数理解析研究所講究録 1417 巻 2005 年 60-73

Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations

埼玉大学理学部数学科　太田 雅人 (Masahito Ohta)

Department of Mathematics, Faculty of Science

Saitama University

§1. 序

非線形 Schrödinger 方程式や非線形 Klein-Gordon 方程式の定在波解の軌道安定性及び不安定性は 1980 年代初頭より盛んに研究され ([1, 5, 23, 24, 25, 30]), Grillakis, Shatah and Strauss [8, 9] により一般論としては一応完成したと考えられる. 近年は, 定在波解の漸近安定性もよく研究されている ([3, 6, 22, 26, 27]) が, ここで考える単一冪型の方程式 (1), (8) に対する結果はまだないようである. 本稿では, 非線形 Klein-Gordon 方程式の定在波解の不安定性に関する Grozdena Todorova (University of Tennessee) との共同研究について紹介する.

1. 初期値問題　次の非線形 Klein-Gordon 方程式に対する初期値問題

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

について考える. ここで, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ で, 本稿を通して

$$N \geq 2, \quad 1 < p < 1 + \frac{4}{N-2} \tag{3}$$

を仮定する. エネルギー空間 $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ における (1) (2) の適切性は知られている ([7]): 任意の $(u_0, u_1) \in X$ に対して, ある $T > 0$ が存在し, (1)–(2) の解 $\vec{u} := (u, \partial_t u) \in C([0,T); X)$ が一意的に存在する. その最大存在時間を $T^* = T^*(u_0, u_1)$ と表すと, $T^* < \infty$ ならば $\lim_{t \to T^*} \|\vec{u}(t)\|_X = \infty$. また, エネルギー及び電荷の保存則

$$E(\vec{u}(t)) = E(u_0, u_1), \quad Q(\vec{u}(t)) = Q(u_0, u_1), \quad t \in [0, T^*)$$

が成り立つ. ここで

$$E(u, v) = \frac{1}{2}\|v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \tag{4}$$

$$Q(u, v) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u} v \, dx. \tag{5}$$

定在波解の安定性の研究において, 電荷の保存則はエネルギー保存則と同程度に重要な役割を果たす.

解の漸近挙動によって初期データを次の3つに分類する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{(u_0, u_1) \in X : T^*(u_0, u_1) < \infty\}, \\
\mathcal{G} &= \{(u_0, u_1) \in X : T^*(u_0, u_1) = \infty, \ \sup_{t \geq 0} \|\vec{u}(t)\|_X < \infty\}, \\
\mathcal{U} &= \{(u_0, u_1) \in X : T^*(u_0, u_1) = \infty, \ \sup_{t \geq 0} \|\vec{u}(t)\|_X = \infty\}.
\end{aligned}$$

エネルギー保存則と Sobolev の不等式から, $\|(u_0, u_1)\|_X < \delta$ ならば $(u_0, u_1) \in \mathcal{G}$ となる $\delta > 0$ が存在することが分る. また, 等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\|u(t)\|_2^2 = -2K_1(\vec{u}(t)), \tag{6}$$

$$K_1(u, v) = -\|v\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

を用いて, $E(u_0, u_1) < 0$ ならば $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$ が示される ([11]). さらに, $\mathcal{U}$ については, Cazenave [4] により, $N = 2$ のときは $p \leq 5$, $N \geq 3$ のときは $p \leq N/(N-2)$ な

る条件の下で, $\mathcal{U}=\emptyset$ であることが示されている. 後の §4 で, $p<1+4/(N-1)$ ならば $\mathcal{U}=\emptyset$ であることを示す. $N=2$ のとき $1+4/(N-1)=5$, $N=3$ のとき $1+4/(N-1)=N/(N-2)=3$, $N\geq 4$ のとき $N/(N-2)<1+4/(N-1)$ に注意する.

2. 定在波解 $\omega\in\mathbb{R}$ に対して, $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ が

$$-\Delta\varphi+(1-\omega^2)\varphi=|\varphi|^{p-1}\varphi, \quad x\in\mathbb{R}^N \tag{7}$$

の解であるとき, $u(t,x)=e^{i\omega t}\varphi(x)$ を (1) の**定在波解**という. 定在波解が存在するためには, $-1<\omega<1$ が必要である. また, $-1<\omega<1$ のとき, (7) は一意的な正値球対称解 ϕ_ω をもつことが知られている ([28, 10]). $e^{i\omega t}\phi_\omega$ を (1) の**基底状態**, 基底状態以外の定在波解を**励起状態**という (但し, 偏角及び平行移動の違いは同一視する). 定在波解の安定性に関する既知の結果の多くは基底状態に対するものであり, 励起状態に対する結果はあまり知られていない. (1) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の安定性については次が知られている.

- $\omega=0$ のとき, 爆発不安定 ([1], cf. [24])
- $p<1+4/N$, $\omega_c<|\omega|<1$ のとき, 軌道安定 ([23])
- $p<1+4/N$, $|\omega|<\omega_c$ または $p\geq 1+4/N$, $|\omega|<1$ のとき, 軌道不安定 ([25])

ここで

$$\omega_c=\sqrt{\frac{p-1}{4-(N-1)(p-1)}}$$

であり, 以下で述べる定義から, 爆発不安定ならば軌道不安定である. また, $\omega=0$ のときの爆発不安定性は等式 (6) に基づく. 本稿では, 次の 2 つの問題について考えたい.

- 臨界の場合 $p<1+4/N$, $|\omega|=\omega_c$ はどうか?
- $\omega\neq 0$ のとき, 軌道不安定性よりも強い意味の不安定性は成り立つか?

3. 定義 (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi$ に対して, $\vec{\varphi} = (\varphi, i\omega\varphi)$ とおく. 次が成り立つとき, $e^{i\omega t}\varphi$ は**軌道安定**であるという: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|(u_0, u_1) - \vec{\varphi}\|_X < \delta$ ならば, (1)–(2) の解 $\vec{u}(t)$ は $\sup_{t\geq 0}\inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^N}\|\vec{u}(t) - e^{i\theta}\vec{\varphi}(\cdot + y)\|_X < \varepsilon$ をみたす. また, 軌道安定でないとき, $e^{i\omega t}\varphi$ は**軌道不安定**であるという. さらに, $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{B}}$ であるとき, $e^{i\omega t}\varphi$ は**爆発不安定**であるといい, $\vec{\varphi} \in \overline{\mathcal{B}\cup\mathcal{U}}$ であるとき, $e^{i\omega t}\varphi$ は**強不安定**であるという. ここで, $\overline{A}$ は X における A の閉包を表す.

【注意】 定義から, 爆発不安定 $\Rightarrow$ 強不安定 $\Rightarrow$ 軌道不安定.

4. 非線形 Schrödinger 方程式

$$-i\partial_t u - \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \tag{8}$$

の定在波解の安定性については次が知られている.

- $p < 1 + 4/N$ のとき, 基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ はすべて軌道安定 ([5])
- $p > 1 + 4/N$ のとき, 基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ はすべて爆発不安定 ([1])
- $p = 1 + 4/N$ のとき, 定在波解 $e^{i\omega t}\varphi$ はすべて爆発不安定 ([29])

エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ において (8) に対する初期値問題は適切であり, エネルギー及び電荷の保存則が成り立つ. 但し, (8) のエネルギーと電荷は

$$E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \quad Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|_2^2$$

と定義される. また, 初期データ $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が $xu_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ をみたせば, (8) の解 $u(t)$ はヴィリアル等式

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_2^2 = 16P(u(t)), \\ &P(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{N(p-1)}{4(p+1)}\|u\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned} \tag{9}$$

をみたす. $p \geq 1+4/N$ のときの爆発不安定性は等式 (9) に基づく. 特に, $p = 1+4/N$ のとき, $P(u) = E(u)$ に注意する.

§2. 主結果と証明の概略

次の 4 つの定理は G. Todorova との共同研究 ([19, 20]) による.

定理 1 $p < 1+4/N$, $|\omega| = \omega_c$ とし, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ を (7) の球対称解とする. このとき, (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi$ は爆発不安定である.

定理 2 $p < 1+4/N$, $|\omega| < \omega_c$ のとき, (1) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は爆発不安定である.

定理 3 $p \geq 1+4/N$ のとき, (1) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ はすべて強不安定である. さらに, $N = 2, 3$ のときは $p \leq 1+4/(N-1)$, $N \geq 4$ のときは $p < 1+4/(N-1)$ を仮定すると, (1) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ はすべて爆発不安定である.

定理 4 $N \geq 3$, $|\omega| \leq \sqrt{(p-1)/(p+3)}$ のとき, (1) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は爆発不安定である.

定理 4 の証明は, $\omega = 0$ に対する Berestycki-Cazenave [1] と同じく, 等式 (6) に基づく. 但し, K_1 だけでなく,

$$K_2(u,v) = -\frac{1}{2}\|v\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

を用いた基底状態の変分法的特徴付けも使うため, $N \geq 3$ が必要になる.

定理 1, 2, 3 の証明は, Shatah [24] を参考にする. [24] では

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla u \partial_t \bar{u}\, dx = NK_2(\vec{u}(t)) \tag{10}$$

に基づき, $N \geq 3$, $\omega = 0$ のとき, (1) の基底状態の強不安定性を示している. 但し, (10) の左辺の積分はエネルギー空間 X では定義されないので, 非有界な関数 x を有界な関数列で近似する. また, その近似による誤差を制御するために, 摂動を球対称な関数に制

限し, 球対称な $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対する減衰評価 ([28])

$$\|w\|_{L^\infty(|x|\geq m)} \leq Cm^{-(N-1)/2}\|w\|_{H^1} \tag{11}$$

を用いる. $N \geq 2$ という仮定は, ここで必要となる. このような方法は非線形 Schrödinger 方程式の解の爆発問題でも用いられる ([17, 18, 12, 13, 14, 16]). また, (10) は

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2\{\frac{1}{2}|\partial_t u|^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{2}|u|^2-\frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\}dx \\ &=-2\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N}x\cdot\nabla u\partial_t\bar{u}\,dx=-2NK_2(\vec{u}(t))\end{aligned} \tag{12}$$

と書くことができるが, 等式 (6) や非線形 Schrödinger 方程式に対するヴィリアル等式 (9) の左辺の積分と異なり, (12) の左辺の積分は正定値ではないので, (12) から爆発不安定性を直接示すはできないことに注意する. そこで, 定理 1, 2, 3 では, 強不安定性と非有界な時間大域解の非存在性から爆発不安定性を導くという方針をとる.

$p \geq 1 + 4/N$ のとき (定理 3) は

$$-\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\{2x\cdot\nabla u+Nu\}\partial_t\bar{u}\,dx=4P(u(t)) \tag{13}$$

の近似を考える. ここで, P は非線形 Schrödinger 方程式に対するヴィリアル等式 (9) の右辺に現れる汎関数と同じものである. また, (6) は

$$-\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N}u\partial_t\bar{u}\,dx=K_1(\vec{u}(t)) \tag{14}$$

とかけ, (13) は (10) と (14) から導かれることに注意する.

$p < 1 + 4/N$ のとき (定理 1, 2) は

$$-\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\{2x\cdot\nabla u+(N+\alpha)u\}\partial_t\bar{u}\,dx=K(\vec{u}(t)) \tag{15}$$

(cf. [25, p.185]) の近似を考える. ここで, $\alpha := 4/(p-1) - N > 0$,

$$\begin{aligned}K(u,v)&:=4P(u)+\alpha K_1(u,v)\\&=-\alpha\|v\|_2^2+\alpha\|u\|_2^2+(\alpha+2)\{\|\nabla u\|_2^2-\frac{2}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\}.\end{aligned}$$

(13), (15) の左辺に現れる $r = |x|$ 及び N の近似として, 次の性質をみたす非負値関数列 $\{\Psi_m\}, \{\Phi_m\} \subset C^2([0,\infty))$ をとる.

- $0 \le r \le m$ のとき, $\Psi_m(r) = r$, $\Phi_m(r) = N$,
- $\forall r \ge 0$ に対し, $\Psi'_m(r) + \dfrac{N-1}{r}\Psi_m(r) = \Phi_m(r)$,
- $\forall r \ge 0$, $k = 0,1,2$ に対し, $|\Phi_m^{(k)}(r)| \le Cm^{-k}$,
- $\forall r \ge 0$ に対し, $\Psi'_m(r) \le 1$.

このとき, $\vec{u}(t)$ を (1) の球対称解とすると, (13) の近似として

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\{2\Psi_m\partial_r u + \Phi_m u\}\partial_t\bar{u}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\{2\Psi'_m|\nabla u|^2 - \frac{p-1}{p+1}\Phi_m|u|^{p+1} - \frac{1}{2}\Delta\Phi_m|u|^2\}\,dx \\
&\le 4P(u(t)) + \frac{N(p-1)}{p+1}\int_{|x|\ge m}|u(t,x)|^{p+1}\,dx + \frac{C}{m^2}\|u(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{16}$$

が成り立つ. また, (15) の近似として

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\{2\Psi_m\partial_r u + (\Phi_m+\alpha)u\}\partial_t\bar{u}\,dx \\
&\le K(\vec{u}(t)) + \frac{N(p-1)}{p+1}\int_{|x|\ge m}|u(t,x)|^{p+1}\,dx + \frac{C}{m^2}\|u(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{17}$$

が成り立つ. 右辺第 2 項を制御するために, 球対称関数に対する減衰評価 (11) を用いる. また, $K(u,v)$ は

$$\begin{aligned}
K(u,v) = &-2(\alpha+1)\|v - i\omega u\|_2^2 + 2(\alpha+2)(E-\omega Q)(u,v) \\
&-2\alpha\omega Q(u,v) - 2\{1-(\alpha+1)\omega^2\}\|u\|_2^2
\end{aligned} \tag{18}$$

と保存量 E, Q を用いてかけ, $|\omega| = \omega_c$ のときは $(\alpha+1)\omega^2 = 1$ であることに注意する. (16), (17) を用いて, 定理 1, 2, 3 において強不安定性が示される. 強不安定性から爆発

不安定性を導くためには, $\mathcal{U}=\emptyset$, すなわち, (1) の任意の時間大域解はエネルギー空間 X において有界であることを示せばよい. $u(t)$ を (1) の時間大域解とすると, (6) から $\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_2<\infty$ は容易に分る ([4]). この L^2 評価とエネルギー保存則及び Gagliardo-Nirenberg の不等式から, $p<1+4/N$ のとき $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$ が分る. もう少し工夫すると, $p<1+4/(N-1)$ ならば $\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$ を示すことができる (cf. [4, 15]).

以上で, 定理の証明の概略を述べたが, 次の §3 では, 定理 1 を証明する. また, §4 では, $p<1+4/(N-1)$ のとき, (1) の時間大域解の有界性を示す.

§3. 定理 1 の証明

$\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ を (7) with $\omega=\omega_c$ の球対称解とし, $\vec{\varphi}:=(\varphi,i\omega_c\varphi)$,

$$\delta(\lambda):=\alpha\omega_cQ(\lambda\vec{\varphi})-(\alpha+2)(E-\omega_cQ)(\lambda\vec{\varphi})$$

とおく. このとき, $K(\vec{\varphi})=0$ より, 任意の $\lambda>1$ に対して $\delta(\lambda)>0$ であることが分る. $\lambda>1$ とし, $\vec{u}(0)=\lambda\vec{\varphi}$ なる (1) の解 $u(t)$ がすべての $t\geq 0$ に対して存在し, X で有界である, すなわち,

$$M_1:=\sup_{t\geq 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$$

と仮定し, 矛盾を導く. φ は球対称だから, すべての $t\geq 0$ に対して $u(t)$ は球対称であることに注意する.

$$I_m(t)=\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\{2\Psi_m\partial_r u+(\Phi_m+\alpha)u\}\partial_t\bar{u}\,dx$$

とおくと, (17) より,

$$-I_m'(t)\leq K(\vec{u}(t))+R_m(t),\quad t\geq 0$$

が成り立つ. ここで,

$$R_m(t)=\frac{N(p-1)}{p+1}\int_{|x|\geq m}|u(t,x)|^{p+1}dx+\frac{C}{m^2}\|u(t)\|_2^2.$$

さらに, (18) 及び $\omega=\omega_c$ のとき $(\alpha+1)\omega_c^2=1$ だから,

$$
\begin{aligned}
K(\vec{u}(t)) &= -2(\alpha+1)\|\partial_t u(t)-i\omega_c u(t)\|_2^2 - 2\{1-(\alpha+1)\omega_c^2\}\|u(t)\|_2^2 \\
&\quad +2(\alpha+2)(E-\omega_c Q)(\vec{u}(t)) - 2\alpha\omega_c Q(\vec{u}(t)) \\
&\le 2(\alpha+2)(E-\omega_c Q)(\vec{u}(0)) - 2\alpha\omega_c Q(\vec{u}(0)) = -2\delta(\lambda).
\end{aligned}
$$

また, 球対称関数に対する減衰評価 (11) より

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\ge m} |u(t,x)|^{p+1}\,dx \le \|u(t)\|_{L^\infty(|x|\ge m)}^{p-1}\|u(t)\|_2^2 \\
&\le Cm^{-(N-1)(p-1)/2}\|u(t)\|_{H^1}^{p+1} \le CM_1^{p+1}m^{-(N-1)(p-1)/2}.
\end{aligned}
$$

よって, 十分大きな $m_0>0$ を取れば, すべての $t\ge 0$ に対して, $R_{m_0}(t)\le\delta(\lambda)$ が成り立つ. 故に, すべての $t\ge 0$ に対して, $I'_{m_0}(t)\ge\delta(\lambda)$ が成り立ち, $\delta(\lambda)>0$ だから, $t\to\infty$ のとき $I_{m_0}(t)\to\infty$. 一方, $I_{m_0}(t)$ の定義より, m_0 から決まる正定数 C が存在して,

$$
I_{m_0}(t) \le C\|\vec{u}(t)\|_X^2 \le CM_1^2, \quad t\ge 0
$$

であるが, これは矛盾である. 故に, 任意の $\lambda>1$ に対して, $\vec{u}(0)=\lambda\vec{\varphi}$ なる (1) の解 $u(t)$ は (i) 有限時間で爆発する, あるいは, (ii) 大域的に存在し, $\limsup_{t\to\infty}\|\vec{u}(t)\|_X=\infty$, のどちらかである. ところで, $p<1+4/N$ だから, (ii) のケースは起こりえない. よって, $u(t)$ は有限時間で爆発する. これは, $e^{i\omega_c t}\varphi$ の爆発不安定性を示している. □

§4. 時間大域解の有界性

この節では, Merle and Zaag [15] を参考にして, 次の命題を証明する.

命題 5 $N\ge 2$, $1<p<1+4/(N-1)$ とする. このとき, (1) の時間大域解 $\vec{u}\in C([0,\infty),X)$ は $\sup_{t\ge 0}\|\vec{u}(t)\|_X<\infty$ をみたす.

証明 $\vec{u} \in C([0,\infty), X)$ を (1) の時間大域解とする. Cazenave [4] の Section 3 において, $1 < p < 1 + 4/(N-2)$ のとき

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_2 < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|u(s)\|_X^2 \, ds < \infty \tag{19}$$

が示されている. また, エネルギー保存則と (19) の第2式より

$$C_1 := \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{p+1}^{p+1} \, ds < \infty \tag{20}$$

が成り立つ. Cazenave [4] の Section 4 における議論では, $p \leq N/(N-2)$ が必要となるので, 以下では, Merle and Zaag [15] の Section 3 の議論を用いて, $p < 1 + 4/(N-1)$ のとき, $\sup_{t \geq 0} \|\vec{u}(t)\|_X < \infty$ が成り立つことを示す.

Step 1. $r = (p+3)/2$ に対して, $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_r < \infty$ が成り立つことを示す.

(20) と平均値の定理より, 任意の $t \geq 0$ に対して $\tau(t) \in [t, t+1]$ が存在して

$$\|u(\tau(t))\|_{p+1}^{p+1} = \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{p+1}^{p+1} \, ds \leq C_1.$$

ここで, $2 < r < p+1$ だから, 上式と (19) の第1式より, $\sup_{t \geq 0} \|u(\tau(t))\|_r < \infty$. また, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_r^r - \|u(\tau(t))\|_r^r = \int_{\tau(t)}^t \frac{d}{ds} \|u(s)\|_r^r \, ds \\
&\leq C \int_t^{t+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u(s,x)|^{r-1} |\partial_s u(s,x)| \, dx \, ds \\
&\leq C \int_t^{t+1} (\|u(s)\|_{2(r-1)}^{2(r-1)} + \|\partial_s u(s)\|_2^2) \, ds.
\end{aligned}$$

ここで, $r = (p+3)/2$ のとき $2(r-1) = p+1$ だから, $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_r < \infty$ が成り立つ.

Step 2. Gagliardo-Nirenberg の不等式より,

$$\|u(t)\|_{p+1} \leq C \|u(t)\|_r^{1-\theta} \|\nabla u(t)\|_2^{\theta}.$$

ここで

$$\frac{1}{p+1} = \theta(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}) + \frac{1-\theta}{r}$$

であり, $p < 1 + 4/(N-1)$ のとき $(p+1)\theta < 2$ だから, Step 1 より, 正定数 C_0 が存在して

$$\frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \le C_0 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2, \quad t \ge 0.$$

さらに, エネルギー保存則より, 任意の $t \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_X^2 &= 2E(\vec{u}(0)) + \frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ &\le 2E(\vec{u}(0)) + C_0 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

よって, $\sup_{t\ge 0}\|\vec{u}(t)\|_X < \infty$ が成り立つ. □

References

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[2] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983) 313–345.

[3] V. S. Buslaev and G. S. Perelman, Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: states close to a soliton, St. Petersburg Math. J. **4** (1993) 1111–1143.

[4] T. Cazenave, Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Funct. Aanl. **60** (1985) 36–55.

[5] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.

[6] S. Cuccagna, Stabilization of solutions to nonlinear Schrödinger equations, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001) 1110–1145.

[7] J. Ginibre and G. Velo, The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation, Math. Z. **189** (1985) 487-505.

[8] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[9] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, II, J. Funct. Anal. **94** (1990) 308–348.

[10] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal., **105** (1989) 234–266.

[11] H. A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974) 1–21.

[12] F. Merle, On uniqueness and continuation properties after blow-up time of self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equation with critical exponent and critical mass, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992) 203–254.

[13] F. Merle, Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power, Duke Math. J. **69** (1993) 427–454.

[14] F. Merle, Blow-up results of virial type for Zakharov equations, Comm. Math. Phys. **175** (1996) 433–455.

[15] F. Merle and H. Zaag, Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation, Amer. J. Math. **125** (2003) 1147–1164.

[16] H. Nawa, Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999) 193–270.

[17] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation, J. Differential Equation **92** (1991) 317–330.

[18] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, Blow-up of H^1 solutions for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991) 487–496.

[19] M. Ohta and G. Todorova, Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations, Preprint.

[20] M. Ohta and G. Todorova, Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equation and Klein-Gordon-Zakharov system, In preparation.

[21] L. E. Payne and D. H. Sattinger, Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math. **22** (1975) 273–303.

[22] C.-A. Pillet and C. E. Wayne, Invariant manifolds for a class of dispersive, Hamiltonian, partial differential equations, J. Differential Equations **141** (1997) 310–326.

[23] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.

[24] J. Shatah, Unstable ground state of nonlinear Klein-Gordon equations, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985) 701–710.

[25] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.

[26] A. Soffer and M. I. Weinstein, Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations I, Comm. Math. Phys. **133** (1990) 119–146.

[27] A. Soffer and M. I. Weinstein, Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations II, J. Differential Equations **98** (1992) 376–390.

[28] W. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 149–162.

[29] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983) 567–576.

[30] M. I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 51–68.