数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 90-95

ℓ_ψ 空間について

新潟大自然科学　三谷　健一 (Ken-ichi Mitani)
Graduate School of Science and technology,
Niigata University
新潟大理　斎藤　吉助 (Kichi-Suke Saito)
Faculty of Science, Niigata University

1　序文

最近, $\mathbb{C}^n$ 上 absolute ノルムにおいて, そのノルムの性質や幾何学的性質に関する結果が得られている. $\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは

$$\|(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)\|=\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\| \quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n,$$

が成立するときを言う. $\|\cdot\|$ が normalized とは

$$\|(1,0,\cdots,0)\|=\|(0,1,0,\cdots,0)\|=\cdots=\|(0,\cdots,0,1)\|=1$$

が成り立つときを言う. 例えば ℓ_p ノルム, $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である. $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized ノルム全体を AN_n とおく. Bonsall-Duncan[3] の $\mathbb{C}^2$ 上の absolute ノルムについての結果に関連して, 斎藤-加藤-高橋は, [10] において, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute ノルムを Δ_n 上の凸関数で特徴づけた. ここで,

$$\Delta_n=\{(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in\mathbb{R}^n: s_1+s_2+\cdots+s_n=1,\ s_i\geq 0\ (\forall i)\}.$$

実際, 任意の $\|\cdot\|\in AN_n$ に対して,

$$\psi(s)=\|s\| \qquad (\forall s\in\Delta_n) \tag{1}$$

とする. このとき, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす.

$$(A_0) \qquad \psi(1,0,\cdots,0)=\cdots=\psi(0,\cdots,0,1)=1,$$

$$(A_i) \qquad \psi(s)\geq(1-s_i)\psi\left(\tfrac{s_1}{1-s_i},\cdots,\tfrac{s_{i-1}}{1-s_i},\overset{(i)}{0},\tfrac{s_{i+1}}{1-s_i},\cdots,\tfrac{s_n}{1-s_i}\right).$$
$$(\forall i=1,2,\cdots,n, \forall s=\{s_n\}\in\Delta_n, s_i\neq 1).$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で, すべての i で (A_i) を満たすもの全体とする. このとき, AN_n と Ψ_n は, (1) の下で, 1 対 1 対応に対応する. この結果から, ℓ_p 以外にも多くの

absoluteノルムが存在することがわかる. これに関連して, 狭義凸性や一様non-square性, smooth性などの幾何学的性質についての結果が得られている. (cf. [7, 10, 11]).

本講演では, absolute ノルムを持つ無限次元の数列空間である, ℓ_ψ 空間をを導入し, その空間のノルム構造や性質についての結果を述べる. 実際, そのバナッハ空間と凸関数との関係を考察し, また, regular という性質を導入し, その概念と共役空間との関連を具体例を与えながら考察する. また, ℓ_ψ 空間においての可分性や狭義凸性についても対応する凸関数を使って調べる.

2 ℓ_ψ-空間

ある場所から先の要素が 0 である数列全体を ℓ_0 とする. ℓ_0 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $\{x_n\} \in \ell_0$ に対して, $\|\{x_n\}\| = \|\{|x_n|\}\|$ が成り立つときを言う. また normalized であるとは, 任意の $i = 1,2\cdots$ に対して, $\|e_i\| = 1$ が成り立つときを言う. ここで, $e_i = (0,0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots)$. ℓ_0 上の absolute normalized ノルム全体を AN_∞ とおく. また, Δ_∞ を

$$\Delta_\infty = \left\{ \{s_n\} \in \ell_0 : \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1, s_i \geq 0 \ (\forall i) \right\}$$

とおく. [11] と同様に, ℓ_0 上の absolute ノルムを Δ_∞ 上の凸関数を使って特徴づけすることができる. 実際, 任意の $\|\cdot\| \in AN_\infty$ に対して,

$$\psi(s) = \|s\| \quad (s \in \Delta_\infty). \tag{2}$$

と定義する. このとき, ψ は Δ_∞ 上連続凸関数で, 次の条件を満たす.

$$\begin{aligned} &(A_0) \quad \psi(e_i) = 1 \ (\forall i = 1,2,\cdots), \\ &(A_i) \quad \psi(s) \geq (1-s_i)\psi\Big(\tfrac{s_1}{1-s_i}, \tfrac{s_2}{1-s_i}, \cdots, \tfrac{s_{i-1}}{1-s_i}, \overset{(i)}{0}, \tfrac{s_{i+1}}{1-s_i}, \cdots\Big) \\ &\qquad\qquad (\forall i = 1,2,\cdots, \forall s = \{s_n\} \in \Delta_\infty, s_i \neq 1). \end{aligned}$$

Ψ_∞ をすべての i に対して (A_i) を満たす Δ_∞ 上連続凸関数全体とする. また, 任意の $\psi \in \Psi_\infty$ に対して,

$$\|\{x_n\}\|_\psi = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|\right)\psi\left(\frac{|x_1|}{\sum_{i=1}^\infty |x_i|}, \cdots, \frac{|x_n|}{\sum_{i=1}^\infty |x_i|}, \cdots\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \{x_n\} \neq (0,0,\cdots), \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{if } \{x_n\} = (0,0,\cdots). \end{cases}$$

とおくと, $\|\cdot\|_\psi \in AN_\infty$ であり, またこれは (2) を満たす. 従って AN_∞ と Ψ_∞ は1対1に対応する.

例えばℓ_pノルム, $\|\cdot\|_p$はabsoluteノルムである. ここでψ_pを$\|\cdot\|_p$に対応する凸関数とする.

定義 1 $\psi \in \Psi_\infty$とする. このときℓ_ψを

$$\ell_\psi = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n\to\infty} \|(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots)\|_\psi < \infty\}$$

と定義する. ℓ_ψ上にノルムを

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_\psi = \lim_{n\to\infty} \|(x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)\|_\psi$$

と導入すると, ℓ_ψは*Banach*空間になる.

また, c_ψをℓ_0の$(\ell_\psi, \|\cdot\|_\psi)$における閉包とする.

例 2 $1 \le p < \infty$ならば, $c_{\psi_p} = \ell_{\psi_p} = \ell_p$である. また, $p = \infty$のとき, $c_{\psi_\infty} = c_0 \neq \ell_\infty = \ell_{\psi_\infty}$.

c_ψとℓ_ψの関係を表すために, 次の概念が必要である.

定義 3 $\psi \in \Psi_\infty$とする. このときψが*regular*であるとは, 任意の$x = \{x_n\} \in \ell_\psi$に対して,

$$\|(0, 0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)\|_\psi \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

が成り立つときを言う.

命題 4 $\psi \in \Psi_\infty$とする. このとき, $c_\psi = \ell_\psi$であることとψが*regular*であるととは同値である.

証明. $c_\psi = \ell_\psi$と仮定する. また, $x = \{\xi_i\} \in \ell_\psi$とおく. このとき, 任意の$\varepsilon > 0$に対して, ある$y = (\eta_1, \cdots, \eta_{n_0-1}, 0, 0, \cdots) \in \ell_0$が存在して, $\|x - y\|_\psi \le \varepsilon$. よって$n \ge n_0$ならば

$$\begin{aligned}
&\|(0, \cdots, 0, \xi_{n_0}, \xi_{n_0+1} \cdots, \xi_{n+1}, \cdots)\|_\psi \\
&\le \|(\xi_1 - \eta_1, \cdots, \xi_{n_0-1} - \eta_{n_0-1}, \xi_{n_0}, \xi_{n_0+1}, \cdots)\|_\psi \\
&= \|x - y\|_\psi \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

従ってψはregularである. 逆は自明である. ■

例 5 $1 \le p < \infty$とする. このときψ_pは*regular*だがψ_∞は*regular*でない.

次に, ℓ_ψ の dual ノルムや回帰性について考える. $\psi \in \Psi_\infty$ に対して, ψ^* を各 $s \in \Delta_\infty$ に対して,

$$\psi^*(s) = \sup_{t \in \Delta_\infty} \langle s, t \rangle / \psi(t)$$

とおく. このとき, $\psi^* \in \Psi_\infty$ かつ $(\psi^*)^* = \psi$ が成り立つことに注意する.

定理 6 $\psi \in \Psi_\infty$ とする. このとき
(i) $(c_\psi)^* = \ell_{\psi^*}$ である. 特に, ψ が *regular* ならば $(\ell_\psi)^* = \ell_{\psi^*}$.
(ii) ℓ_ψ (*resp.* c_ψ) が回帰的であることと, ψ と ψ^* がともに *regular* であることは同値.

最後に, ℓ_ψ の可分性, 狭義凸性についての結果を述べる. 任意の $\psi \in \Psi_\infty$ に対して, 明らかに c_ψ は可分である.

定理 7 $\psi \in \Psi_\infty$ とする. このとき, ℓ_ψ は可分であることと ψ が *regular* であることは同値である. 即ち, $\ell_\psi \supsetneqq c_\psi$ ならば ℓ_ψ は可分でない.

定義 8 X を *Banach* 空間とする. このとき, X が狭義凸であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ なる任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

であるときをいう.

例 9 (i) $\ell_p (1 < p < \infty)$ は狭義凸だが, ℓ_1, ℓ_∞ は狭義凸でない.
(ii) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を狭義凸なバナッハ空間の列とする. また $1 < p < \infty$ とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_p$ は狭義凸.

斎藤－加藤－高橋は, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute ノルムの狭義凸性について, 次のように凸関数で特徴付けた.

定理 10 ([11]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ は狭義凸であることと ψ が Δ_n 上で狭義凸であることは同値である.

同様に, ℓ_0 上に対しても次のことがわかる.

定理 11 $\psi \in \Psi_\infty$ とする. このとき, $(\ell_0, \|\cdot\|_\psi)$ が狭義凸であることと ψ が Δ_∞ 上狭義凸であることは同値である.

この定理から, ℓ_ψ 空間について, 次のことがわかる.

定理 12 $\psi \in \Psi_\infty$ とする. このとき, ℓ_ψ が狭義凸であるならば, ψ が Δ_∞ 上狭義凸である.

これは, $(\ell_0, \|\cdot\|_\psi)$ が ℓ_ψ の部分空間であるから, 明らかである. しかし, この結果の逆は成立しない.

例 13 $\mathbb{C}^n$ 上に次のように帰納的に定義するノルムを導入する.

$$\|(x_1, x_2)\|_\phi = \|(x_1, x_2)\|_{p_1} \ (\ell_{p_1} - norm)$$

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\phi = \|(\|(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\|_\phi, x_n)\|_{p_n}, \ (\ell_{p_n} - norm).$$

ここで p_n は

$$p_n = \frac{\log 2}{\log(1 + \frac{1}{n^2+4n+3})}.$$

このとき $1 < p_n < +\infty$ $(\forall n)$ と $p_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ である. ℓ_0 上のノルム $\|\cdot\|_\phi$ を

$$\|\{x_n\}\|_\phi = \sup_n \|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\phi$$

と定義すると, 明らかに $\|\cdot\|_\phi \in AN_\infty$ である. さらに $(\ell_0, \|\cdot\|_\phi)$ は狭義凸であることが容易にわかる. 従って, 対応する ϕ は狭義凸関数である. しかし, ℓ_ϕ は狭義凸でないことがわかる.

参考文献

[1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] R. Bhatia, Matrix analysis, Springer, 1997.

[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[4] R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[5] M. Kato, K. -S. Saito, T. Tamura, *On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., 75(2003), 413-422.

[6] R. E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Grad. Texts in Math. 183, Springer, New York, 1998.

[7] K. Mitani, K. -S. Saito, T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on $\mathbb{C}^n$.*, J. Convex. Anal., 10, (2003), 89-107.

[8] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces, to appear in Math. Inequal. Appl.

[9] K.-S. Saito, M. Kato, *Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 277, (2003), no.1, 1-11.

[10] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normes on $\mathbb{C}^2$*, J. Math. Anal. Appl., 244(2000), 515-532.

[11] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$*, J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879–905.

[12] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute normes on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., 7(2002), 179-186.