数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 77-84

WOLF 空間上のツイスター切断と部分多様体

九州大学大学院数理学研究院　長友康行 (Yasuyuki Nagatomo)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

ABSTRACT. コンパクト四元数対称空間（Wolf 空間）上定義されたツイスター方程式の解となる切断（ツイスター切断）を考察の対象とする。ベクトル束の階数が底空間の次元以下の場合に、零切断と横断的であり、実条件をみたすツイスター切断の零点集合を分類する。結果として、そのような零点集合とコンパクト単純連結リー群の実表現でその主固定部分群が非自明ではあり、かつトーラスでも離散部分群でもないものとの間に一対一対応があることがわかる。その主固定部分群が零点集合の等長変換群となる。

1. INTRODUCTION

本講演では、はじめに四元数ケーラー多様体上のベクトル束の接続に関するある条件の下、ツイスター方程式をみたす切断の零点集合が四元数部分多様体となることに言及する。

定理 1.1. [5] V を四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体上の（局所的に定義された）ASD ベクトル束であるとする。もし、ベクトル束 $V\otimes\mathbb{H}$ の切断 s が '非退化' であり、ツイスター方程式 $\mathcal{D}s=0$ をみたすとすると、その零点集合は四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体の四元数部分多様体となる。

定理内の用語を説明していく。
$V\to M$ をエルミート計量をもつ四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体上の複素ベクトル束とする。

定義 1.2. (Mamone Capria-Salamon[4], Galicki-Poon[2],$\cdots$) ベクトル束 V 上の接続 ∇ に対して、その曲率形式 R^∇ が

$$R^\nabla(IX,IY)=R^\nabla(JX,JY)=R^\nabla(KX,KY)=R^\nabla(X,Y).$$

をみたすときに、接続 ∇ を ASD 接続という。また、このとき V を ASD（ベクトル）束、もしくはインスタントン（束）という。

注意. Galicki-Poon[2] により、ASD 接続の曲率形式 R^∇ は、$*R^\nabla=\frac{-1}{(2n-1)!}R^\nabla\wedge\Omega^{n-1}$ をみたす。ここで Ω は M の基本 4 形式である。したがって、ASD 接続は Tian[8] の意味での一般化された反自己双対インスタントンの例になっている。また、Verbitsky[9] は超ケーラー多様体上の ASD 束を tri-holomorphic ベクトル束と呼んでいる。

次にツイスター作用素を定義する。簡単のため、四元数ケーラー多様体上でその定義を与えるが、超ケーラー多様体上でも同様に定義される。
定義により、四元数ケーラー多様体 M の正規直交枠よりなる主束と Levi-Civita 接続は、構造群が $\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(n)$ である主束 P に還元される。

$\mathbb{C}^2$ を Sp(1) の標準表現とする。このとき、局所的に定義される随伴ベクトル束を $\mathbb{H}$ と表すことにする。同様にして、Sp(n) の標準表現 $\mathbb{C}^{2n}$ に対して局所的に定義される随伴ベクトル束を $\mathbb{E}$ と表すことにする。

$S^m\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ の m 次対称積束として、$\wedge^i\mathbb{E}$ を $\mathbb{E}$ の i 次歪対称積束であるとする。Clebsch-Gordan の定理 $S^m\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\cong S^{m-1}\mathbb{H}\oplus S^{m+1}\mathbb{H}$ から得られる射影 $q: S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{E}\to S^{m+1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E}$ を使って、微分作用素を定義する。

定義 1.3. (Salamon[7]) ツイスター作用素 $\mathcal{D}$ と呼ばれる微分作用素が接続と射影 q の合成として定義される。

$$\mathcal{D}_m = q\nabla : \Gamma(S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}) \to \Gamma(S^{m+1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E}).$$

注意. $n=1$, すなわち 4 次元の場合にはツイスター作用素 $\mathcal{D}$ は通常のツイスター作用素と一致する。

ベクトル束 V が接続をもっているならば、その接続と $S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}$ の接続を利用して、ツイスター作用素

$$\mathcal{D}_m = q\nabla : \Gamma(V\otimes S^m\mathbb{H}\otimes\wedge^i\mathbb{E}) \to \Gamma(V\otimes S^{m+1}\mathbb{H}\otimes\wedge^{i+1}\mathbb{E})$$

が定義される。

最後に非退化な切断を定義する。

定義 1.4. V を M 上のベクトル束として、s をその切断とする。V の局所自明化を利用して、s をベクトル値関数とみなしたとき、零点集合 $S=s^{-1}(0)$ が M の部分多様体であり、S の接空間が $\mathrm{Ker}\, ds$ であるときに、切断 s を非退化な切断という。(切断が零切断と横断的に交わるのであれば、その切断は非退化である。)

2. ツイスター空間とツイスター切断

この節では、ツイスター作用素がツイスター空間上のコーシー・リーマン作用素に変換されることを利用して、ツイスター切断の零点集合の連結性を判定する定理を与える。

Z を四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体のツイスター空間であるとする [6]。

$$\begin{array}{c} Z = \mathbb{P}(\mathbb{H}) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{C}P^1} \\ M \end{array}$$

Z は自然な複素構造をもつことが知られている [6]。ここでのキーポイントは ASD 束 V の引き戻し束が引き戻し接続により導入される正則ベクトル束としての構造をもつということである。なお、引き戻し束も同じ記号 V を使って表すことにする。Penrose 変換により、ツイスター切断とツイスター空間上の正則切断とが対応する。とくに、次の同一視を得る。

$$\{s\in\Gamma(V\otimes\mathbb{H}) | \mathcal{D}s=0\} \cong H^0(Z, V\otimes\mathcal{O}(1)),$$

ここで右辺の V は引き戻し束を表し、複素直線束 $\mathcal{O}(1)$ は射影束 Z の tautological ベクトル束の双対束を表している。

ここで切断に関する「実構造」を定義する。

定義 2.1. $V \to M$ を四元数構造をもつ ASD 束であるとする。$\mathbb{H}$ も四元数構造をもつので、テンソル積$V \otimes \mathbb{H}$ には実構造τ が定義できる。$V \otimes \mathbb{H}$ の切断s がτ 不変 $(\tau(s) = s)$ であるときに、その切断を実切断という。これは、$V \otimes \mathbb{H}$ のτ 不変集合を $(V \otimes \mathbb{H})^{\mathbb{R}}$ と書いた場合に、sが実ベクトル束 $(V \otimes \mathbb{H})^{\mathbb{R}}$ の切断とみなせるということである。また、Penrose 変換により対応する正則ベクトル束$V \otimes \mathcal{O}(1)$ の正則切断$\tilde{s}$ も実切断ということにする。

命題 2.2. [5] V を四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体上の四元数構造をもつASD束であるとする。もし、正則ベクトル束$V \otimes \mathcal{O}(1)$ の正則切断$\tilde{s}$ が実切断であり、かつ非退化であれば、その零点集合$\tilde{S} := \tilde{s}^{-1}(0)$ は四元数部分多様体$S := s^{-1}(0)$ のツイスター空間である。ここで、s は$Penrose$変換により$\tilde{s}$ に対応する$V \otimes \mathbb{H}$ のツイスター切断である。

次に層コホモロジーを利用してツイスター切断の零点集合の連結性を判定する命題を紹介する。

命題 2.3. [5] V を四元数構造をもつ（複素）階数が$2r$ であるコンパクト四元数ケーラー多様体上のASD束であるとする。また、正則ベクトル束$V \otimes \mathcal{O}(1)$ の正則切断は実条件をみたし、かつ零切断と横断的に交わるとする。このとき、$q = 0, 1, \cdots, 2n+1$ と$k = 1, 2, \cdots, 2r$ に対して、

$$H^q\left(Z, \wedge^k V^* \otimes \mathcal{O}(-k)\right) = 0$$

が成立しているならば、対応するツイスター切断の零点集合は連結である。

最後に四元数構造をもたない一般の ASD 束V を考えることにする。このときは、ベクトル束$V \otimes \mathbb{H}$ が実構造をもつことは期待できないが、ベクトル束$V \oplus V^*$ は四元数構造をもつので、$(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{H}$ は実構造をもつ。なお、このとき、実ベクトル束$\{(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{H}\}^{\mathbb{R}}$ は複素構造をもち、複素ベクトル束として、$V \otimes \mathbb{H}$ に同型であることに注意しておく。そこで、ベクトル束$V \otimes \mathbb{H}$ の切断を上の同一視の下、実切断とみなすことにする。

命題 2.4. [5] V を四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体上のASD束であるとする。もし、正則ベクトル束$(V \oplus V^*) \otimes \mathcal{O}(1)$ の正則切断$\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \widetilde{\sigma(s_1)})$ が実条件をみたし、かつ非退化であれば、その零点集合$\tilde{S} := \tilde{s}^{-1}(0)$ は四元数部分多様体$S_1 := s_1^{-1}(0)$ のツイスター空間となる。ここで、s_1 は$Penrose$変換の下、$\tilde{s}_1$ に対応する$V \otimes \mathbb{H}$ のツイスター切断である。

3. Wolf 空間上のツイスター切断

3.1. **Wolf 空間.** スカラー曲率が正であるコンパクト四元数ケーラー多様体の例として、コンパクト四元数対称空間が挙げられるがこれらはWolfにより分類されている [10]。

この分類にしたがい、Gを単連結なコンパクト単純リー群として、Wolf空間を

$$G/\mathrm{Sp}(1) \cdot K,$$

と表すことにする。ここで、$\mathrm{Sp}(1)$ は極大ルートベクトルにより生成されたGの部分群であり、KはG内の$\mathrm{Sp}(1)$ の中心化群である。なお、K は具体的に次の表で与えられる。

• Table 3.1

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n)$
K	$\mathrm{U}(1)\mathrm{SU}(n-2)$	$\mathrm{Spin}(2n-3)\,\mathrm{Sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathrm{Spin}(2n-4)\,\mathrm{Sp}(1)$

G	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
K	$\mathrm{SU}(6)$	$\mathrm{Spin}(12)$	E_7	$\mathrm{Sp}(3)$	$\mathrm{Sp}(1)$

注意. ここで、古典型の場合には対応する Wolf 空間は次のようになる。

$$\mathrm{SU}(n) \to Gr_2(\mathbb{C}^n), \quad \mathrm{Spin}(2n+1) \to Gr_4(\mathbb{R}^{2n+1}),$$
$$\mathrm{Sp}(n) \to \mathbb{H}P^{n-1}, \quad \mathrm{Spin}(2n) \to Gr_4(\mathbb{R}^{2n})$$

次に Wolf 空間上の複素等質ベクトル束 F で局所的には $V \otimes \mathbb{H}$ と表示可能なものは、$K \cdot \mathrm{Sp}(1)$ の表現 $V_0 \otimes \mathbb{H}$ を利用して、$F = G \times_{\mathrm{Sp}(1)\,K} V_0 \otimes \mathbb{H}$ と書ける。今後、等質ベクトル束 F と表現 $V_0 \otimes \mathbb{H}$ を混同して使うことにする。

定理 3.1. *F を Wolf 空間 $G/Sp(1) \cdot K$ 上の $V_0 \otimes \mathbb{H}$ と同一視される既約等質ベクトル束であるとする。F が非自明なツイスター切断を許容し、かつその実階数が底空間の次元より小さいと仮定するならば、F は下の表にあるベクトル束のいずれかである。*

• Table 3.2

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n)$
V_0	$\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$

G	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{Spin}(10)$	E_6	E_7	F_4	G_2
V_0	$S^+_{\mathbb{H}}, S^-_{\mathbb{H}}$	S^+, S^-	$\mathbb{C}^6,\ \mathbb{C}^{6*}$	$\mathbb{C}^{12}$	$\mathbb{C}^6_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$

ここで、たとえば、$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$ は不変四元数構造をもつ表現 $\mathbb{C}^2$ を意味するものとする。

注意. 定理 3.1 と階数に関する条件以外同じ仮定の下、その実階数が底空間の次元と同じ既約等質ベクトル束は以下に挙げるものに限られる。

1. $\mathbb{H}P^n$ 上の余接束 $\mathbb{E} \otimes \mathbb{H}$。
2. $Gr_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の次のように表される既約等質ベクトル束。まず、S を $Gr_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の tautological ベクトル束であるとする。定義から、S は階数 $n+2$ の自明束 $\underline{\mathbb{C}^{n+2}}$ の部分束であるので、商ベクトル束 Q が存在する。
$$0 \to S \to \underline{\mathbb{C}^{n+2}} \to Q \to 0$$
このとき、$Q \otimes S$ が上の条件をみたす既約等質束である。当然、その双対束 $Q^* \otimes S^*$ も同様である。
3. $Gr_4(\mathbb{R}^{12})$ 上の次のように表される既約等質ベクトル束。まず、$Gr_4(\mathbb{R}^{12})$ を等質空間として、
$$Gr_4(\mathbb{R}^{12}) = \frac{\mathrm{Spin}(12)}{K \cdot \mathrm{Sp}(1)}, \quad K = \mathrm{Spin}(8)\mathrm{Sp}(1)$$
と表す。S^+ を $\mathrm{Spin}(8)$ の半スピン表現であるとする。このとき、$S^+ \otimes \mathbb{H}$ が上の条件をみたす既約等質束である。同様にして、S^- を別の半スピン表現であるとすれば、$S^- \otimes \mathbb{H}$ も上の条件をみたす既約等質束である。

定理 3.2. F を定理 3.1 にある既約等質ベクトル束であるとする。このとき、F は零切断と横断的に交わるツイスター切断をもつ。また、その横断的ツイスター切断の零点集合は以下のように分類される。

• Table 3.3

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n)$
V_0	$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$
S	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathrm{Spin}(2n)$	G_2	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathrm{Spin}(2n-1)$

G	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{Spin}(10)$	E_6	E_7	F_4	G_2
V_0	$S^+_{\mathbb{H}}, S^-_{\mathbb{H}}$	S^+, S^-	$\mathbb{C}^6$, $\mathbb{C}^{6^*}$	$\mathbb{C}^{12}$	$\mathbb{C}^6_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$
S	$\mathrm{Spin}(7)$, $\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(6)$	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{SU}(3)$

ここで零点集合 S はふたたび *Wolf* 空間となり、たとえば、表にある $S = \mathrm{SU}(n-1)$ とは S が $\mathrm{SU}(n-1)$ 型の *Wolf* 空間であることを意味する。

証明の概略を与える。

まず、 Bott-Borel-Weil の定理と Sard の定理により、ほとんどすべての実ツイスター切断が零切断と横断的に交わることがわかる。Penrose 変換を用いて、V_0 が四元数構造を持つ場合には、$V_0 \otimes \mathbb{H}$ の実ツイスター切断の空間と $H^0(Z, V_0 \otimes \mathcal{O}(1))^{\mathbb{R}}$ を同一視する。V_0 が四元数構造を持たない場合には、ツイスター切断の空間と $H^0(Z, (V_0 \oplus V_0^*) \otimes \mathcal{O}(1))^{\mathbb{R}}$ とを同一視する。どちらの空間も、等長変換群（の被覆群）の実表現空間となり、ここではその実表現空間を $W^{\mathbb{R}}$ と表すことにする。

• Table 3.4

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Spin}(2n)$
V_0	$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$S_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$
$W^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n^*})^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}^{2n+1}$	$S^{\mathbb{R}}$	$S^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n)^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}^{2n}$

G	$\mathrm{Spin}(8)$	$\mathrm{Spin}(10)$	E_6	E_7	F_4	G_2
V_0	$S^+_{\mathbb{H}}, S^-_{\mathbb{H}}$	S^+, S^-	$\mathbb{C}^6$, $\mathbb{C}^{6^*}$	$\mathbb{C}^{12}$	$\mathbb{C}^6_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{C}^2_{\mathbb{H}}$
$W^{\mathbb{R}}$	$S^{+^{\mathbb{R}}}$, $S^{-^{\mathbb{R}}}$	$(S^+ \oplus S^-)^{\mathbb{R}}$	$(\varpi_1 + \varpi_6)^{\mathbb{R}}$	$(\varpi_7 + \varpi_7)^{\mathbb{R}}$	$\varpi_4^{\mathbb{R}}$	$\varpi_1^{\mathbb{R}}$

(ここで、リー代数の用語を使用していることに注意する。基本ウェイト ϖ_i は ϖ_i を最高の重みとしてもつ複素既約表現を表している。なお、基本ウェイトの番号付けは Bourbaki[1] にしたがっている。)

次に $W^{\mathbb{R}}$ の主軌道の和集合が横断的切断の集合に一致することが示される。そこで、H を主軌道の固定部分群であるとする。H は W.C.Hsiang and W.Y.Hsiang[3] により分類されている。定理 1.1 から零点集合 S は四元数部分多様体であるが、さらに H が S に作用することもわかる。また、横断的という条件から S の次元もわかることに注意する。

最後に、命題 2.3 が S が連結であることを導く。四元数部分多様体は全測地的部分多様体であることが知られているので、S 自身が H の作用する Wolf 空間であることがわかる。Wolf の分類 [10] と W.C.Hsiang and W.Y.Hsiang の分類 [3] により、定理 3.2 が成立することがわかる。四元数部分多様体 S は H 型の Wolf 空間である。

4. WOLF 空間上のツイスター切断 II

この節では、既約等質束の階数と底空間の次元が一致する場合を考察する。このようなベクトル束は定理 3.1 の後の注意においてすでに分類されている。

定理 4.1. $\mathbb{H}P^n$ の余接束の実ツイスター切断、すなわち実ツイスター 1 形式の零点集合は $\coprod_{p=1}^{l}\mathbb{H}P^{k_p}$ となる。ここで、部分多様体 $\mathbb{H}P^{k_p}$ は $\mathbb{P}(\mathbb{H}^{k_p+1})$ を表し、$\oplus_{p=1}^{l}\mathbb{H}^{k_p+1}=\mathbb{H}^{n+1}$ が成立する。また、$\oplus$ は $\mathbb{H}^{n+1}$ の四元数部分空間 $\mathbb{H}^{k_p+1}$、$(p=1,\cdots,l)$ の直交直和を意味している。また、次元 k_p と部分空間の数 l はツイスター 1 形式に依存して決まる。

注意. Bott-Borel-Weil の定理から、, $H^0(\mathbb{C}P^{2n+1},\mathbb{E}\otimes\mathcal{O}(1))$ は $\mathrm{Sp}(n+1)$ の既約表現空間 $\wedge_0^2\mathbb{C}^{2n+2}$ と同一視されることがわかる。ここで、$\wedge_0^2\mathbb{C}^{2n+2}$ は $\wedge^2\mathbb{C}^{2n+2}$ 内の ω に対する直交補空間であり、ω は $\mathrm{Sp}(n+1)$ の標準表現 $\mathbb{C}^{2n+2}$ の不変シンプレクティック形式である。

$\wedge_0^2\mathbb{C}^{2n+2}$ は不変実構造をもつ。$(\wedge_0^2\mathbb{C}^{2n+2})^{\mathbb{R}}$ の一般的なベクトルは

$$a_1e_1\wedge e_2+a_2e_3\wedge e_4+\cdots a_{n+1}e_{2n+1}\wedge e_{2n+2},\quad a_1<a_2<\cdots<a_{n+1},$$

と表すことができる。ただし、$e_1,e_2,\cdots,e_{2n+2}$ は $\mathbb{C}^{2n+2}$ の標準的な基底である。このとき、その固定部分群は

$$\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)\times\cdots\mathrm{Sp}(1),\quad (n+1\,\text{個})$$

である。対応する横断的なツイスター切断の零点集合は

$$\{\mathrm{pt.}\}\cup\{\mathrm{pt.}\}\cup\cdots\cup\{\mathrm{pt.}\},\quad (n+1\,\text{個})$$

となる。

定理 4.2. $Gr_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の既約等質束 $Q\otimes S$ のツイスター切断の零点集合は $\left(\coprod_{p=1}^{m}\mathbb{H}P^{k_p}\right)\amalg Gr_2(\mathbb{C}^l)$ と表すことができる。ただし、$\mathbb{H}P^{k_p}=\mathbb{P}(\mathbb{H}^{k_p+1})$ であり、$\left(\oplus_{p=1}^{l}\mathbb{H}^{k_p+1}\right)\oplus\left(\mathbb{C}^l\oplus\mathbb{C}^{l^*}\right)=\mathbb{C}^{n+2}\oplus\mathbb{C}^{n+2^*}=\mathbb{H}^{n+2}$ となる。$\oplus$ は四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^{n+2}$ の部分空間 $\mathbb{H}^{k_p+1}$ $(p=1,\cdots,m)$ と $\mathbb{C}^l\oplus\mathbb{C}^{l^*}$ の直交直和を表す。なお、$l\leqq 1$ の場合は $Gr_2(\mathbb{C}^l)$ は空集合を意味する。また、k_p, m および l はツイスター切断に依存して決まる。

この場合には実ツイスター切断全体の集合は $\mathrm{SU}(n+2)$ の実表現空間

$$\left(\wedge^2\mathbb{C}^{n+2}\oplus\wedge^2\mathbb{C}^{n+2^*}\right)^{\mathbb{R}}$$

と同一視される。したがって、一般的なベクトルは適当な基底の下、

$$\begin{cases}(a_1e_1\wedge e_2\cdots a_{\frac{n+2}{2}}e_{n+1}\wedge e_{n+2},a_1e^1\wedge e^2\cdots a_{\frac{n+2}{2}}e^{n+1}\wedge e^{n+2}), & n:\text{偶数}\\(a_1e_1\wedge e_2\cdots a_{\frac{n+1}{2}}e_n\wedge e_{n+1},a_1e^1\wedge e^2\cdots a_{\frac{n+2}{2}}e^n\wedge e^{n+1}), & n:\text{奇数}\end{cases}$$

$$a_1<\cdots<a_{\frac{n+2}{2}},\ n:\mathrm{even},\quad a_1<\cdots<a_{\frac{n+1}{2}},\ n:\mathrm{odd}.$$

と書かれる。その固定部分群は

$$\begin{cases}\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\cdots\times\mathrm{SU}(2), & (\frac{n+2}{2}\text{個}), & n:\text{偶数},\\\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\cdots\times\mathrm{SU}(2), & (\frac{n+1}{2}\text{個}), & n:\text{奇数}\end{cases}$$

となる。定理 4.2 により、対応するツイスター切断の零点集合は

$$\begin{cases} \{\mathrm{pt.}\} \cup \{\mathrm{pt.}\} \cup \cdots \cup \{\mathrm{pt.}\}, & (\frac{n+2}{2}\text{個}), \quad n: \text{偶数}, \\ \{\mathrm{pt.}\} \cup \{\mathrm{pt.}\} \cup \cdots \cup \{\mathrm{pt.}\}, & (\frac{n+1}{2}\text{個}), \quad n: \text{奇数} \end{cases}$$

となる。

定理 4.3. $Gr_4(\mathbb{R}^{12})$ 上の既約等質束 $S^+ \otimes \mathbb{H}$ は横断的ツイスター切断をもち、その零点集合は 3 点よりなる。

定理 3.2 の証明と同様にして、$S^+ \otimes \mathbb{H}$ のほとんどすべてのツイスター切断が零切断と横断的に交わることがわかる。したがって、階数と次元の関係から、その零点集合はいくつかの点からなる。とくに、命題 2.2 を用いると Penrose 変換により対応する正則切断の零点集合 $\tilde{S}$ はいくつかのツイスター直線（ツイスター空間のファイバー）よりなることがわかる。

次に、命題 2.3 の証明と同じ議論をすれば、ツイスター空間上に $E_1^{p,q}$ が以下のようになるスペクトル系列が存在することがわかる。

$$E_1^{1,0} = H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}), \quad E_1^{0,0} = H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \cong \mathbb{C}, \quad E_1^{-4,4} = E_1^{-8,8} = \mathbb{C},$$

上記以外の $E_1^{p,q}$ はすべて 0。そこで以下の写像

$$\alpha : H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \cong \mathbb{C} \to H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}})$$
$$\beta : \mathbb{C} \to \mathrm{Coker}\,\alpha \quad \gamma : \mathbb{C} \to \mathrm{Coker}\,\alpha / \mathrm{Im}\,\beta$$

を用いて、$E_\infty^{p,q}$ が以下のように表されることがわかる。

$$E_\infty^{1,0} = (\mathrm{Coker}\,\alpha/\mathrm{Im}\,\beta)\,/\mathrm{Im}\,\gamma, \quad E_\infty^{0,0} = \mathrm{Ker}\,\alpha,$$
$$E_\infty^{-4,4} = \mathrm{Ker}\,\beta, \quad E_\infty^{-8,8} = \mathrm{Ker}\,\gamma.$$

ところで、ツイスター切断の横断性により、このスペクトル系列は 0 に収束することがわかる。したがって、

$$H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) = \mathbb{C}^3$$

となる。つまり、$\tilde{S}$ は 3 つの連結成分をもつ。

注意. ふたたび Bott-Borel-Weil の定理から、Spin(12) の表現空間として、

$$H^0\left(Z, (S^+ \oplus S^+) \otimes \mathcal{O}(1)\right) \cong \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^+$$

であることがわかる。ただし、$\mathbb{S}^+$ は Spin(12) の半スピン表現である。やはり、定理 3.2 の証明と同様にして、$(\mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^+)^{\mathbb{R}}$ の主軌道内の点は $(S^+ \oplus S^+) \otimes \mathcal{O}(1)$ の横断的な実ツイスター切断に対応することがわかる。Hsiang and Hsiang の分類 [3] により、$(\mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^+)^{\mathbb{R}}$ の主軌道内の点の固定部分群は

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$$

である。

Final Conclusion Hsiang and Hsiang の論文 [3] 内の表 A と比較すると、「Wolf 空間 $G/K \cdot \mathrm{Sp}(1)$ の既約等質ベクトル束の横断的な実ツイスター切断の零点集合」と「主軌道の固定部分群が非自明であり、かつトーラスでも離散部分群でもないような G の実既約表現空間」とが一対一に対応していることがわかる。主軌道の固定部分群が零点集合の等長変換群となる。

REFERENCES

[1] N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie", Hermann, Paris (1975)
[2] K.Galicki and Y.S.Poon, Duality and Yang-Mills fields on quaternionic Kähler manifold, J.Math.phys. **32** (1991), 1263–1268
[3] W.C Hsiang and W.Y. Hsiang, Differential actions of compact connected classical groups: II, Ann. of Math. **92** (1970), 189–223
[4] M.Mamone Capria and S.M.Salamon, Yang-Mills fields on quaternionic spaces, Nonlinearity **1** (1988), 517–530
[5] Y.Nagatomo, Geometry of the Twistor Equation and its Applications Contemporary Mathematics **309** (2002), 165–176
[6] S.M.Salamon, Quaternionic Kähler Manifolds, Invent.Math. **67** (1982), 143–171
[7] S.M.Salamon, Differential geometry of quaternionic manifolds, Ann. SC. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 31–55
[8] G.Tian, Gauge Theory and calibrated geometry, I, Ann. of Math. **151** (2000), 193–268
[9] M.Verbitsky, Hyperholomorphic bundles over a hyperKähler manifold, J.Alg.Geom. **5** (1996), 633–669
[10] J.A.Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J.Math.Mech. **14** (1965), 1033–1047

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, ROPPONMATSU, FUKUOKA 810-8560,JAPAN

E-mail address: `nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp`