数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 118-133

3 次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面について

神戸大学大学院自然科学研究科 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
Department of Mathematics, Kobe University

序

3 次元 de Sitter 空間 $\mathbb{S}^3_1$ 内の空間的な平均曲率 1 (CMC 1) をもつはめ込みには, 有理型関数と正則 1 形式を用いた表現公式が知られている (相山・芥川の表現公式 [AA]). この公式は 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の CMC 1 はめ込みに関する Bryant の表現公式 ([B, UY1]) に類似の公式である. $\mathbb{H}^3$ 内の CMC 1 はめ込みは, この Bryant の表現公式を用いて多くの研究者によって研究されてきた ([CHR, RUY1, RUY2, UY1, UY2, UY3, Yu]). 特に完備かつ有限全曲率をもつはめ込みに関しては, その大域的な性質についても研究されている. 一方, $\mathbb{S}^3_1$ 内の空間的 CMC 1 はめ込みは平坦かつ全臍的なものに限られることが知られている ([Ak, R]). この状況は, 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面論 (Weierstrass の表現公式を用いて大域的な議論が活発に行われている) と 3 次元 Lorentz 空間 $\mathbb{R}^3_1$ 内の空間的極大曲面論 (同様の表現公式 [Ko, Mc] があるが, 完備なはめ込みは平面に限られる) の関係によく似ている. 近年, 梅原雅顕氏, 山田光太郎氏は, $\mathbb{R}^3_1$ 内の空間的極大曲面にある種の特異点を許容した新しい曲面のクラスを定め, それらを maxface と名付けた. そして maxface がもつ大域的な性質について興味深い結果を得た ([UY4]). そこで, 本稿ではまず $\mathbb{S}^3_1$ 内の空間的 CMC 1 曲面にある種の特異点を許容した新しい曲面のクラス (ここでは CMC 1 face と名付けた) を考え, その上で改めてそれらの完備性や有限性を定義する.

$\mathbb{R}^3$ 内の完備かつ有限全曲率をもつ極小はめ込みの全曲率は, Osserman の不等式と呼ばれる不等式を満たすことが知られている ([O1, Theorem 3.2]). さらに等号が成り立つための必要十分条件は [JM, Theorem 4] で与えられている. この不等式は, 一般の完備かつ有限全曲率をもつ Riemann 多様体が満たす Cohn-Vossen の不等式より強い不等式である. Osserman の不等式を, Gauss 写像の写像度が満たす不等式とみな

すと, $\mathbb{H}^3$ 内の CMC 1 はめ込みや $\mathbb{R}^3_1$ 内の maxface に対しても同様の不等式が (さらに等号条件も) 成り立つことが知られている ([UY1, UY2] と [UY4] 参照).

$\mathbb{S}^3_1$ 内の CMC 1 face に関しても同様の結果が得られた ([F, Theorem 3.9]). 本稿ではこの定理を紹介し, また CMC 1 face の例もいくつか紹介する.

1. CMC 1 faces

$\mathbb{R}^4_1$ を 4 次元 Lorentz 空間, $\langle,\rangle$ をその Lorentz 内積とする:

$$\langle (x_0,x_1,x_2,x_3),(y_0,y_1,y_2,y_3)\rangle = -x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

このとき, この部分多様体

$$\mathbb{S}^3_1=\mathbb{S}^3_1(1)=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^4_1 \mid -x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$$

とその誘導計量は, 定曲率 1 の単連結 Lorentz 多様体となる. $\mathbb{S}^3_1$ を 3 次元 de Sitter 空間という. 今, $\mathbb{R}^4_1$ と 2 次の Hermite 行列を対応

$$\mathbb{R}^4_1 \ni X=(x_0,x_1,x_2,x_3)\leftrightarrow X=\sum_{k=0}^{3}x_ke_k=\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}$$

によって同一視する. 但し

$$e_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

すると $\mathbb{S}^3_1$ は

$$\mathbb{S}^3_1=\{X \mid X^*=X,\det X=-1\}=\{Fe_3F^* \mid F\in SL(2,\mathbb{C})\}$$

と表される (但し $X^*={}^t\overline{X}$). また,

$$\langle X,Y\rangle=-\frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(Xe_2({}^tY)e_2\right),\quad \text{特に}\quad \langle X,X\rangle=-\det X$$

が成り立つ. $\mathbb{S}^3_1$ へのはめ込みは, その誘導計量が正定値になるとき, **空間的**であるという.

$\mathbb{S}^3_1$ 内の単連結な空間的 CMC 1 はめ込みに関して, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1. (**相山・芥川の表現公式** [AA]) $D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $z_0 \in D$ とする. $g : D \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$, ω をそれぞれ D 上の有理型関数, 正則 1 形式で

$$d\hat{s}^2 = (1 + |g|^2)^2 \omega\bar{\omega} \tag{1.1}$$

が D の Riemann 計量を定めるものとする. このとき, $F = (F_{jk}) : D \to SL(2, \mathbb{C})$ を

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F(z_0) = e_0. \tag{1.2}$$

を満たす正則はめ込みとすると,

$$f := Fe_3F^* : D \to \mathbb{S}^3_1 \tag{1.3}$$

は空間的 CMC 1 はめ込みとなる. D 上の誘導計量 $ds^2 = f^*(ds^2_{\mathbb{S}^3_1})$, f の第 2 基本形式 h, f の双曲的 Gauss 写像 G は以下で与えられる:

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \omega\bar{\omega}, \quad h = Q + \overline{Q} + ds^2, \quad G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}, \tag{1.4}$$

ここで $Q = \omega dg$ は f の Hopf 微分と呼ばれる.

逆に単連結な空間的 CMC 1 はめ込みはこのように構成することができる.

注意 1.2. 定理 1.1 に関するいくつかの注意:

(1) g は**第 2 Gauss 写像**, 対 (g, ω) は **Weierstrass data** と呼ばれる.

(2) f の単位法ベクトル場 $N : D \to \mathbb{H}^3$ は

$$N = \frac{1}{|g|^2 - 1} F \begin{pmatrix} |g|^2 + 1 & 2g \\ 2\bar{g} & |g|^2 + 1 \end{pmatrix} F^*,$$

で与えられる. 但し

$$\mathbb{H}^3 = \{X \mid X^* = X, \det X = 1, \mathrm{tr} X > 0\} = \{FF^* \mid F \in SL(2, \mathbb{C})\}$$

とみなす ([KY, Lemma 3.1] 参照).

(3) (双曲的 Gauss 写像の幾何学的な意味) $\mathbb{S}^3_1$ の未来的 (即ち $x_0 > 0$) な理想境界を $\mathbb{S}^2_\infty$ とし, これを立体射影によって Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視する. はめ込み $f : D \to \mathbb{S}^3_1$ 上の各点 $f(z)$ か

ら単位法ベクトル $N(z)$ 方向に測地線を伸ばし，それが $\mathbb{S}^2_\infty$ とぶつかる点が双曲的 Gauss 写像の値 $G(z)$ である．

(4) (1.2) を満たす正則はめ込み F に対して，$\hat{f} := FF^* : D \to \mathbb{H}^3$ は共形 CMC 1 はめ込みを与える．また，その誘導計量 $\hat{f}^*(ds^2_{\mathbb{H}^3})$ は (1.1) の $d\hat{s}^2$ に一致し，第 2 基本形式 は $-Q-\overline{Q}+d\hat{s}^2$ で与えられる．$\hat{f}$ の双曲的 Gauss 写像は f の双曲的 Gauss 写像 G に一致する．

(5) 梅原・山田 [UY1] の (2.6) によると，G と g と Q の間には次の関係がある：

$$2Q = S(g) - S(G).$$

但し $S(g) = S_z(g)dz^2$ とし，

$$S_z(g) = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 \qquad (' = d/dz)$$

は g の Schwarz 微分とする．

相山・芥川の表現公式を，単連結とは限らないある種の特異点を許容した曲面に拡張したい．そのために，まず次の定義を与える ([UY4, Definition 2.2] 参照)．

定義 1.3. M を向き付け可能な 2 次元多様体，$f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を滑らかな写像とする．$ds^2 = f^*(ds^2_{\mathbb{S}^3_1})$ とおく．次の (1)–(3) を満たす f を **CMC 1 face** と呼ぶ：

(1) 稠密な開集合 $W \subset M$ が存在して，$f|_W : W \to \mathbb{S}^3_1$ は空間的 CMC 1 はめ込み，

(2) 任意の $p \in M \backslash W$ に対して p の近傍 U と C^1 級関数 $\beta : U \cap W \to \mathbb{R}^+$ が存在して，βds^2 は U 上の C^1 級 Riemann 計量に拡張される，

(3) M の各点 p で $df(p) \neq 0$.

CMC 1 face $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ は，はめ込みではないから，f による誘導計量から M に複素構造を入れることはできない．しかし，次の命題が成り立つ：

命題 1.4. M を向き付け可能な 2 次元多様体とする．$f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を CMC 1 face とし，$W \subset M$ を $f|_W$ が CMC 1 はめ込みとなるような稠

密な開集合とする．このとき，次の (1)–(2) を満たす M 上の複素構造 J が存在する：

(1) $f|_W$ は J に関して共形的である，

(2) J に関して正則なはめ込み $F:\widetilde{M}\to SL(2,\mathbb{C})$ が存在して

$$\det(dF)=0 \quad \text{かつ} \quad f\circ\varrho=Fe_3F^*,$$

を満たす．但し $\varrho:\widetilde{M}\to M$ は M の普遍被覆とする (この F は f の**正則零持ち上げ**と呼ばれる)．

この命題により，CMC 1 face $f:M\to\mathbb{S}^3_1$ の M は常に複素構造を持つことがわかる．以下本稿では，この命題によって誘導される複素構造を用いることで，M を Riemann 面とみなすことにする．

命題 1.5. M を Riemann 面とし，$F:M\to SL(2,\mathbb{C})$ を正則零はめ込みとする．また，対称な $(0,2)$ 型テンソル場

$$\det[d(Fe_3F^*)] \tag{1.5}$$

は恒等的には零でないと仮定する．このとき，$f=Fe_3F^*:M\to\mathbb{S}^3_1$ は CMC 1 face となる．また，$p\in M$ が f の特異点であるための必要十分条件は $\det[d(Fe_3F^*)]_p=0$ で与えられる．さらに，f の任意の特異点 $p\in M$ に対して

$$-\det[d(FF^*)]_p \quad \text{は正定値な対称 } (0,2) \text{ 型テンソルになる．} \tag{1.6}$$

命題 1.4, 1.5 により，相山・芥川の表現公式を (単連結とは限らない) CMC 1 face に拡張することができる：

定理 1.6. M を Riemann 面，$z_0\in M$ とする．g,ω をそれぞれ $\widetilde{M}$ 上の有理型関数と正則 1 形式で，(1.1) で与えられる $d\hat{s}^2$ が $\widetilde{M}$ 上の Riemann 計量を定めるものとする．但し $\widetilde{M}$ は M の普遍被覆面とする．また，$|g|$ は恒等的には 1 にならないとする．正則はめ込み $F=(F_{jk}):\widetilde{M}\to SL(2,\mathbb{C})$ を (1.2) を満たすものとする．このとき，(1.3) で定義される $f:\widetilde{M}\to\mathbb{S}^3_1$ は CMC 1 face となる．M への誘導計量 ds^2, f の第 2 基本形式 h, 双曲的 Gauss 写像 G は (1.4) で与えられる．CMC 1 face の特異点集合は $\{p\in\widetilde{M}\,|\,|g(p)|=1\}$ となる．

逆に，M を Riemann 面とし，$f:M\to\mathbb{S}^3_1$ を CMC 1 face とすると，$\widetilde{M}$ 上の有理型関数 g と正則 1 形式 ω が存在して，$|g|$ は恒等的には 1

にならない, かつ $d\hat{s}^2$ は $\widetilde{M}$ 上の Riemann 計量, かつ (1.3) を満たす. 但し $F:\widetilde{M}\to SL(2,\mathbb{C})$ は (1.2) を満たすはめ込みとする.

注意 1.7. 一般に F は M 上一価にならないが, 注意 1.2 (3) より, G は M 上の一価関数を定める. また, (1.4) より, Hopf 微分 Q も M 上一価である.

2. 楕円型エンドをもつ CMC 1 FACES

$\mathbb{S}^3_1$ 内の完備な空間的 CMC 1 はめ込みは, 平坦かつ全臍的なものに限られることが知られている ([Ak, R], 例 4.1 も参照). CMC 1 face の完備性と有限性を以下で定義する ([UY4, Definition 4.1] 参照):

定義 2.1. M を Riemann 面, $f:M\to\mathbb{S}^3_1$ を CMC 1 face とする. $ds^2=f^*(ds^2_{\mathbb{S}^3_1})$ とおく. f が **完備** (resp. **有限型**) であるとは, コンパクト集合 $C\subset M$ と, M 上の対称な $(0,2)$ 型テンソル場 T が存在して, T は $M\setminus C$ では恒等的に零, かつ ds^2+T が完備 (resp. 有限全曲率をもつ) Riemann 計量となることである.

注意 2.2. CMC 1 face $f:M\to\mathbb{S}^3_1$ が M 上完備 (または有限型) であったとしても, 一般に f の特異点集合は $\widetilde{M}$ 上コンパクトにはならないので, $f\circ\varrho:\widetilde{M}\to\mathbb{S}^3_1$ は完備 (または有限型) とは限らない. 但し $\varrho:\widetilde{M}\to M$ は M の普遍被覆とする.

$f:M\to\mathbb{S}^3_1$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とする. このとき (M,ds^2+T) は完備かつ有限全曲率をもつ Riemann 多様体であるから, [H] より, M はコンパクトな Riemann 面から有限個の点を除いたものと微分同相である. 除いた点は, CMC 1 face の**エンド**に対応する.

$\varrho:\widetilde{M}\to M$ を M の普遍被覆とする. $F:\widetilde{M}\to SL(2,\mathbb{C})$ を f の正則零持ち上げとする. $\gamma:[0,1]\to M$ を M 上の閉曲線とする. τ を $\widetilde{M}$ の γ に関するデッキ変換とする. このとき, F のモノドロミー表現 Φ_γ は

$$F\circ\tau=F\Phi_\gamma$$

で与えられる. 今, $f=Fe_3F^*$ は M 上 well-defined であるから, 任意の閉曲線 γ に対して $\Phi_\gamma\in SU(1,1)$ が成り立つ. 故に Φ_γ は次のいず

れか 1 つと相似である:

$$
(2.1) \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \pm \begin{pmatrix} e^{s} & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

但し $\theta \in [0, 2\pi)$ かつ $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

定義 2.3. $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とし, F をその正則零持ち上げとする. f のエンドは, そのエンドのモノドロミー表現が $\mathcal{E}$ と相似のとき **楕円型エンド**, $\mathcal{H}$ と相似のとき **双曲型エンド**, $\mathcal{P}$ と相似のとき **放物型エンド**と呼ばれる.[1]

注意 2.4. $SU(1,1)$ の任意の行列

$$
X = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in SU(1,1)
$$

は, 対応 $\mathbb{H}^2 \ni w \mapsto (pw+q)/(\bar{q}w+\bar{p}) \in \mathbb{H}^2$ によって Poincaré 円盤 $\mathbb{H}^2 = (\{w \in \mathbb{C} \,|\, |w| < 1\}, ds^2_{\mathbb{H}^2} = 4dwd\bar{w}/(1-|w|^2)^2)$ に等長的に作用する. X による固定点が, $\mathbb{H}^2$ 内に 1 点のみあるとき X は楕円型, $\mathbb{H}^2$ 内には無く $\partial\mathbb{H}^2$ 上に 2 点あるとき双曲型, $\mathbb{H}^2$ 内には無く $\partial\mathbb{H}^2$ 上に 1 点あるとき放物型と呼ばれている. 定義 2.3 の用語はこのことに由来している.

$SU(2)$ の行列は常に $\mathcal{E}$ と相似であるから, $\mathbb{H}^3$ 内の CMC 1 はめ込みと, 楕円型のエンドをもつ $\mathbb{S}^3_1$ 内の CMC 1 face は類似の性質をもつ. 以下、本稿では楕円型のエンドをもつ CMC 1 face のみを扱うことにする.

命題 2.5. $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とする. f の各エンドは楕円型とする. このとき, コンパクトな Riemann 面 $\overline{M}$ と有限個の点 $p_1, \dots, p_n \in \overline{M}$ が存在して M は $\overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ と双正則である. さらに, f の Hopf 微分 Q は $\overline{M}$ 上の有理型な 2 次微分に拡張される.

定義 2.6. $f : M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \to \mathbb{S}^3_1$ の双曲的 Gauss 写像 G が p_j $(j = 1, \dots, n)$ で高々極をもつとき, 楕円型エンド p_j は**正則**, 真性特異点をもつとき**非正則**であるという.

[1]講演時は, 楕円型エンドのことを**ユニタリーエンド**と呼び, 他のエンドは定義しなかった.

f の Hopf 微分 Q は各エンドに有理型に拡張されるから, 注意 1.2 (4), (5) より次のことがわかる:

命題 2.7. [B, Proposition 6] 楕円型エンド p_j $(j=1,\dots,n)$ が正則であるための必要十分条件は, Q が p_j で高々 2 位の極をもつことである.

3. Osserman 型不等式

$f: M = \overline{M} \setminus \{p_1,\dots,p_n\} \to \mathbb{S}^3_1$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とする. G, Q をそれぞれ f の双曲的 Gauss 写像, Hopf 微分とする.

定義 3.1. M に Riemann 計量 $d\hat{s}^{\sharp 2}$ を

$$d\hat{s}^{\sharp 2} := (1+|G|^2)^2 \frac{Q}{dG}\overline{\left(\frac{Q}{dG}\right)} \tag{3.1}$$

で与える. また,

$$d\hat{\sigma}^{\sharp 2} := (-K_{d\hat{s}^{\sharp 2}})d\hat{s}^{\sharp 2} = \frac{4dGd\overline{G}}{(1+|G|^2)^2}$$

とおく.

注意 3.2. G, Q はともに M 上一価であるから, $d\hat{s}^{\sharp 2}$, $d\hat{\sigma}^{\sharp 2}$ もともに M 上一価となる.

定義 3.3. ([UY3, Definition 2.1], [Yam] 参照) $\overline{M}$ 上の擬計量 $d\varsigma^2$ が p_j でオーダー m_j をもつとは, $d\varsigma^2$ が $u_j|z-p_j|^{2m_j}dzd\bar{z}$ $(u_j \neq 0)$ に漸近することとする. m_j を $\mathrm{Ord}_{p_j}(d\varsigma^2)$ で表す. 特に, $d\varsigma^2$ が p_j のまわりで Riemann 計量を与えているなら, $\mathrm{Ord}_{p_j}(d\varsigma^2)=0$ である.

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$, $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ とする.

命題 3.4. $f: \Delta^* \to \mathbb{S}^3_1$ を原点 $z=0$ で正則な楕円型エンドをもつ CMC 1 face とする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{Ord}_0(d\hat{\sigma}^{\sharp 2}) - \mathrm{Ord}_0(Q) \geq 2. \tag{3.2}$$

さらに, 等号が成り立つための必要十分条件はエンドが埋め込まれていることである.

Proof. 証明の本質的な部分は, [UY1, Lemma 5.3] と [UY2, Lemma 3] に依存している. まず, $F : \widetilde{\Delta^*} \to SL(2,\mathbb{C})$ を f の正則零持ち上げ (即ち, $Fe_3F^* = f$) とすると, F は (1.2) を満たす. この方程式は [UY1] の (1.5) 式と同じであるから, f に [UY1, Lemma 5.3] を適用することができる. 即ち, ある $\Lambda \in SL(2,\mathbb{C})$ が存在して

$$\Lambda F = \begin{pmatrix} z^{\lambda_1}a(z) & z^{\lambda_2}b(z) \\ z^{\lambda_1-m_1}c(z) & z^{\lambda_2-m_2}d(z) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

が成り立つ. 但し a, b, c, d は原点で零にならない Δ 上の正則関数とし, λ_1, λ_2, m_1, m_2 は以下で与えられる定数とする:

(1) $\mathrm{Ord}_0 Q = -2$ のとき, $m_1 = m_2$, $\lambda_1 = (-\mu + m_j)/2 < \lambda_2 = (\mu + m_j)/2$,

(2) $\mathrm{Ord}_0 Q \geq -1$ のとき, $m_1 = -(\nu+1) < m_2 = 2\mu + \nu + 1$, $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 = m_2$, $\nu = \mathrm{Ord}_0 Q - \mu + 1$.

そこで $\hat{f} = (\Lambda F)(\Lambda F)^*$ とおくと,

$$(\Lambda F)\circ\tau = \Lambda F P, \quad \text{但し} \quad P = \begin{pmatrix} e^{2\pi\lambda_1 i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\lambda_2 i} \end{pmatrix},$$

より, f が Δ^* 上一価となることと $\hat{f}$ が Δ^* 上一価となることとが同値であることがわかる. また, f と $\hat{f}$ は同じ Hopf 微分 Q をもつから, これらのエンドの正則性も同値となる. よって [UY2, Lemma 3] より (3.2) を得る. さらに, $m_1 < m_2$ などに注意して $(\Lambda F)(\Lambda F)^*$ と $(\Lambda F)e_3(\Lambda F)^*$ の各成分における leading term を比較することで, f が埋め込まれていることと $\hat{f}$ が埋め込まれていることとが同値であることもわかる. □

補題 3.5. ([KTUY, Lemma 4.1], [Yu] 参照) $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を CMC 1 face とする. f の各エンドは正則な楕円型エンドとする. f が完備かつ有限型ならば, $d\hat{s}^{\sharp 2}$ は M 上完備かつ有限全曲率をもつ. 特に,

$$\mathrm{Ord}_{p_j}(d\hat{s}^{\sharp 2}) \leq -2, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

が成り立つ.

定理 3.6. (**Osserman 型不等式**) $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とする. f は n 個のエンドをもち, それらは全て楕円型で

あるとする. G を f の双曲的 Gauss 写像とする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$2\deg(G) \geq -\chi(M) + n, \tag{3.5}$$

ただし $\deg(G)$ は G の写像度 (G が真性特異点をもつときは, $\deg(G) = \infty$ と定める), $\chi(M)$ は M の Euler 数を表す. さらに, 等号が成り立つための必要十分条件は, 各エンドが正則かつ埋め込まれていることである.

Proof. 命題 2.5 より, $M = \overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ とおくことができる. 但し, $\overline{M}$ はコンパクトな Riemann 面, $p_1, \ldots, p_n \in \overline{M}$. もし f が非正則なエンドをもつならば, 定義より G はそれらのエンドで真性特異点をもつから $\deg(G) = \infty$ となり, 従って (3.5) は自動的に成り立つ. よって f の各エンドは正則であると仮定しても一般性を失わない. Riemann-Hurwicz の公式と Gauss の方程式

$$d\hat{s}^{\sharp 2} d\hat{\sigma}^{\sharp 2} = 4Q\overline{Q} \tag{3.6}$$

より,

$$\begin{aligned}
2\deg(G) &= \chi(\overline{M}) + \sum_{p \in \overline{M}} \mathrm{Ord}_p d\hat{\sigma}^{\sharp 2} \\
&= \chi(\overline{M}) + \sum_{p \in \overline{M}} \left(\mathrm{Ord}_p Q - \mathrm{Ord}_p d\hat{s}^{\sharp 2}\right) \\
&= \chi(\overline{M}) + \sum_{p \in \overline{M}} \mathrm{Ord}_p Q - \sum_{p \in M} \mathrm{Ord}_p d\hat{s}^{\sharp 2} - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ord}_{p_j} d\hat{s}^{\sharp 2} \\
&= -\chi(\overline{M}) - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ord}_{p_j} d\hat{s}^{\sharp 2} \\
&\geq -\chi(\overline{M}) + 2n \quad ((3.4) \text{ より}) \\
&= -\chi(M) + n
\end{aligned}$$

となる. 等号条件は, 命題 3.4 と (3.6) より従う. □

4. 例

CMC 1 face を可視化するために, 本稿では [KY, LY, Yan] で紹介されている $\mathbb{S}^3_1$ の **hollow ball model** を用いる. 即ち, $\mathbb{S}^3_1$ の各点

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow (x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{S}^3_1$$

に対して, (y_1,y_2,y_3) を

$$y_k = \frac{e^{\arctan x_0}}{\sqrt{1+x_0^2}} x_k, \qquad k=1,2,3$$

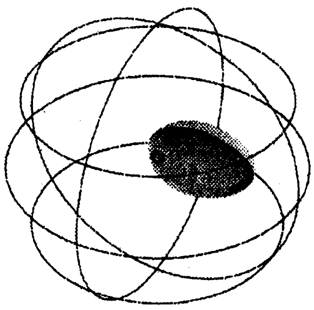
で定める. すると $e^{-\pi} < y_1^2+y_2^2+y_3^2 < e^{\pi}$ が成り立つ. この対応 $(x_0,x_1,x_2,x_3) \leftrightarrow (y_1,y_2,y_3)$ は $\mathbb{S}^3_1$ から "hollow ball"

$$\mathscr{H} = \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{-\pi} < y_1^2+y_2^2+y_3^2 < e^{\pi}\}.$$

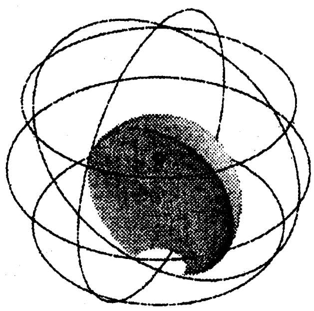
への全単射を定める. よって $\mathbb{S}^3_1$ は hollow ball $\mathscr{H}$ と同一視することができる.

最初に, よく知られている $\mathbb{H}^3$ 内の CMC 1 はめ込みに対応する例を 4 つ挙げる.

例 4.1. $M=\mathbb{C}$, $(g,\omega)=(c_1, c_2dz)$, ただし $c_1 \in \mathbb{C}$, $c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ とすると, $\mathbb{H}^3$ 内の horosphere に対応する CMC 1 face が得られる. この CMC 1 face は特異点をもたない. 従ってこの例は完備な空間的 CMC 1 はめ込みである.



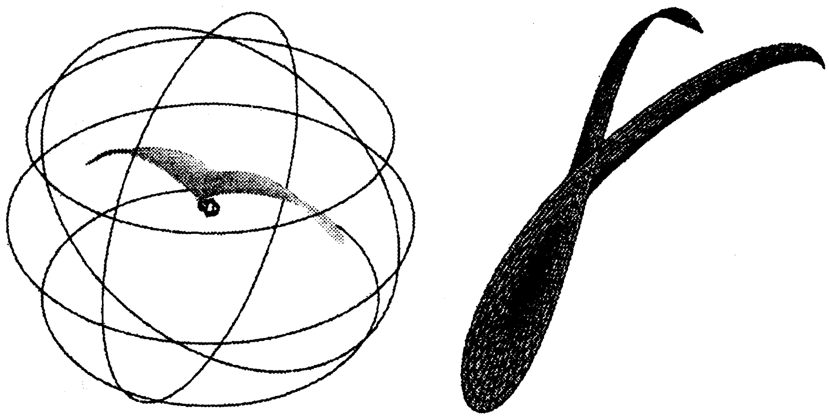
$\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, {}^{|z|<5,}_{0\le\arg z\le\pi}\right\}$.



$\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, {}^{|z|<10,}_{0\le\arg z\le\pi}\right\}$.

図 1. 例 4.1. 左は $c_1=1.2$ かつ $c_2=1$. 右は $c_1=0$ かつ $c_2=1$.

例 4.2. $M = \mathbb{C}$, $(g, \omega) = (z, cdz)$, ただし $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とすると, $\mathbb{H}^3$ 内の Enneper cousin に対応する完備かつ有限型の CMC 1 face が得られる. M は単連結であるから, この CMC 1 face のエンドは楕円型である. $\mathrm{Ord}_\infty Q = -4 < -2$ より, このエンドは非正則, 従って (3.5) の等号を満たさない.



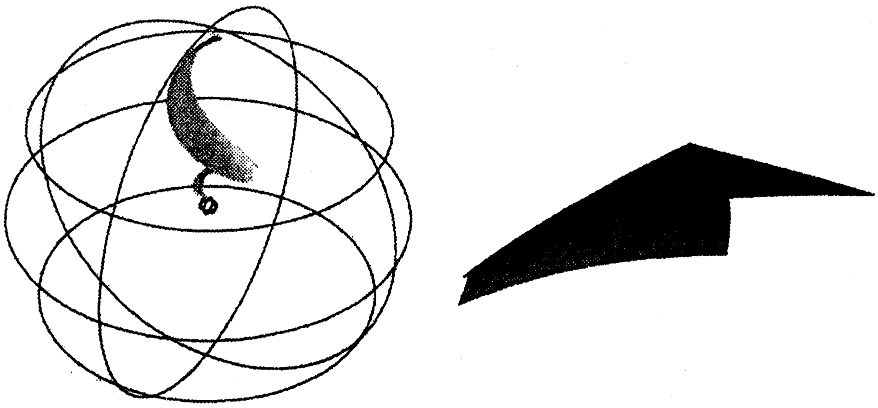
$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1.3\}$. $\quad \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {}^{0.8<|z|<1.3}_{\pi-1<\arg z<\pi+1}\right\}$.

図 2. 例 4.2 ($c = 1$).

例 4.3. $M = \mathbb{C}$, $(g, \omega) = (e^z, ice^{-z}dz)$, ただし $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とすると, $\mathbb{H}^3$ 内の helicoid cousin に対応する CMC 1 face が得られる. この CMC 1 face の特異点集合 $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) = 0\}$ はコンパクトではない. よってこの CMC 1 face は完備でも有限型でもない.

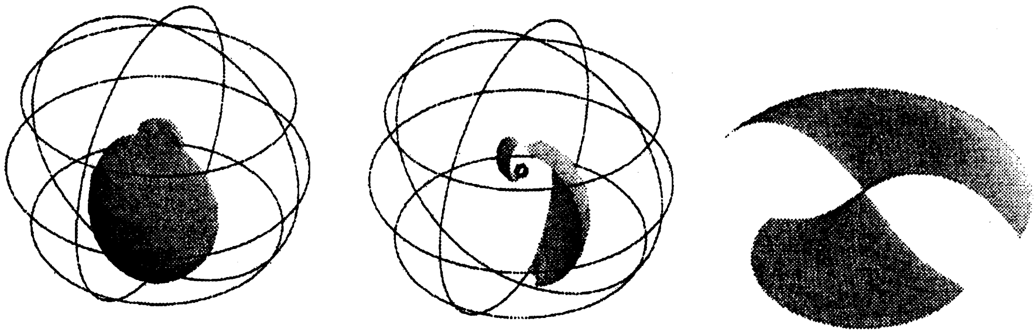
例 4.4. $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) = (z^\mu, (1 - \mu^2)dz/4\mu z^{\mu+1})$, ただし $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ とすると, $\mathbb{H}^3$ 内の catenoid cousin に対応する完備かつ有限型の CMC 1 face が得られる. M の各エンドにおけるモノドロミー表現の固有値は $-e^{\mu\pi i}$, $-e^{-\mu\pi i} \in \mathbb{S}^1$ であるから, この CMC 1 face の各エンドは楕円型である. $\mathrm{Ord}_0 Q = \mathrm{Ord}_\infty Q = -2$ より, 各エンドは正則. また, この CMC 1 face の各エンドは埋め込まれている. 従って (3.5) の等号を満たす.

さらに多くの CMC 1 face を構成するために, $\mathbb{H}^3$ 内の既約な CMC 1 はめ込みから $\mathbb{S}^3_1$ 内の CMC 1 face を構成する方法を紹介する.



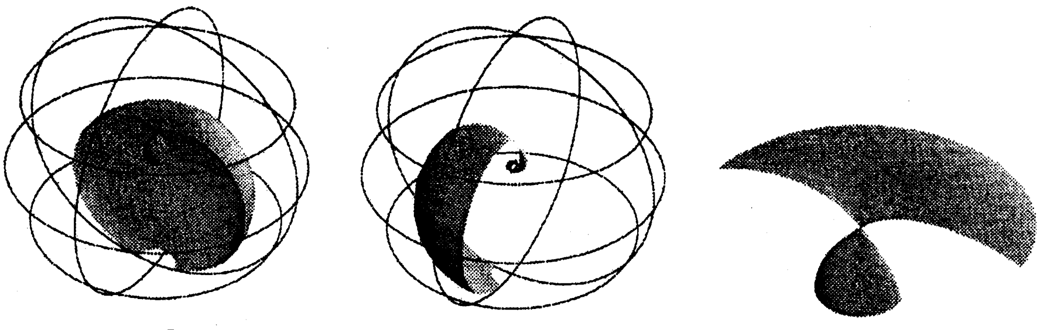
$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {-0.9<\mathrm{Re}z<0.9 \atop -4\pi<\mathrm{Im}z<4\pi}\right\}$. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {-0.8<\mathrm{Re}z<0.8 \atop -0.3<\mathrm{Im}z<0.3}\right\}$.

図 3. 例 4.3 ($c = 1$).



$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-5}<|z|<e^{5} \atop 0<\arg z<\pi}\right\}$. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-5}<|z|<e^{5} \atop \pi<\arg z<(3/2)\pi}\right\}$. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-2}<|z|<e^{2} \atop 0<\arg z<\pi}\right\}$.

図 4. 例 4.4 ($\mu = 0.8$).



$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-5}<|z|<e^{5} \atop 0<\arg z<\pi}\right\}$. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-5}<|z|<e^{5} \atop \pi<\arg z<(3/2)\pi}\right\}$. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, {e^{-2}<|z|<e^{2} \atop 0<\arg z<\pi}\right\}$.

図 5. 例 4.4 ($\mu = 1.2$).

$\hat{f}: M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \to \mathbb{H}^3$ を既約な CMC 1 はめ込みで，その誘導計量 $d\hat{s}^2$ は完備かつ有限全曲率をもつとする．ここで $\hat{f}$ が**既約**であるとは，f のある正則零持ち上げ F が存在して，そのモノドロミー表現の像が

$$U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

に入っていることである．(g, ω) を F に付随する Weierstrass data とする，即ち，(g, ω) は

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega.$$

を満たすものとする．すると，F が既約であることから $|g|$, $|\omega|$ はともに M 上一価になる．今，各エンド $p_1, \dots, p_n$ での第 2 Gauss 写像の絶対値 $|g|$ が 1 にならないとする．すると $f := Fe_3F^*$ は M 上一価になる．さらに，次の命題を得る:

命題 4.5. 上で定義された CMC 1 face $f: M \to \mathbb{S}^3_1$ は完備かつ有限型で，f の各エンドは楕円型である．

また，このような Weierstrass data (g, ω) が与えられたとき，任意の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$(\lambda g, \lambda^{-1}\omega)$ から構成される CMC 1 はめ込みは M 上一価になることが知られている ([UY1, Theorem 3.3])．故に次の定理を得る:

定理 4.6. $\hat{f}: M \to \mathbb{H}^3$ を完備かつ有限全曲率をもつ既約な CMC 1 はめ込みとする．n を f のエンドの数とする．F を，モノドロミー表現の像が $U(1)$ に入るような f の正則零持ち上げとし，(g, ω) を F に付随する Weierstrass data とする．このとき，m 個 $(0 \leq m \leq n)$ の正数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_m\}$ に対して $(\lambda g, \lambda^{-1}\omega)$ から構成される $f_\lambda: M \to \mathbb{S}^3_1$ は完備かつ有限型の CMC 1 face で，その各エンドは楕円型である．

小さい絶対全曲率をもつ，$\mathbb{H}^3$ 内の完備な CMC 1 はめ込みは，[RUY1, RUY2] で分類されている．この分類表から既約なものを取り出して定理 4.6 を適用すると，次の系を得る:

系 4.7. 各エンドが楕円型となる完備かつ有限型の CMC 1 face $f : M \to \mathbb{S}^3_1$ で, 以下の型のものが存在する:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{O}(0), & \mathbf{O}(-5), & \mathbf{O}(-2,-3), & \mathbf{O}(-1,-1,-2), \\ \mathbf{O}(-4), & \mathbf{O}(-6), & \mathbf{O}(-2,-4), & \mathbf{O}(-1,-2,-2), \\ \mathbf{O}(-2,-2), & \mathbf{O}(-1,-4), & \mathbf{O}(-3,-3), & \mathbf{O}(-2,-2,-2), \end{array}$$

但し f が $\mathbf{O}(d_1,\dots,d_n)$ 型であるとは $M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{p_1,\dots,p_n\}$ かつ f の Hopf 微分 Q が各エンド p_j において位数 d_j の極をもつこととする.

参考文献

[AA] R. Aiyama and K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{H}^3(-c^2)$ *and* $\mathbb{S}^3_1(c^2)$, Ann. Global Anal. Geom. (1) **17** (1998), 49–75.

[Ak] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987), 13–19.

[B] R. Bryant, *Surfaces of Mean Curvature One in Hyperbolic Space*, Astérisque **154-155** (1987), 321–347.

[CHR] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, *The geometry of finite topology Bryant surfaces*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), 623–659.

[ER] F. J. M. Estudillo and A. Romero, *Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space* L^3, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (3) **111** (1992), 515–524.

[F] S. Fujimori, *Spacelike CMC* 1 *surfaces with elliptic ends in de Sitter* 3-*Space*, preprint, arXiv:math.DG/0408036.

[H] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.

[JM] L. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, (2) **22** (1983), 203–221.

[KY] Y.-W. Kim and S.-D. Yang, *The goedesic reflection principle for spacelike constant mean curvature surfaces in de Sitter three-space*, preprint.

[Ko] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski* 3-*space* L^3, Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.

[KTUY] M. Kokubu, M. Takahashi, M. Umeharara and K. Yamada, *An analogue of minimal surface theory in* $\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})/\mathrm{SU}(n)$, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 1299–1325.

[L] H. B. Lawson Jr, Lectures on minimal submanifolds, Vol. I, Second edition, Mathematics Lecture Series, 9. Publish or Perish, Inc., (1980).

[LY] S. Lee and S.-D. Yang, *A spinor representation for spacelike surfaces of constant mean curvature* -1 *in de Sitter three-space*, preprint.

[Mc] L. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. Thesis, Brown Univ., (1980).

[O1] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in* E^3 *and* E^n, Ann. of Math. (2) **80** (1964), 340–364.

[O2] ———, A survey of minimal surfaces, Dover Publications (1986).

[P] B. Palmer, *Spacelike constant mean curvature surfaces in pseudo-Riemannian space forms*, Ann. Global Anal. Geom. (3) **8** (1990), 217–226.

[R] J. Ramanathan, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. (2) **36** (1987), 349–359.

[RUY1] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 21–56.

[RUY2] ———, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature II*, Tohoku Math. J. (2) **55** (2003), 375–395.

[UY1] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature* 1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), 611–638.

[UY2] ———, *A duality on CMC-*1 *surfaces in hyperbolic space, and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality*, Tsukuba J. Math. (1) **21** (1997), 229–237.

[UY3] ———, *Surfaces of constant mean curvature c in* $H^3(-c^2)$ *with prescribed hyperbolic Gauss map*, Math. Ann. **304** (1996), 203–224.

[UY4] ———, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, preprint, arXiv:math.DG/0307309.

[Yam] K. Yamada, 双曲型空間の平均曲率 1 をもつ曲面の全曲率, 数理解析研究所講究録 **1206** (2001), 134–143.

[Yan] S.-D. Yang, *Björling formula for spacelike surfaces of constant mean curvature in the de Sitter space*, preprint.

[Yu] Z.-H. Yu, *The value distribution of the hyperbolic Gauss map*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2997–3001.

E-mail address: fujimori@math.kobe-u.ac.jp