数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 132-138

亜距離空間上の鏡映と Mazur-Ulam theorem

(Reflections and Mazur-Ulam theorem on metricpoid spaces)

山形大学工学部　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology , Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

山形大学工学部　三浦　毅 (Takeshi Miura)
Department of Basic Technology , Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

1．目論みと美意識

いつか解析研で齋藤三郎教授が「数学は関係の学問である」と喝破されが、数学の本質的な一面を簡潔に述べた名言と思う。命題 $A \Rightarrow B$ について A と B が異質であればある程この命題は数学的に面白く価値があると思う。最もこれは数学の世界に限らず我々日常生活においてもしかりであるが。

数学の世界では位相構造と代数（あるいは線形）構造は全く異質のものである。しかしながらこれらの構造が基本的に両立する世界の一つに Banach 環、Banach 空間がある。代数的性質から位相的性質を導く有名な定理の一つに Barry Edward Johnson の定理がある。これは「Banach 環から半単純 Banach 環への全射が準同型であれば自動的に連続である」ことを主張する。 逆に位相的性質から線形的性質を導く有名な定理の一つに Mazur-Ulam theorem がある。これは「ノルム空間から他のノルム空間への全単射が等距離的であれば自動的に姻戚的 (affine) である」ことを主張する。

最近 J. Väisälä は A. Vogt の idea に基づいて Mazur-Ulam theorem の simple proof を与えた。J. Väisälä の証明あるいは Väisälä -Vogt の idea の本質を探り、それを抽象化して Mazur-Ulam theorem の一般的定理を得ようと試みるのが我々の目論みである。その本質は対称性と言う数学で最も重要な美意識にある。

2．一般化への道

線形空間 X から他の線形空間への写像 f が<u>*姻戚的*</u> (affine)であるとは、それが比を保存する、つまり内点及び外点を保存することである。式に表せば

$$f(pa+(1-p)b)=pf(a)+(1-p)f(b) \quad (\forall a,b\in X, \forall p\in \boldsymbol{R})$$

を満たすことである。さて X がノルム空間の場合を考える。この場合は f が連続のとき、f が姻戚的であることと、それが中点を保存すること、つまり

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (\forall a,b\in X)$$

が成り立つこととは同値である。ここに $\frac{x+y}{2}$ は x と y の平均であり、抽象化の第 1 歩として、この平均を線形性を持たない空間でどう定義するかが問題となる。

この問題を解決するため、$\frac{x+y}{2}=a$ と置いてみる。このとき $y=2a-x$ となり、これを写像 $y=\rho_a(x)$ と見ると、ρ_a は点 a における 空間 X の鏡映 (reflection) となり、これによって演算を持たない空間でも平均が定義できる。これらの概念は次節で正確な定義をする。

次にノルム空間の代わりに線形性を持たない空間を考えなければならない。これは通常距離空間で代表されるのであるが、この場合距離空間では不十分である。何

故かと言われても困るのであるがこれは直観である。そこで登場するのが亜距離 (subdistance) である。集合 X に対して、次の条件を満たす関数 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}^+$ を X 上の亜距離と呼ぼう：

(1) $d(x, y) = 0$ if and only if $x = y$.

(2) For any $x, y \in X$, there is a real constant $K(x, y) \geq 0$ such that $d(gx, x) \leq K(x, y)$ for all bijective d-isometries g on X with $gy = y$.

組 (X, d) を亜距離空間 (a metricpoid space) と呼ぶことにする。簡単な考察により距離空間は亜距離空間であることがわかる。しかしながら次の例が示すように逆は一般に成立しない。

単位的半単純可換 Banach 環 A を与え、A の正則元全体を A^{-1} で表す。r_A を A のスペクトル半径とするとき、

$$d(x, y) = r_A\left(\frac{x}{y} - 1\right),\ x, y \in A^{-1}$$

で定義される関数 d を考えると、(A^{-1}, d) は亜距離空間となるが、距離空間ではない。

3．主定理

亜距離空間 (X, d) 上の自己写像 ρ が点 $a \in X$ における鏡映であるとは次の条件を満たすときをいう：

(3) $\rho(a) = a$.

(4) $\rho^2 = id$.

(5) ρ is isometric.

(6) There is a constant $L(a) > 1$ such that $d(\rho x, x) \geq L(a) d(x, a)$ for all $x \in X$.

上の自己写像 ρ は点 a に関する点対称変換を image しており、それ故定数 $L(a)$ が 1 より本当にに大きいことがこの場合味噌となる。また容易な観察から ρ は等距離全単射で、点 a は ρ の唯一の不動点であることを知る。点 $a \in X$ における X の鏡映全体の集合を $R(X; a)$ で表そう。

我々の議論の出発点は次の不動点定理にある。

補題 1．亜距離空間 X 上の等距離全単射のある族 G が群を作ると仮定する。このとき点 $x \in X$ が条件 $\sup_{g \in G} d(gx, x) < \infty$ 及び $\exists \rho \in R(X; x) : \rho g^{-1} \rho g \in G\ (\forall g \in G)$ を満たせば、点 x は G の共通の不動点である。

さて鏡映による<u>平均</u> (mean) を定義しよう。各 $a, b \in X$ に対して

$$\frac{a \circ b}{2} = \{x \in X : \exists \rho \in R(X; x) \text{ with } \rho a = b\}$$

で定義された $\frac{a \circ b}{2}$ を a と b の平均と呼ぶ。これは我々の議論の中で基本的概念の一つであり、写像との関連で次の定義は自然である。

定義 1．亜距離空間 X から他の亜距離空間 Y への写像 f は条件：

$$f\left(\frac{a \circ b}{2}\right) = \frac{fa \circ fb}{2} \quad (\forall a, b \in X)$$

を満たすとき, <u>*平均を保存する*</u> (mean preservng) という。

次の結果は少し計算を要するが、補題 1 から導かれる。

補題2．亜距離空間 X から他の亜距離空間 Y への等距離全単射 f と $\frac{a \circ b}{2} \neq \varnothing$ 且つ $\frac{fa \circ fb}{2} \neq \varnothing$ を満たす X 上の2点 a, b が与えられたとする。このとき、平均 $\frac{a \circ b}{2}$ 及び $\frac{fa \circ fb}{2}$ は1点集合であり且つ $f\left(\frac{a \circ b}{2}\right) = \frac{fa \circ fb}{2}$ が成り立つ。

系1．亜距離空間 X 上の2点 x, y に対して, 平均 $\frac{x \circ y}{2}$ は空かまたは1点集合である。

また次の定義も自然であろう。

定義2．亜距離空間 X は条件：$R(X; x) \neq \varnothing$ $(\forall x \in X)$ が満たされるとき<u>**鏡映的**</u>(reflective)であると言う。また $\frac{x \circ y}{2} \neq \varnothing$ $(\forall x, y \in X)$ が満たされるとき, <u>**強鏡映的**</u>(strongly reflective) であるという。

注意。亜距離空間 (X, d) が強鏡映的であれば必然的に鏡映的であり、d は対称的、つまり $d(x, y) = d(y, x)$ $(\forall x, y \in X)$ であることを示すことができる。

上の強鏡映的概念を用いると, 補題2から直ちに次の定理が従う。

定理1．強鏡映的亜距離空間の間の全ての等距離全単射は平均を保存する。
(Every bijective isometry between strongly reflective metricpoid spaces is mean preserving.)

4．主定理の具体化

I. ノルム空間は強鏡映的亜距離空間であることを見ることは易しい。それ故次の Mazur-Ulam theorem が主定理から直接導かれる。

系2 (Mazur-Ulam theorem)．ノルム空間の間の全ての等距離全単射は姻戚的である。(Every bijective isometry between normed spaces is affine.)

II. 次の条件を満たす群構造を持つ亜距離空間 (X, d) を考えよう：

(7) $d(ax^{-1}a, ay^{-1}a) = d(x, y)$ $(\forall a, x, y \in X)$.
(8) $\forall a \in X$, $\exists L(a) > 1 : d(ax^{-1}a, x) \geq L(a)d(x, a)$ $(\forall x \in X)$.

このとき X は鏡映的である。また各 $x, y \in X$ に対して $\frac{x \circ y}{2} \supseteq \{a \in G : axa^{-1} = y\}$ であることを観察することができる。それ故もし

(9) $\{a \in G : axa^{-1} = y\} \neq \varnothing$ $(\forall x, y \in X)$

ならば X は強鏡映的である。我々はこのような亜距離空間を超鏡映的亜距離群(super reflective metricpoid group) と呼ぶことにする。

次の結果は主定理の直接の結果であり、それはまた Mazur-Ulam theoerm の一般化である。

系3．超鏡映的亜距離群の間の全ての等距離全単射は平均を保存する。(Every bijective isometry between super reflective metricpoid groups is mean preserving.)

上の系3を更に具体化しよう。いまコンパクト Hausdorff 空間 T 上の連続関数の作る C*-環 $C(T)$ に対して、

$$C^+(T) = \{x \in C(T) : x(t) > 0 \ (\forall t \in T)\}$$

とおく。このとき $C^+(T)$ は積のもとで群を作る。また $C^+(T) \times C^+(T)$ 上の非負値関数 d_0 を次式で定義しよう：

$$d_0(x, y) = \left\| \frac{(x-y)^2}{xy} \right\| \quad (x, y \in C^+(T)).$$

このとき $(C^+(T), d_0)$ は超鏡映的亜距離群であることを示すことができる。次の結果は $(C^+(T), d_0)$ 上の全単射が等距離ならば積に関して姻戚的であることを述べている。

定理２． $C^+(T)$ からそれ自身への全単射 f が

$$\left\| \frac{(fx-fy)^2}{fxfy} \right\| = \left\| \frac{(x-y)^2}{xy} \right\| \quad (x, y \in C^+(T))$$

を満たせば, $f(x^p y^{1-p}) = f(x)^p f(y)^{1-p}$ $(\forall x, y \in C^+(T), \forall p \in \boldsymbol{R})$ である。

前述の $C^+(T)$ に対して、$C^+(T) \times C^+(T)$ 上の非負値関数 d_1 を次式で定義しよう：

$$d_1(x, y) = \left\| \frac{y}{x} - 1 \right\| \left\| \frac{x}{y} - 1 \right\| \quad (x, y \in C^+(T)).$$

このとき $(C^+(T), d_1)$ は超鏡映的亜距離群であることを示すことができる。次の結果は $(C^+(T), d_1)$ 上の全単射が等距離ならば積に関して姻戚的であることを述べている。

定理３． $C^+(T)$ からそれ自身への全単射 f が

$$\left\| \frac{fy}{fx} - 1 \right\| \left\| \frac{fx}{fy} - 1 \right\| = \left\| \frac{y}{x} - 1 \right\| \left\| \frac{x}{y} - 1 \right\| \quad (x, y \in C^+(T))$$

を満たせば, $f(x^p y^{1-p}) = f(x)^p f(y)^{1-p}$ $(\forall x, y \in C^+(T), \forall p \in \boldsymbol{R})$ である。

上の結果から次にような自然な問題が発生する。

問題. 上と類似の結果がどのような可換 Banach 環について成り立つか？

５．証明

１．２節の (A^{-1}, d) が亜距離空間となることの証明：It is trivial that d satisfies (1). To see that d satisfies (2), let $x, y \in A^{-1}$ and g an isometry on A^{-1} with $gy = y$. Let Φ_A be the Gelfand space of A and take a point $\varphi_0 \in \Phi_A$ such that $r_A\left(\frac{gx}{x} - 1\right) = \left| \frac{(gx)^\wedge(\varphi_0)}{\hat{x}(\varphi_0)} - 1 \right|$.

Then we have

$$\begin{aligned}
d(gx, x) &= \left| \frac{(gx)^\wedge(\varphi_0)}{\hat{x}(\varphi_0)} - 1 \right| \\
&\leq \frac{|\hat{y}(\varphi_0)|}{|\hat{x}(\varphi_0)|} \left| \frac{(gx)^\wedge(\varphi_0)}{\hat{y}(\varphi_0)} - 1 \right| + \frac{|\hat{x}(\varphi_0) - \hat{y}(\varphi_0)|}{|\hat{x}(\varphi_0)|} \\
&\leq r_A(y)\, r_A(x^{-1})\, r_A\left(\frac{gx}{y} - 1\right) + r_A(x-y)\, r_A(x^{-1}) \\
&= r_A(y)\, r_A(x^{-1})\, d(gx, y) + r_A(x-y)\, r_A(x^{-1}) \\
&= r_A(y)\, r_A(x^{-1})\, d(x, y) + r_A(x-y)\, r_A(x^{-1}) \quad (\text{since } g \text{ is isometric and } gy = y)
\end{aligned}$$

and hence we see that d satisfies (2) by taking $K(x, y) = \left(r_A(y)\, d(x, y) + r_A(x-y)\right) r_A(x^{-1})$.

Q. E. D.

2. 補題 1 の証明 : Let $x \in X$ be such that $\lambda(x; G) := \sup_{g \in G} d(gx, x) < \infty$ and there is $\rho \in R(X; x)$ such that $\rho g^{-1} \rho g \in G$ for all $g \in G$. We take $g \in G$ arbitrarily and set $h = \rho g^{-1} \rho g$. Then $h \in G$ by hypothesis. Since

$$d(hx, x) = d(\rho g^{-1} \rho gx, \rho x) = d(g^{-1} \rho gx, x) = d(\rho gx, gx) \geq L(x) d(gx, x),$$

it follows that $\lambda(x; G) \geq L(x)\lambda(x; G)$ and then $\lambda(x; G) = 0$. In other words, x is a common fixed point of G. Q. E. D.

3. 補題 2 の証明 : Let G be the family of all bijective isometries on X keeping the points a and b fixed. Then G is a bijective isometry group acting on X such that both a and b are common fixed points of G. Let $x \in \frac{a \circ b}{2}$ and $y \in \frac{fa \circ fb}{2}$ be arbitrary. Then there are $\rho \in R(X; x)$ and $\theta \in R(Y; y)$ with $b = \rho a$ and $fb = \theta fa$. For every $g \in G$, we have

$$\rho g^{-1} \rho ga = \rho g^{-1} \rho a = \rho g^{-1} b = \rho b = a \text{ and } \rho g^{-1} \rho gb = \rho g^{-1} \rho b = \rho g^{-1} a = \rho a = b$$

and hence $\rho g^{-1} \rho g \in G$. Note also that $\sup_{g \in G} d(gx, x) < \infty$. In fact, if d is a subdistance function on X, then $d(px, x) \leq K(x, a)$ for all $p \in G$ and hence $\sup_{g \in G} d(gx, x) \leq K(x, a) < \infty$. Therefore we have that x is a common fixed point of G by Lemma 1. Set $h = \rho f^{-1} \theta f$ and so h is a bijective isometry on X. Also we have

$$ha = \rho f^{-1} \theta fa = \rho f^{-1} fb = \rho b = a \text{ and } hb = \rho f^{-1} \theta fb = \rho f^{-1} fa = \rho a = b$$

and hence $h \in G$. But since x is a common fixed point of G, it follows that $hx = x$. Therefore we have

$$\theta fx = f \rho \rho f^{-1} \theta fx = f \rho hx = f \rho x = fx$$

and so $fx = y$ since y is the only fixed point of θ. This observation implies the desired result. Q. E. D.

4. $(C^{+}(T), d_0)$ が超鏡映的亜距離群であることの証明 : We first note that $C^{+}(T)$ becomes a group under the multipilication. Also we set

$$d_0(x, y) = \left\| \frac{(x-y)^2}{xy} \right\|$$

for each $x, y \in C^{+}(T)$. Then d_0 clearly satisfies (1). To see that d_0 satisfies (2), let $x, y \in C^{+}(T)$ and g a bijective isometry on $C^{+}(T)$ with $gy = y$. Pick $t_g \in T$ such that

$$\left\| \frac{(gx - x)^2}{(gx)x} \right\| = \frac{\left((gx)(t_g) - x(t_g)\right)^2}{(gx)(t_g)x(t_g)}.$$

Note that

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{2(b^2 + c^2)}{bc} \geq \frac{(a-c)^2}{ac} \tag{10}$$

for all positive numbers a, b and c. Therefore we have

$$\begin{aligned} d_0(gx, x) &= \left\| \frac{(gx - x)^2}{(gx)x} \right\| = \frac{\left((gx)(t_g) - x(t_g)\right)^2}{(gx)(t_g)x(t_g)} \\ &\leq \frac{y(t_g)^2 + x(t_g)^2}{y(t_g)x(t_g)} \frac{\left((gx)(t_g) - y(t_g)\right)^2}{(gx)(t_g)y(t_g)} + \frac{2\left(y(t_g)^2 + x(t_g)^2\right)}{y(t_g)x(t_g)} \quad \text{by (10)} \\ &\leq \frac{y(t_g)^2 + x(t_g)^2}{y(t_g)x(t_g)} d_0(gx, y) + \frac{2\left(y(t_g)^2 + x(t_g)^2\right)}{y(t_g)x(t_g)} \\ &\leq \left(\|y\|^2 + \|x\|^2\right) \|y^{-1}\| \|x^{-1}\| (d_0(x, y) + 2) \end{aligned}$$

and hence d_0 satisfies (2) by taking $K(x, y) = \left(\|y\|^2 + \|x\|^2\right)\|y^{-1}\|\|x^{-1}\|(d_0(x, y) + 2)$. We thus see that $(C^+(T), d_0)$ becomes a metricpoid space. Also we can easily see that d_0 clearly satisfies (7) and (9). To see that d_0 satisfies (8), let $a, x \in X$ and pick $t_x \in T$ such that

$$\left\| \frac{(a-x)^2}{ax} \right\| = \frac{\left(a(t_x) - x(t_x)\right)^2}{a(t_x)x(t_x)}.$$

Then

$$2d_0(x, a) = 2\left\| \frac{(a-x)^2}{ax} \right\| = 2\,\frac{\left(a(t_x) - x(t_x)\right)^2}{a(t_x)x(t_x)} \le \frac{\left(a(t_x)^2 - x(t_x)^2\right)^2}{a(t_x)^2 x(t_x)^2}$$

$$\le \left\| \frac{\left(a^2 - x^2\right)^2}{a^2x^2} \right\| = d_0(ax^{-1}a, x)$$

and hence d_0 satisfies (8) by taking $L(a) = 2$. Therefore $(C^+(T), d_0)$ is a super reflective metricpoid group. Q. E. D.

5．定理 2 の証明：We need the following lemma but omit the proof.

Lemma 4. (i) Let f be a self-map on $C^+(T)$ such that $\left\| \frac{(fx - fy)^2}{fxfy} \right\| = \left\| \frac{(x-y)^2}{xy} \right\|$ for all $x, y \in X$. Then f is norm-continuous.

(ii) Let $a \in C^+(T)$ be fixed. Then the function $p \to a^p$ from $\boldsymbol{R}$ to $C^+(T)$ is continuous.

Now suppose that f is a bijection on $C^+(T)$ such that $\left\| \frac{(fx - fy)^2}{fxfy} \right\| = \left\| \frac{(x-y)^2}{xy} \right\|$ for all $x, y \in C^+(T)$. Then f is a bijective d_0-isometry on $C^+(T)$. Also as observed in the above argument, $(C^+(T), d_0)$ is a super reflective metricpoid group. Then $f(\sqrt{xy}) = \sqrt{fxfy}$ holds for all $x, y \in C^+(T)$ by Corollary 3. By the iteration of $f(\sqrt{xy}) = \sqrt{fxfy}$, we see that $f(x^r y^{1-r}) = f(x)^r f(y)^{1-r}$ for $x, y \in C^+(T)$ and all dyadic rational r between 0 and 1. Therefore $f(x^p y^{1-p}) = f(x)^p f(y)^{1-p}$ for all $x, y \in C^+(T)$ and all real number p between 0 and 1, and hence all real number $p \in \boldsymbol{R}$ by Lemma 4. Q. E. D.

6．$(C^+(T), d_1)$ は超鏡映的亜距離群であることの証明：これは証明が非常に長く複雑であるため割愛する。興味のある方は文献 [4] を参照されたい。

7．定理 3 の証明：We need the following lemma but omit the proof.

Lemma 6. Let f be a self-map on $C^+(T)$ such that $\left\| \frac{fy}{fx} - 1 \right\| \left\| \frac{fx}{fy} - 1 \right\| = \left\| \frac{y}{x} - 1 \right\| \left\| \frac{x}{y} - 1 \right\|$ for all $x, y \in C^+(T)$. Then f is norm-continuous.

Now suppose that f is a bijection on $C^+(T)$ such that $\left\| \frac{fy}{fx} - 1 \right\| \left\| \frac{fx}{fy} - 1 \right\| = \left\| \frac{y}{x} - 1 \right\| \left\| \frac{x}{y} - 1 \right\|$ for all $x, y \in C^+(T)$. Then f is a bijective d_1-isometry on $C^+(T)$. Also as observed in the above argument, $(C^+(T), d_1)$ is a super reflective metricpoid group. Then $f(\sqrt{xy}) = \sqrt{fxfy}$ holds for all $x, y \in C^+(T)$ by Corollary 3. By the same method used in the proof of Theorem 2, we see that $f(x^p y^{1-p}) = f(x)^p f(y)^{1-p}$ for all $x, y \in C^+(T)$ and all $p \in \boldsymbol{R}$ with aid of Lemmas 6 and 4-(ii). Q. E. D.

参考文献

1. S. Mazur and S. Ulam, Sur les transformationes isometrique d'espaces vectoriels normes, C. R. Acad. Sci. Paris 194(1932), 946-948.

2. J. Väisälä , A proof of the Mazur-Ulam theorem, Amer. Math. Monthly, 110-7(2003), 633-635.

3. A. Vogt, Maps which preserve equality of distance, Studia Math., 45(1973), 43-48.

4. S.-E. Takahasi and T. Miura, Reflections and Mazur-Ulam theorem on metricpoid spaces, preprint.