 上の関数 f を

$$f(x)=\frac{1-s^x}{x}$$

で定義すると, f は単調減少関数である.

証明 $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x)=\frac{s^x-xs^x\log s-1}{x^2}$$

$g(x)=s^x-xs^x\log s-1$ とおいて, $g(x)$ を微分すると,

$$g'(x)=-xs^x(\log s)^2<0$$

であるから, g は単調減少関数である. 又, $g(x)<g(0)=0$ なので $f'(x)<0$ である. 従って, f は単調減少関数である.

■

補題 2.2 $\alpha>0,-1\leq x\leq 1$ とする. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha \quad (\text{一様収束})$$

である. ただし

$$\binom{\alpha}{n}=\begin{cases}1 & (n=0\text{ のとき})\\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n\neq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

とする.

証明 $a_n=|\binom{\alpha}{n}|$ とする. $n\geq[\alpha]+1$ (ただし $[\alpha]$ は α を超えない最大の自然数) となる任意の自然数 n に対して,

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1}&=\frac{(n+1)|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n|}{(n+1)!}\\&=\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|\ |\alpha-n|}{n!}\\&=\left|\binom{\alpha}{n}\right|(n-\alpha)\\&=na_n-\alpha a_n\end{aligned}$$

となる. 従って, $n\geq[\alpha]+1$ のとき

$$na_n-(n+1)a_{n+1}=\alpha a_n>0 \tag{7}$$

である. このとき, $na_n \geq 0$ なので $\{na_n\}_{n=[\alpha]+1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列である. 従って, ある正数 γ が存在して $na_n \to \gamma \quad (n \to \infty)$ となる. 故に

$$\begin{aligned}
\sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} (na_n - (n+1)a_{n+1}) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=[\alpha]+1}^{k} (na_n - (n+1)a_{n+1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} (([\alpha]+1)a_{[\alpha]+1} - (k+1)a_{k+1}) \\
&= ([\alpha]+1)a_{[\alpha]+1} - \gamma
\end{aligned}$$

となる. 又, (7) より $n \geq [\alpha]+1$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\alpha}(na_n - (n+1)a_{n+1})$$

なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n + \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} (na_n - (n+1)a_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n + \frac{([\alpha]+1)a_{[\alpha]+1} - \gamma}{\alpha}
\end{aligned}$$

となる. 従って $\sum \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ は収束する. よって $-1 \leq x \leq 1$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right| < \infty$$

となり, 絶対収束するので $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ は収束する. 又,

$$\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right|$$

なので, この収束は一様収束である. ここで, $-1 \leq x \leq 1$ に対して

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

とすると, 右辺は一様収束するので f_α は $-1 \leq x \leq 1$ で連続で $-1 < x < 1$ で微分可能で,

$$\begin{aligned}
f'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n
\end{aligned}$$

となる. このとき, 任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{\alpha}{n+1} &= (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\\ &= \alpha\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\\ &= \alpha\binom{\alpha-1}{n}\end{aligned}$$

なので, $f'_\alpha(x) = \alpha f_{\alpha-1}(x)$ である. 又, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1} &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)+n(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n+n)}{n!}\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.\end{aligned}$$

従って,

$$\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}=\binom{\alpha}{n}$$

となる. これは $n=1$ のときも成立する. 以上のことより,

$$\begin{aligned}(1+x)f_{\alpha-1}(x) &= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right)x^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\\ &= f_\alpha(x)\end{aligned}$$

となる. 又,

$$\begin{aligned}(1+x)f'_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x) &= (1+x)\alpha f_{\alpha-1}(x)-\alpha f_\alpha(x)\\ &= \alpha f_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

より $-1<x<1$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha}\right) &= \frac{(1+x)^\alpha f'_\alpha(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}f_\alpha(x)}{(1+x)^{2\alpha}}\\ &=(1+x)^{-\alpha}f'_\alpha(x)-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f_\alpha(x)\\ &=(1+x)^{-\alpha-1}((1+x)f'_\alpha(x)-\alpha f_\alpha(x))\\ &=0\end{aligned}$$

であるから $\frac{f_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha}$ は定数関数となる. これに $x=0$ を代入すると

$$\frac{f_\alpha(0)}{(1+0)^\alpha}=1$$

従って,

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha$$

が成り立つ. f_α の連続性より $x=\pm1$ のときもこれが成り立つ.

■

さて, ここから実際に (6) の証明に入る. まず最初に, (5) が (6) に帰着されることを見ていく. (5) において $z\neq0$ かつ $w\neq0$ のとき, $|z|\geq|w|>0$ と仮定してよい. 両辺を $|z|$ で割り, $\frac{w}{z}=re^{i\theta}$ $(0<r\leq1, 0\leq\theta<2\pi)$ と極分解すると, (5) は

$$(|1+re^{i\theta}|^{p'}+|1-re^{i\theta}|^{p'})^{\frac{1}{p'}}\leq2^{\frac{1}{p'}}(1+r^p)^{\frac{1}{p}}$$

と書き換えられる. ここで,

$$f(\theta)=|1+re^{i\theta}|^{p'}+|1-re^{i\theta}|^{p'}$$

とすると,

$$\begin{aligned}f(\theta)&=(|1+re^{i\theta}|^2)^{\frac{p'}{2}}+(|1-re^{i\theta}|)^2)^{\frac{p'}{2}}\\ &=(1+r^2+2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}}+(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}}\end{aligned}$$

なので, $f(\theta)=f(\pi-\theta)=f(2\pi-\theta)$. よって, $f(\theta)$ の大小は $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ で考えればよい. このとき $f(\theta)$ を微分すると,

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\frac{p'}{2}(1+r^2+2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1}(-2r\sin\theta)+\frac{p'}{2}(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1}(2r\sin\theta)\\ &=-p'r\sin\theta((1+r^2+2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1}-(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{p'}{2}-1})\end{aligned}$$

よって $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $\frac{p'}{2}-1\geq0$ より $f'(\theta)\leq0$ である. 従って $0\leq\theta\leq2\pi$ のとき

$$f(\theta)\leq f(0)=|1+r|^{p'}+|1-r|^{p'}=(1+r)^{p'}+(1-r)^{p'}$$

従って, $0 \leq r \leq 1$ に対して,

$$(1+r)^{p'} + (1-r)^{p'} \leq 2(1+r^p)^{\frac{1}{p-1}} \tag{6'}$$

を示せばよいことになる. (6′) は (6) を $\frac{1}{p'}$ 乗した形だが, これで (5) が (6) に帰着されることがわかった.

$p=2$ のとき, 及び $r=0$ または 1 のとき (6′) は明らか. $1<p<2$ かつ $0<r<1$ のとき $s=\frac{1-r}{1+r}$ とすると, $0<s<1$ で $r=\frac{1-s}{1+s}$ である. これを (6′) に代入すると,

$$\frac{1}{2}((1+s)^p + (1-s)^p) - (1+s^{p'})^{p-1} \geq 0 \tag{8}$$

となる. これを示していく. 補題 2.2 より,

$$\begin{aligned}
((8)\text{の左辺}) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}s^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}(-s)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}s^{p'n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{p}{2n}s^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{p-1}{n}s^{p'n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\binom{p}{2n}s^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}s^{p'(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}s^{2p'n}\right)
\end{aligned}$$

任意の自然数 n に対して

$$g_n(s) = \binom{p}{2n}s^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}s^{p'(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}s^{2p'n}$$

としたとき, $g_n(s) \geq 0$ が示されればよい.

$$\begin{aligned}
g_n(s) &= \frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n)!}s^{2n} \\
&\qquad - \frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n-1)!}s^{p'(2n-1)} \\
&\qquad\qquad + \frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2n-p)}{(2n)!}s^{2p'n} \\
&= \frac{(2-p)\cdots(2n-p)}{(2n-1)!}s^{2n}\left(\frac{p(p-1)}{2n(2n-p)} - \frac{p-1}{2n-p}s^{p'(2n-1)-2n} + \frac{p-1}{2n}s^{2p'n-2n}\right)
\end{aligned}$$

となる. $1<p<2, 0<s<1$ なので $\frac{(2-p)\cdots(2n-p)}{(2n-1)!}s^{2n} > 0$ であるから,

$$h_n(s) = \frac{p(p-1)}{2n(2n-p)} - \frac{p-1}{2n-p}s^{p'(2n-1)-2n} + \frac{p-1}{2n}s^{2p'n-2n}$$

としたとき, $h_n(s) \geq 0$ が示されればよいことになる.

$$h_n(s) = \frac{p-1}{2n-p} - \frac{p-1}{2n} - \frac{p-1}{2n-p} s^{\frac{2n-p}{p-1}} + \frac{p-1}{2n} s^{\frac{2n}{p-1}}$$
$$= \frac{1 - s^{\frac{2n-p}{p-1}}}{\frac{2n-p}{p-1}} - \frac{1 - s^{\frac{2n}{p-1}}}{\frac{2n}{p-1}}$$

となる. ここで, $\alpha = \frac{2n-p}{p-1}$, $\beta = \frac{2n}{p-1}$ とおけば,

$$h_n(s) = \frac{1 - s^\alpha}{\alpha} - \frac{1 - s^\beta}{\beta}$$

と書ける. $1 < p < 2$ なので $\alpha = \frac{2n-p}{p-1} < \beta = \frac{2n}{p-1}$ で, 補題 2.1 より

$$\frac{1 - s^\alpha}{\alpha} \geq \frac{1 - s^\beta}{\beta}$$

となるので $h_n(s) \geq 0$ が示された.
従って,

$$(1+r)^{p'} + (1-r)^{p'} \leq 2(1+r^p)^{\frac{1}{p-1}} \tag{6'}$$

が示された.

■

3. 栗山-宮城-岡田-三好の証明

補題 3.1 $0 < \alpha, \beta < 1$ として $0 < t < 1$ に対して

$$g_1(t) = 1 - t^{2\alpha} - \alpha\beta t^{\alpha-1} + \alpha\beta t^{\alpha+1}$$

とする. このとき, $g_1(t_1) = 0$ で $0 < t < t_1$ ならば $g_1(t) < 0$, $t_1 < t < 1$ ならば $g_1(t) > 0$ となる t_1 が存在する.

証明 $g_1(t)$ を微分すると,

$$g_1'(t) = \alpha t^{\alpha-2}(\beta(\alpha+1)t^2 - 2t^{\alpha+1} - \beta(\alpha-1))$$

ここで

$$h(t) = \beta(\alpha+1)t^2 - 2t^{\alpha+1} - \beta(\alpha-1)$$

とおき, $h(t)$ を微分すると,

$$h'(t) = 2(\alpha+1)t^\alpha(\beta t^{1-\alpha} - 1)$$

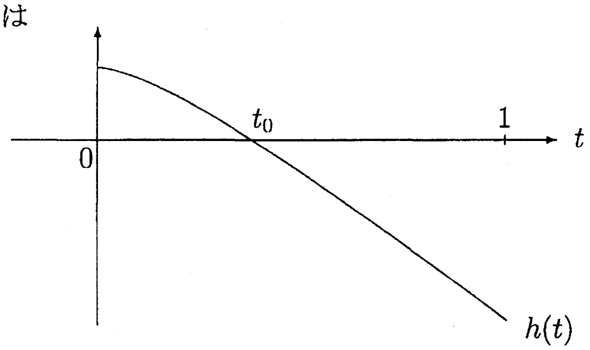
なので $h(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	1
$h'(t)$	0	$-$	
$h(t)$	$-\beta(\alpha-1)$	$\searrow$	$-2(\beta+1)$

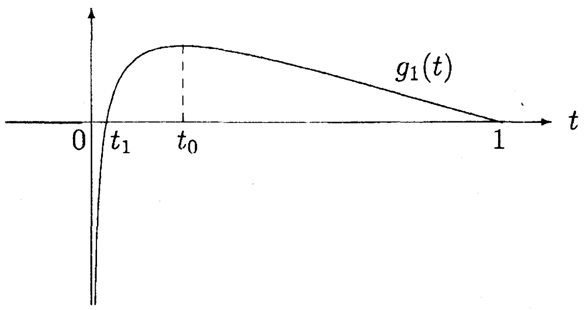
となり, $h(t)$ は単調減少関数である. 又, $0<\alpha,\beta<1$ より,

$$h(0)=-\beta(\alpha-1)>0, h(1)=-2(\beta+1)<0$$

なので $h(t)$ のグラフは



となり, $h(t_0)=0$ なる t_0 が存在する. 明らかに $g_1'(t_0)=0$ であり $g_1(t)$ は t_0 で極値を持つ. $0<t<t_0$ ならば $h(t)>0$ より, $g_1'(t)>0$ なので $g_1(t)$ は増加する. 同様に $t_0<t<1$ ならば $g_1(t)$ は減少する. 又, $g_1(t)\to-\infty \quad (t\to+0)$, $g_2(t)\to 0 \quad (t\to 1-0)$ より, $g_1(t)$ のグラフは



となるので, 補題 3.1 をみたすような t_1 が存在することがわかる.

■

補題 3.2 $0<\alpha,\beta<1$ として $0<t<1$ に対して

$$g_2(t)=\log(1+t)+\beta\log(1-t^\alpha)-\log(1-t)-\beta\log(1+t^\alpha)$$

とする. このとき,

(i) $g_2(t)\to 0 \quad (t\to+0)$, $g_2(t)\to\infty \quad (t\to 1-0)$ となる.

(ii) $g_2(t)$ が $0<t<t_2$ で狭義単調減少, $t_2<t<1$ で狭義単調増加となるような t_2 が存在する.

証明 (i) について

$$\lim_{t\to+0} g_2(t) = \log 1 + \beta\log 1 - \log 1 - \beta\log 1 = 0$$

又,

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \log(1+t) - \log(1+t^\alpha)^\beta + \log(1-t^\alpha)^\beta - \log(1-t) \\ &= \log\frac{1+t}{(1+t^\alpha)^\beta} + \log\frac{(1-t^\alpha)^\beta}{1-t} \end{aligned}$$

と変形して,

$$f(t) = \frac{(1-t^\alpha)^\beta}{1-t}$$

とおくと, L'Hospital の定理より,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to1-0} f(t) &= \lim_{t\to1-0}\frac{(1-t^\alpha)^\beta}{1-t} = \lim_{t\to1-0}\frac{\beta(1-t^\alpha)^{\beta-1}(-\alpha t^{\alpha-1})}{-1} \\ &= \alpha\beta\lim_{t\to1-0}\frac{1}{t^{1-\alpha}(1-t^\alpha)^{1-\beta}} = \infty \end{aligned}$$

従って,

$$\lim_{t\to1-0} g_2(t) = \infty$$

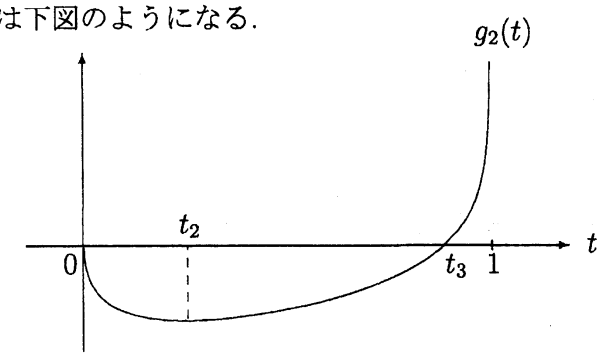
である.
(ii) については $g_2(t)$ を微分すると,

$$g_2'(t) = \frac{2(1-t^{2\alpha}-\alpha\beta t^{\alpha-1}+\alpha\beta t^{\alpha+1})}{(1+t)(1-t)(1-t^\alpha)(1+t^\alpha)} = \frac{2g_1(t)}{(1+t)(1-t)(1-t^\alpha)(1+t^\alpha)}$$

となる. (分母)>0 なので補題 3.1 より, $g_2'(t_2)=0$ で, $0<t<t_2$ ならば $g_2'(t)<0$, $t_2<t<1$ ならば $g_2'(t)>0$ をみたすような t_2 が存在する. よって $g_2(t)$ の増減表は,

t	0	…	t_2	…	1
$g_2'(t)$		$-$	0	$+$	
$g_2(t)$	0	↘		↗	∞

となり $g_2(t)$ のグラフは下図のようになる.



■

補題 3.3 $1 < p < 2$ とする. $0 < t < 1$ に対して

$$g_3(t) = (1+t)^{p'-1}(1-t^{p-1}) - (1-t)^{p'-1}(1+t^{p-1})$$

とする. このとき, $g_3(t_3) = 0$ で $0 < t < t_3$ ならば $g_3(t) < 0$, $t_3 < t < 1$ ならば $g_3(t) > 0$ となるような t_3 が存在する.

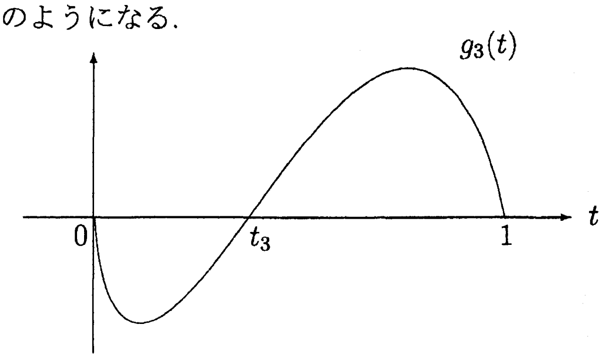
証明

$$g_4(t) = \log(1+t)^{p'-1}(1-t^{p-1}) - \log(1-t)^{p'-1}(1+t^{p-1})$$

とおく.
今, $\alpha = p-1$, $\beta = \frac{1}{p'-1}$ とおくと, $1 < p < 2$ より $0 < \alpha, \beta < 1$ で,

$$g_4(t) = \frac{1}{\beta}((\log(1+t) + \beta\log(1-t^\alpha) - \log(1-t) - \beta\log(1+t^\alpha)) = \frac{1}{\beta}g_2(t)$$

と書き直せる. $\frac{1}{\beta} > 0$ なので, 補題3.2 より $g_4(t) \to 0$ $(t \to +0)$, $g_4(t) \to \infty$ $(t \to 1-0)$ で, $g_4(t)$ が $0 < t < t_2$ で狭義単調減少, $t_2 < t < 1$ で狭義単調増加となるような t_2 が存在する. $g_4(t)$ のグラフは $g_2(t)$ のグラフと同様の形をしているので, $g_4(t_3) = 0$, つまり $g_3(t_3) = 0$ で, $0 < t < t_3$ ならば $g_4(t) < 0$, つまり $g_3(t) < 0$ で, $t_3 < t < 1$ ならば $g_4(t) > 0$, つまり $g_3(t) > 0$ となるような t_3 が存在する. ($g_2(t)$ のグラフを参照.) $g_3(0) = 0, g_3(1) = 0$ より, $g_3(t)$ のグラフは下図のようになる.



■

補題 3.4 $1 < p \leq 2$ として, $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$f(t) = \frac{((1+t)^{p'} + (1-t)^{p'})^{\frac{1}{p'}}}{(1+t^p)^{\frac{1}{p}}}$$

と定めると,

$$f(t) \leq 2^{\frac{1}{p'}}$$

が成り立つ.

証明 $p=2$ のときは明らか. $1<p<2$ として $f(t)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(t) &= ((1-t)^{p'}+(1+t)^{p'})^{\frac{1}{p'}-1}(1+t^p)^{-1-\frac{1}{p'}}((1+t)^{p'-1}(1-t^{p-1})-(1-t)^{p'-1}(1+t^{p-1})) \\ &= ((1-t)^{p'}+(1+t)^{p'})^{\frac{1}{p'}-1}(1+t^p)^{-1-\frac{1}{p'}}g_3(t) \end{aligned}$$

$((1-t)^{p'}+(1+t)^{p'})^{\frac{1}{p'}-1}(1+t^p)^{-1-\frac{1}{p'}}>0$ なので補題3.3より, $f'(t_3)=0$ で $0<t<t_3$ ならば $f'(t)<0$, $t_3<t<1$ ならば $f'(t)>0$ となるような t_3 が存在する. よって $f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	t_3	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$2^{\frac{1}{p'}}$	$\searrow$		$\nearrow$	$2^{\frac{1}{p'}}$

となり,

$$f(t)\le 2^{\frac{1}{p'}}$$

が成り立つ. 即ち,

$$((1+t)^{p'}+(1-t)^{p'})^{\frac{1}{p'}}\le 2^{\frac{1}{p'}}(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

が示された.

■

4. Maligranda-Perssonの証明(その1)

補題 4.1 $\alpha>0$, ω_i, b_i $(i=1,2)>0$ とする. このとき,

$$f(\alpha)=\left(\frac{\omega_1{b_1}^{\alpha}+\omega_2{b_2}^{\alpha}}{\omega_1+\omega_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

とすると, $f(\alpha)$ は単調増加関数である. ※一般に, $-\infty<\alpha<\infty$, ω_i, b_i $(i=1,\cdots,n)>0$ に対して, 補題4.1は成り立つ.

証明 $\alpha<\beta$ とする. $\omega_1+\omega_2=1$ と仮定してよい.

$$r=\frac{\beta}{\alpha},\ r'=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'=\frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

とおくと,

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta-\alpha}{\beta}=1,\ 1<\frac{\beta}{\alpha}=r$$

なので, Hölder の不等式を用いて,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= (\omega_1 b_1^\alpha + \omega_2 b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= (\omega_1^{\frac{1}{r'}}\omega_1^{\frac{1}{r}} b_1^\alpha + \omega_2^{\frac{1}{r'}}\omega_2^{\frac{1}{r}} b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\le \left(\left((\omega_1^{\frac{1}{r'}})^{r'} + (\omega_2^{\frac{1}{r'}})^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \left((\omega_1^{\frac{1}{r}} b_1^\alpha)^r + (\omega_2^{\frac{1}{r}} b_2^\alpha)^r \right)^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= (\omega_1 + \omega_2)^{\frac{1}{r'}} (\omega_1 b_1^\beta + \omega_2 b_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= (\omega_1 b_1^\beta + \omega_2 b_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}} = f(\beta)
\end{aligned}
$$

■

注) $(6')$ は $p \ge 2$ のとき,

$$(1+r)^p + (1-r)^p \le 2(1+r^{p'})^{p-1} \qquad (0 \le r \le 1) \tag{6''}$$

と同値である.

ここでは $p \ge 2$ として $(6'')$ を示していく.

$p = 2$ のとき, 及び $r = 0$ または $r = 1$ のとき $(6'')$ は明らか. $p > 2$ かつ $0 < r < 1$ のとき $u = \frac{1}{r}$ とおいて変形し, 左辺を $f(u)$ とおくと,

$$f(u) = ((1+u)^p + (u-1)^p)^{p'-1} 2^{1-p'} - 1 - u^{p'} \le 0 \quad (u > 1)$$

となる. これを示していく. $f(1) = 0$ であるから, $f'(u) \le 0$ を示せばよい. $f(u)$ を微分すると,

$$f'(u) = p' \left(\left(\frac{(\omega_1 a^{p-2} + \omega_2 b^{p-2})^{\frac{1}{p-2}}}{(\omega_1 a^{p-1} + \omega_2 b^{p-1})^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-2} - u^{p'-1} \right)$$

ただし,

$$\omega_1 = a = \frac{u+1}{2},\ \omega_2 = b = \frac{u-1}{2}$$

とする. 今, $p > 2$ より $p-2 < p-1$ なので補題 3.1 より,

$$
\begin{aligned}
f'(u) &= p' \left(\left(\frac{\left(\frac{\omega_1 a^{p-2} + \omega_2 b^{p-2}}{\omega_1 + \omega_2}\right)^{\frac{1}{p-2}}}{\left(\frac{\omega_1 a^{p-1} + \omega_2 b^{p-1}}{\omega_1 + \omega_2}\right)^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{(\omega_1 + \omega_2)^{\frac{p-2}{p-1}}} - u^{p'-1} \right) \\
&\le p' \left((\omega_1 + \omega_2)^{1 - \frac{p-2}{p-1}} - u^{p'-1} \right) \\
&= p' (u^{\frac{1}{p-1}} - u^{\frac{1}{p-1}}) = 0
\end{aligned}
$$

従って,

$$(1+r)^p + (1-r)^p \le 2(1+r^{p'})^{p-1} \qquad (0 \le r \le 1) \tag{6''}$$

が示された.

■

5．Maligranda-Perssonの証明(その2)

定理 5.1 (M.Rieszの convexity thorem)[9] ※この定理はn次元でも成り立つが，今は2次元で考える．

$(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2,\ \ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

とおく．このとき，

$$N_{\alpha\beta}=\log\max_{(x_1,x_2)\neq(0,0)}\frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

とおくと，$N_{\alpha\beta}$は$\Delta:0\le\alpha\le\beta\le1$上でconvex functionになる．

証明 Δ上の任意の2点$P_1(\alpha_1,\beta_1)$，$P_2(\alpha_2,\beta_2)$に対して，P_1,P_2を結んだ線分をℓとする．$P=t_1P_1+t_2P_2,\ \ t_1>0,t_2>0,t_1+t_2=1$をみたす$\ell$上の任意の点を$P(\alpha,\beta)$とする．このとき，

$$N_{\alpha\beta}\le t_1N_{\alpha_1\beta_1}t_2N_{\alpha_2\beta_2}$$

を示す．ただし，ℓはβ軸と平行でないとする．

$\beta\ge0$，任意のx_1,x_2に対して，

$$(|x_1|^{\frac{1}{\beta}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}$$

は連続関数である．($\beta=0$のときは$\max\{|x_1|,|x_2|\}$になる．) これより，

$$f(\alpha,\beta,x_1,x_2)=\frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

とおくとfは$\alpha\ge0,\ \beta\ge0,\ |x_1|^2+|x_2|^2\neq0$で連続である．ここで$S:|x_1|^2+|x_2|^2=1$上での$f$の最大値を$M_{\alpha\beta}$とおく．

$$\max_{(x_1,x_2)\neq(0,0)}f(\alpha,\beta,x_1,x_2)=\max_{|x_1|^2+|x_2|^2=1}f(\alpha,\beta,x_1,x_2)=M_{\alpha\beta}$$

fはS上で一様連続なので$M_{\alpha\beta}$はα，βの連続関数である．$a=\frac{1}{\alpha}$，$b=\frac{1}{\beta}$とおき，fは(x_1,x_2)で最大値をとるとする．即ち，

$$M_{\alpha\beta}=\frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

で, さらに任意の y_1, y_2, Y_1, Y_2 を

$$\frac{(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)^\alpha}{(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)^\beta}:=F(\varepsilon)$$

とすると,

$$F(0)=M_{\alpha\beta}$$

なので, F は $\varepsilon=0$ で極大値をとる. 即ち,

$$F'(0)=0$$

が成り立つ. ここで $x=x'+ix''$, $y=y'+iy''$ とし, $b>1$ とすると,

$$|x+\varepsilon y|^b=((x'+\varepsilon y')^2+(x''+\varepsilon y'')^2)^{\frac{b}{2}}$$

となる. これを ε について微分すると,

$$(|x+\varepsilon y|^b)'=b((x'+\varepsilon y')^2+(x''+\varepsilon y'')^2)^{\frac{b}{2}-1}((x'+\varepsilon y')y'+(x''+\varepsilon y'')y'')$$

$\varepsilon=0$ のとき,

$$(|x+\varepsilon y|^b)'|_{\varepsilon=0}=b(x'^2+x''^2)^{\frac{b}{2}-1}(x'y'+x''y'')=b|x|^{b-2}(x'y'+x''y'')$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(b|x|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x)}y\right)&=\mathrm{Re}\left(b|x|^{b-1}\frac{\overline{x}}{|x|}y\right)\\&=\mathrm{Re}\left(b|x|^{b-2}(x'-ix'')(y'+iy'')\right)\\&=b|x|^{b-2}(x'y'+x''y'')\end{aligned}$$

なので,

$$(|x+\varepsilon y|^b)'|_{\varepsilon=0}=\mathrm{Re}\left(b|x|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x)}y\right)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}&(F'(\varepsilon)\text{ の分子})\\&=((|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)^\alpha)'(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)^\beta\\&\quad-(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)^\alpha((|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)^\beta)'\\&=(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)^{\alpha-1}(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)^{\beta-1}\\&\quad\times\{\alpha(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)'(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)\\&\qquad-\beta(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)'\}\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}G(\varepsilon)=&\,\alpha(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)'(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)\\&-\beta(|X_1+\varepsilon Y_1|^a+|X_2+\varepsilon Y_2|^a)(|x_1+\varepsilon y_1|^b+|x_2+\varepsilon y_2|^b)'\end{aligned}$$

とおくと,

$$F'(0) = 0,\ (|x+\varepsilon y|^b)'|_{\varepsilon=0} = \mathrm{Re}\left(b|x|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x)}y\right)$$

より,

$$\begin{aligned} G(0) = &\ \mathrm{Re}\left(|X_1|^{a-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_1)}Y_1 + |X_2|^{a-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_2)}Y_2\right)(|x_1|^b + |x_2|^b) \\ &- \mathrm{Re}\left(|x_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_1)}y_1 + |x_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_2)}y_2\right)(|X_1|^a + |X_2|^a) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\frac{|X_1|^a + |X_2|^a}{|x_1|^b + |x_2|^b} = \frac{\mathrm{Re}\left(|X_1|^{a-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_1)}Y_1 + |X_2|^{a-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_2)}Y_2\right)}{\mathrm{Re}\left(|x_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_1)}y_1 + |x_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_2)}y_2\right)}$$

となる. $\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0,\ \theta_1+\theta_2 = 1$ となる $\theta_1,\ \theta_2$ をとり, $y_k = |x_k|^\lambda \mathrm{sign}\,x_k\ (\lambda > 0,\ k = 1, 2)$ とおくと, $|x_k| = |y_k|^{\frac{1}{\lambda}}$ となるので,

$$\begin{aligned} \frac{|X_1|^a + |X_2|^a}{|x_1|^b + |x_2|^b} &= \frac{\mathrm{Re}\left(|X_1|^{a-b}|X_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_1)}Y_1 + |X_2|^{a-b}|X_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_2)}Y_2\right)}{\mathrm{Re}\left(|x_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_1)}|x_1|^\lambda \mathrm{sign}\,x_1 + |x_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,x_2)}|x_2|^\lambda \mathrm{sign}\,x_2\right)} \\ &= \frac{\mathrm{Re}\left(|X_1|^{a-b}|X_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_1)}Y_1 + |X_2|^{a-b}|X_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_2)}Y_2\right)}{(|x_1|^{\lambda+b-1} + |x_2|^{\lambda+b-1})^{\theta_1+\theta_2}} \\ &= \frac{\mathrm{Re}\left(|X_1|^{a-b}|X_1|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_1)}Y_1 + |X_2|^{a-b}|X_2|^{b-1}\overline{(\mathrm{sign}\,X_2)}Y_2\right)}{(|x_1|^{\lambda+b-1} + |x_2|^{\lambda+b-1})^{\theta_1}(|y_1|^{\frac{\lambda+b-1}{\lambda}} + |y_2|^{\frac{\lambda+b-1}{\lambda}})^{\theta_2}} \end{aligned} \tag{9}$$

$\beta_1 = \frac{1}{\lambda+b-1},\ \beta_2 = \frac{\lambda}{\lambda+b-1}$ とおくと $(b-1)\beta_1 + \beta_2 = 1$ 即ち $(1-\beta)\beta_1 + \beta\beta_2 = \beta$ で, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 1$ なる $k,\ k_1,\ k_2$ (ただし $k = \frac{a}{a-b}$ とおく.) に対して Hölder の不等式を用いると,

$$\begin{aligned} ((9)\text{の右辺}) &\le \frac{(|X_1|^{(a-b)k} + |X_2|^{(a-b)k})^{\frac{1}{k}}(|X_1|^{(b-1)k_1} + |X_2|^{(b-1)k_1})^{\frac{1}{k_1}}(|Y_1|^{k_2} + |Y_2|^{k_2})^{\frac{1}{k_2}}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}} + |x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\theta_1}(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}} + |y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\theta_2}} \\ &= \frac{(|X_1|^a + |X_2|^a)^{\frac{a-b}{a}}(|X_1|^{(b-1)k_1} + |X_2|^{(b-1)k_1})^{\frac{1}{k_1}}(|Y_1|^{k_2} + |Y_2|^{k_2})^{\frac{1}{k_2}}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}} + |x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\theta_1}(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}} + |y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\theta_2}} \end{aligned} \tag{10}$$

$\theta_1 + \theta_2 = 1$ をみたすように $\theta_1 = \beta_1(b-1),\ \theta_2 = \beta_2,\ (b-1)k_1 = \frac{1}{\alpha_1},\ k_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ とおく. $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{b}{a}$ より $(b-1)\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{b}{a}$ 即ち $(1-\beta)\alpha_1 + \beta\alpha_2 = \alpha$ で,

$$((10)\text{の右辺}) = \frac{(|X_1|^a + |X_2|^a)^{\frac{a-b}{a}}(|X_1|^{\frac{1}{\alpha_1}} + |X_2|^{\frac{1}{\alpha_1}})^{(b-1)\alpha_1}(|Y_1|^{\frac{1}{\alpha_2}} + |Y_2|^{\frac{1}{\alpha_2}})^{\alpha_2}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}} + |x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\beta_1(b-1)}(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}} + |y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\beta_2}}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{(|X_1|^a+|X_2|^a)^{1-\frac{a-b}{a}}}{|x_1|^b+|x_2|^b} &\leq \frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha_1}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha_1}})^{(b-1)\alpha_1}(|Y_1|^{\frac{1}{\alpha_2}}+|Y_2|^{\frac{1}{\alpha_2}})^{\alpha_2}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\beta_1(b-1)}(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}}+|y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\beta_2}} \\
\frac{(|X_1|^a+|X_2|^a)^{\alpha}}{(|x_1|^b+|x_2|^b)^{\beta}} &\leq \frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha_1}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha_1}})^{\beta(b-1)\alpha_1}(|Y_1|^{\frac{1}{\alpha_2}}+|Y_2|^{\frac{1}{\alpha_2}})^{\beta\alpha_2}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\beta(b-1)\beta_1}(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}}+|y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\beta\beta_2}} \\
&= \left(\frac{(|X_1|^{\frac{1}{\alpha_1}}+|X_2|^{\frac{1}{\alpha_1}})^{\alpha_1}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta_1}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta_1}})^{\beta_1}}\right)^{1-\beta}\left(\frac{(|Y_1|^{\frac{1}{\alpha_2}}+|Y_2|^{\frac{1}{\alpha_2}})^{\alpha_2}}{(|y_1|^{\frac{1}{\beta_2}}+|y_2|^{\frac{1}{\beta_2}})^{\beta_2}}\right)^{\beta} \\
&= M_{\alpha_1\beta_1}^{1-\beta}M_{\alpha_2\beta_2}^{\beta}
\end{aligned}
$$

従って,

$$M_{\alpha\beta} \leq M_{\alpha_1\beta_1}^{1-\beta}M_{\alpha_2\beta_2}^{\beta}$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
\log M_{\alpha\beta} &\leq (1-\beta)\log M_{\alpha_1\beta_1} + \beta\log M_{\alpha_2\beta_2} \\
N_{\alpha\beta} &\leq (1-\beta)N_{\alpha_1\beta_1}\beta N_{\alpha_2\beta_2}
\end{aligned}
$$

が示された.

■

系 5.2 定理 5.1 において特に $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$N_{\alpha\beta} = \log \max_{(x_1,x_2)\neq(0,0)} \frac{(|x_1+x_2|^{\frac{1}{\alpha}}+|x_1-x_2|^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(|x_1|^{\frac{1}{\beta}}+|x_2|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

となり $N_{\alpha\beta}$ は Δ 上で convex function になる.

さて, ここから (5) の証明に入る. 今, $z, w \in \mathbb{C}$ として

$$f(\alpha,\beta) = \log \max_{(z,w)\neq(0,0)} \frac{(|z+w|^{\frac{1}{\alpha}}+|z-w|^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(|z|^{\frac{1}{\beta}}+|w|^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}}$$

という関数を考えると系 5.2 より f は convex function になる.

$$g(\alpha,\beta) = (1-\beta)\log 2$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
f(1/2,1/2) &= g(1/2,1/2) = 2^{-1}\log 2 \\
f(0,0) &= g(0,0) = \log 2 \\
f(0,1) &= g(0,1) = 0
\end{aligned}
$$

で, f が convex function なので,

$$f(\alpha,\beta) \le g(\alpha,\beta) = (1-\beta)\log 2$$

が成り立つ. 今, $\alpha = \frac{1}{p'}$, $\beta = \frac{1}{p}$ ととると, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \le \beta \le 1$ となるが明らかに $(\alpha,\beta) \in \Delta$ なので

$$\log\left(\frac{(|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}}}{(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}}}\right) \le \log 2^{\frac{1}{p'}}$$

が成り立つ. 即ち,

$$(|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \le 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

が成り立つ.

■

6. 補間定理を使った証明

定理 6.1 (Riesz-Thorin の定理)
$\Omega = (\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を有限測度空間, $1 \le p_1, p_2, q_1, q_2 \le \infty$, $M_1, M_2 > 0$ とする.

$$||A : L^{p_1} \to L^{q_1}|| = M_1,\ ||A : L^{p_2} \to L^{q_2}|| = M_2$$

となるとき, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} \quad (0 < \theta < 1)$ となる p, q に対して

$$||A : L^p \to L^q|| \le M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}$$

が成立する.

(5) の証明に入る. $1 \le p \le \infty$ に対して $(\mathbb{C}^2, ||\cdot||_p) = \ell_p^2$ とおく. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと, $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ z-w \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \left\|A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right\|_2^2 &= \left\|\begin{pmatrix} z+w \\ z-w \end{pmatrix}\right\|_2^2 \\ &= |z+w|^2 + |z-w|^2 \\ &= 2(|z|^2+|w|^2) = 2\left\|\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right\|_2^2 \end{aligned}$$

であるから

$$||A : \ell_2^2 \to \ell_2^2|| = 2^{\frac{1}{2}}$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned}\left|\left|A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right|\right|_\infty &= \left|\left|\begin{pmatrix} z+w \\ z-w \end{pmatrix}\right|\right|_\infty \\ &= \max\{|z+w|, |z-w|\} \\ &\leq |z| + |w| = \left|\left|\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right|\right|_1\end{aligned}$$

が成り立ち, $\left|\left|A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty = 1 = \left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right|_1$ より,

$$||A : \ell_1^2 \to \ell_\infty^2|| = 1$$

となる. $1 \leq p \leq 2$ であるから $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ を満たす θ が存在する. このとき $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty} = \frac{1-\theta}{2}$ である. よって定理 5.1 より

$$||A : \ell_p^2 \to \ell_{p'}^2|| \leq 2^{\frac{1-\theta}{2}} \cdot 1^\theta = 2^{\frac{1}{p'}}$$

が成立するので,

$$\begin{aligned}\left|\left|A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right|\right|_{p'} &\leq ||A : \ell_p^2 \to \ell_{p'}^2|| \left|\left|\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right|\right|_p \\ &\leq 2^{\frac{1}{p'}}\left|\left|\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right|\right|_p\end{aligned}$$

従って,

$$(|z+w|^{p'} + |z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

が示された.

■

参考文献

[1] P. Jordan and J. von Neumann, "On inner products in linear metric spaces", Ann. of Math. **36** (1935), 719-723.

[2] J. A. Clarkson, "Uniformly convex spaces", Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[3] J. A. Clarkson, "The von Neumann-Jordan constant for the Lebegue space", Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[4] 加藤 幹雄, "Norm Inequalities and Some Geometrical Contents for Banach Spaces", 1998 年実関数論・関数解析学合同シンポジウム講演集録.

[5] M. Kato and Y. Takahashi, "Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces", Math. Nachr. **186** (1997), 187-196.

[6] K. Kuriyama, M. Miyagi, M. Okada and T. Miyoshi, "On Generalized Clarkson's Inequalities", First Korean-Japanese Colloquium on Finete or Infinite Dimensional Complex Analysis, (1993), 83-88.

[7] L. Maligranda and L. E. Persson, "On Clarkson's Inequalities and Interpolation", Math. Nachr. **155**, (1992), 187-197.

[8] 渡利 千波, Clarkson の不等式に関連して, 1993 年実解析セミナー講演集録.

[9] A. Zygmund, "Trigonometrical Series", Cambridge Univ. Press (1968).