数理解析研究所講究録 1421 巻 2005 年 65-71

SPINOR L-FUNCTIONS FOR GENERIC CUSP FORMS ON $GSp(2)$ BELONGING TO PRINCIPAL SERIES REPRESENTATIONS

石井 卓 (TAKU ISHII, 東京工業大学)
森山 知則 (TOMONORI MORIYAMA, 上智大学)

$\mathsf{G}=GSp(2)$ を $\mathbf{Q}$ 上定義された次数 2 の similitude つきの symplectic 群, $\Pi=\otimes'_v\Pi_v$ をアデール群 $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}=GSp(2,\mathbf{A})$ の尖点保型表現とする. 本稿では Moriyama ([Mo-2]) に続いて, Π_∞ が $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}=GSp(2,\mathbf{R})$ の主系列表現と同型になる場合に, Π に付随する spinor L 関数 $\Lambda(s,\Pi)$ が全 s 平面上の整関数に解析接続され関数等式を満たすことを紹介する.

その証明には [Mo-2] と同じように Novodvorsky のゼータ積分を用いる. 従って Π が generic, つまりある尖点形式 $F\in\Pi$ に対する大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ が消えないという仮定を要する. このとき各 local component Π_v も Whittaker 模型を持つことになり, 無限素点においては, Kostant の結果 ([Ko, Theorem 6.8.1]) により Π_∞ は Vogan の意味で large でなければならない. [V] によると $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の large な既約表現は $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の放物部分群の conjugacy class に対応して 4 つのクラスに分けられるが, そのうち (i) G 自身, つまり Π_∞ の $Sp(2,\mathbf{R})$ への制限が大きな離散系列表現の直和, (ii) Jacobi 型極大放物部分群から誘導された一般化主系列表現, の 2 つのクラスが [Mo-2] によって扱われた. 本稿では残る 2 つのクラスのうち, $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の極小放物部分群に対応するもの, すなわち Π_∞ が $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の主系列表現となる場合を考える.

なお, 記号など [Mo-2], [Mo-3] と重複するところが多いのでそちらも併せて参照されたい.

§1. 主定理

(1.1) 大域的 Whittaker 関数. まず上で述べた generic という仮定について説明する. G を次数 2 の similitude 付きの symplectic 群とする:

$$\mathsf{G}=GSp(2):=\{g\in GL(4)\mid {}^tgJ_4g=\nu(g)J_4 \text{ for some } \nu(g)\in\mathbf{G}_m\},\ J_4:=\left(\begin{array}{c|c} & 1_2\\ \hline -1_2 & \end{array}\right).$$

ここで G は $\mathbf{Q}$ 上の代数群と考える. $\mathbf{Q}$-algebra R に対して, G の R-valued points のなす群を G_R と書くことにする. 他の代数群についても同様. G の極大べき単部分群を

$$\mathsf{N}:=\left\{n(x_0,x_1,x_2,x_3):=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & & x_1 & x_2\\ & 1 & x_2 & x_3\\ \hline & & 1 & \\ & & & 1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc}1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1\end{array}\right)\in\mathsf{G}\right\}$$

ととり, $\mathsf{N}_{\mathbf{A}}$ の非退化指標 ψ を

$$\psi(n(x_0,x_1,x_2,x_3))=\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0+x_3)$$

で固定する. ここで, $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}:\mathbf{A}/\mathbf{Q}\mapsto\mathbf{C}^{(1)}$ は $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(t_\infty)=\exp(2\pi\sqrt{-1}t_\infty)$ $(t_\infty\in\mathbf{R})$ で特徴付けられる additive character である (なおこの ψ の定義は [Mo-2] とは異なっていることを注意しておく).

$\Pi = \otimes'_v \Pi_v$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ の尖点保型表現とする．尖点形式 $F \in \Pi$ に付随する大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F : \mathsf{G}_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ を

$$\mathcal{W}_F(g) := \int_{\mathsf{N}_{\mathbf{Q}} \backslash \mathsf{N}_{\mathbf{A}}} F(ng)\psi(n^{-1})\, dn$$

によって定める．本稿では以下を仮定する:

仮定 Π が generic, すなわちある尖点形式 $F \in \Pi$ に対して $\mathcal{W}_F$ が消えない．

(1.2) $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の主系列表現. 前節の仮定により各 Π_v も Whittaker 模型を持つことになるが，序文で述べたようにここでは Π_∞ が $\mathsf{G}_{\mathbf{R}} = GSp(2,\mathbf{R})$ の主系列表現になる場合を扱う．

$P_{\min} = MAN$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の極小放物部分群の Langlands 分解とする．ここで

$$M = \langle \gamma_0 := \mathrm{diag}(-1,-1,1,1),\ \gamma_1 := \mathrm{diag}(-1,1,-1,1),\ \gamma_2 := \mathrm{diag}(1,-1,1,-1) \rangle,$$
$$A = \{\mathrm{diag}(a_0a_1, a_0a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_i > 0\ (i = 0,1,2)\},$$
$$N = \mathsf{N}_{\mathbf{R}}.$$

σ を M の character とし，$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}^3$ に対して $\exp(\nu)$ という A の quasi-character を

$$\exp(\nu)(a) := \prod_{i=0}^{2} a_i^{\nu_i}, \text{ for } a = \mathrm{diag}(a_0a_1, a_0a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})$$

によって定義する．このとき，誘導表現

$$I(P_{\min}; \sigma, \nu) := C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{P_{\min}}^{G}(\sigma \otimes \exp(\nu + \rho) \otimes 1_N)$$

を $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の主系列表現という．ここで，$\rho = (3/2, 2, 1) \in \mathbf{C}^3$.

さて $K := \mathsf{G}_{\mathbf{R}} \cap O(4)$ とおくと，K は $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の極大コンパクト部分群になり，$K_0 := Sp(2,\mathbf{R}) \cap O(4)$ も $Sp(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群になりユニタリー群 $U(2)$ と同型なる:

$$U(2) \ni A + \sqrt{-1}B \mapsto k_{A,B} := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in K_0, \quad (A, B \in M(2,\mathbf{R})).$$

よく知られているように

$$\widehat{K_0} = \{\tau_{(\lambda_1,\lambda_2)} := \mathrm{Sym}^{\lambda_1-\lambda_2} \otimes \det^{\lambda_2} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z},\ \lambda_1 \geq \lambda_2\}$$

である．$I(P_{\min}; \sigma, \nu)$ の K_0-type は σ の M 上での値で決まり，次の 4 つの場合

Case 1. $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = 1$,
Case 2. $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = -1$,
Case 3. $\sigma(\gamma_1) = 1$, $\sigma(\gamma_2) = -1$,
Case 4. $\sigma(\gamma_1) = -1$, $\sigma(\gamma_2) = 1$

のもとにそれぞれに，(i) $\sigma(\gamma_0) = 1$, (ii) $\sigma(\gamma_0) = -1$ の 2 つのクラスがあり，全部で 8 通りの場合が考えられる．

(1.3) 主結果. Π に付随する spinor L 関数 $L(s,\Pi)$ は，

$$L(s,\Pi) = \prod_{v<\infty} L(s,\Pi_v).$$

ここで有限素点における L 因子 $L(s,\Pi_v)$，および ϵ 因子 $\epsilon(s,\Pi_v,\psi_v)$ については [TB], [Mo-3] を参照．無限素点における L 因子を

$$L(s,\Pi_\infty) := \Gamma_{\mathbf{R}}\Big(s + \frac{\omega_\infty + \nu_1 + \nu_2}{2} + \delta_1\Big)\Gamma_{\mathbf{R}}\Big(s + \frac{\omega_\infty - \nu_1 + \nu_2}{2} + \delta_2\Big)$$
$$\times \Gamma_{\mathbf{R}}\Big(s + \frac{\omega_\infty + \nu_1 - \nu_2}{2} + \delta_3\Big)\Gamma_{\mathbf{R}}\Big(s + \frac{\omega_\infty - \nu_1 - \nu_2}{2} + \delta_4\Big)$$

で定める. ここで $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, Π の central character ω_Π に対し, $\omega_\Pi(t) = t^{\omega_\infty}$ ($t \in \mathbf{R}_{>0}$) で ω_∞ を定める. つまり $\omega_\infty = 2\nu_0 - \nu_1 - \nu_2$. さらに $\delta_i \in \{0,1\}$ は

$$(-1)^{\delta_1} = \sigma(\gamma_0), \quad (-1)^{\delta_2} = \sigma(\gamma_0\gamma_1), \quad (-1)^{\delta_3} = \sigma(\gamma_0\gamma_2), \quad (-1)^{\delta_4} = \sigma(\gamma_0\gamma_1\gamma_2).$$

となるようにとる. そして ϵ 因子 $\epsilon(s,\Pi_\infty,\psi_\infty)$ を

$$\epsilon(s,\Pi_\infty,\psi_\infty) = \sqrt{-1}^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4} = \begin{cases} 1 & \text{Case } 1 \\ -1 & \text{Case } 2,3,4 \end{cases}$$

によって定める. このとき完備化された spinor L 関数 $\Lambda(s,\Pi)$, ϵ 因子 $\epsilon(s,\Pi)$ を

$$\Lambda(s,\Pi) = L(s,\Pi_\infty)\cdot L(s,\Pi), \quad \epsilon(s,\Pi) = \prod_v \epsilon(s,\Pi_v,\psi_v)$$

で定義する. また $F \in \Pi$ に対して,

$$\widetilde{F}(g) = \omega_\Pi(\nu(g))^{-1}F(g\eta), \quad \eta := \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right) \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}}$$

とおくと, $\Pi^\vee = \{\widetilde{F} \mid F \in \Pi\}$ も $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ の generic な尖点保型表現であって, 無限素点において主系列表現を生成する. 我々の主張は以下の通りである.

<u>**定理**</u> $\Pi = \otimes_v' \Pi_v$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ の generic な尖点保型表現であって, Π_∞ は $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の既約主系列表現と同型であるとする. このとき完備化された spinor L 関数 $\Lambda(s,\Pi)$ は全 s 平面上の整関数に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(s,\Pi) = \epsilon(s,\Pi)\Lambda(1-s,\Pi^\vee)$$

を満たす.

§2. 主定理の証明

[Mo-2] と同様に Novodvorsky のゼータ積分を用いて主定理を証明する. Novodvorsky の理論については, [N], [B1, §3], [Mo-3] などを参照されたい. 以下では, [Mo-2], [Mo-3] と同じ用語, 記号を用いる. また簡単のため $\omega_\infty = 0$ とする.

(2.1) 局所 Whittaker 関数の明示公式. $v \in \Pi_\infty = I(P_{\min};\sigma,\nu)$ に対する局所 Whittaker 関数を $W_v \in \mathrm{Wh}(\Pi_\infty,\psi_\infty)$ と書く. Π_∞ がクラス 1 主系列表現の場合 (=Case 1) は Niwa ([Ni]), 一般の場合には Ishii ([I]) によって, (minimal K_0-type に属するベクトル v に対して) W_v の積分表示式が得られた (cf. Proskurin [P]). そこでは K-Bessel 関数の積を含むような形の公式が与えられているが, 我々の目的のためには [Mo-2] の計算と同様に次のような Mellin-Barnes 型積分表示が有用である (cf. [Mo-1]).

命題 (Case 1) $\omega_\infty = 2\nu_0 - \nu_1 - \nu_2 = 0$ とする. $GSp(2,\mathbf{R})$ のクラス 1 主系列表現の spherical vector を v_0 とする. このとき W_{v_0} の動径成分 $W_{v_0}|_{A_0}$ ($A_0 = Sp(2,\mathbf{R}) \cap A$) は次のような

積分表示を持つ.

$$\begin{aligned}
&W_{v_0}|_{A_0}\big(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\big)\\
&= a_1^2a_2\int_{L(\sigma_1)}\frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{L(\sigma_2)}\frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{L(\tau_1)}\frac{dt_1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{L(\tau_2)}\frac{dt_2}{2\pi\sqrt{-1}}\Big(\pi\frac{a_1}{a_2}\Big)^{-s_1}(\pi a_2^2)^{-s_2}\\
&\quad\times\Gamma\Big(\frac{s_1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_1-t_1-t_2}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_2-t_1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_2-t_2}{2}\Big)\\
&\quad\times\Gamma\Big(\frac{t_1}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{t_1}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{t_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{t_2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4}\Big).
\end{aligned}$$

ここで $\sigma\in\mathbf{R}$ に対して積分路 $L(\sigma)$ は $\mathbf{C}$ 平面において $\sigma-\sqrt{-1}\infty$ から $\sigma+\sqrt{-1}\infty$ に向かう虚軸に平行な直線を意味し, $\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2\in\mathbf{R}$ は

$$\sigma_1>\tau_1+\tau_2,\quad \sigma_2>\max(\tau_1,\tau_2),\quad \tau_1>\frac{|\mathrm{Re}(\nu_1-\nu_2)|}{2},\quad \tau_2>\frac{|\mathrm{Re}(\nu_1+\nu_2)|}{2}$$

を満たすようにとる.

(2.2) 局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,W)$ の計算. 前節の公式を用いて局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,W)$ ($W\in\mathrm{Wh}(\Pi_\infty,\psi_\infty)$) を計算し, 無限素点における局所関数等式を導く. [Mo-2] と同様に Hoffstein-Murty ([H-M]) に習って, 変数を 1 つ増やして

$$Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W):=\int_{\mathbf{R}^\times}d^\times y\int_{\mathbf{R}}dx\ W(X(x,y;y_1))|y|^{s-3/2}$$

とおく ($Z_N^{(\infty)}(s,W)=Z_N^{(\infty)}(s,1;W)$). ここに

$$X(x,y;y_1)=\left(\begin{array}{cc|cc} yy_1 & & & \\ & y & & \\ \hline & & y_1^{-1} & \\ & x & & 1\end{array}\right).$$

さらに

$$Z_N^{\pm}(s,y_1;W):=\int_0^\infty d^\times y\int_{\mathbf{R}}dx\ W(X(\pm x,\pm y;y_1))y^{s-3/2}$$

とおけば, $v\in\Pi_\infty$ に対して,

$$\begin{aligned}
Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W_v)&=Z_N^{+}(s,y_1;W_v)+Z_N^{-}(s,y_1;W_v)\\
&=Z_N^{+}(s,y_1;W_v)+Z_N^{+}(s,y_1;W_{\Pi_\infty(\gamma_0)v})
\end{aligned}$$

となる. 従って $\Pi_\infty(\gamma_0)v=-v$ となる場合には上の積分がゼロになってしまうので, $v\in\Pi_\infty$ を適当に選んでゼータ積分が消えないようにしなければならない. 実際後述のように Case 1-(ii) では minimal K-type から少しずらしたところで計算する. これは $GL(2,\mathbf{R})$ の主系列表現, つまり Maass wave form $f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_ne^{2\pi\sqrt{-1}nz}$ において, $a_n=-a_{-n}$ の場合には $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ に対してゼータ積分を計算することの類似である (cf. [B2, 1.9]).

Case 1-(i) $v_0(k_{A,B})=1$ (spherical vector) とすると $\sigma(\gamma_0)v_0=1$ なので, $Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W_{v_0})=2Z_N^{+}(s,y_1;W_{v_0})$ となる. [Mo-2] と同様に $X(x,y;y_1)$ を岩澤分解して W_{v_0} の Mellin-Barnes 型積分表示を代入して, x,y で積分した後, Barnes の (1st-)Lemma を用いて s_2,t_1,t_2 の順に積分を実行すると次を得る:

命題 (Case 1-(i))

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W_{v_0})}{L(s,\Pi_\infty)} = 2^4\pi^{1/2}y_1^{2-s}\int_{L(\sigma_1)}\frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}}(\pi y_1)^{-2s_1} \times \frac{\Gamma(s_1+\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(s_1-\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(s_1+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(s_1-\frac{\nu_1+\nu_2}{4})}{\Gamma(s_1+\frac{s}{2})\Gamma(s_1-\frac{s-1}{2})}.$$

従って s_1 の積分の中身は $y_1=1$ とすれば $s\leftrightarrow 1-s$ で不変であることが容易に見て取れるので, 局所関数等式

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(s,W_{v_0})}{L(s,\Pi_\infty)} = \frac{Z_N^{(\infty)}(1-s,\widetilde{W}_{v_0})}{L(1-s,\Pi_\infty^\vee)}$$

を得る.

注意 1 この s_1 についての積分は Γ 関数の積商で書くことはできない. 実際 Meijer の G 関数という合流型の特殊関数 $(G_{2,4}^{4,0}(y_1))$ になり, 留数計算をすれば一般超幾何関数 ${}_3F_2(y_1)$ の和で記述される. それは Novodvorsky のゼータ積分が「diagonal」な積分になっておらず「unipotent」な積分 (=x での積分) を含むことに起因すると考えられる. またこの $G_{2,4}^{4,0}(y_1)$ は Π_∞ の generalized Bessel model を考えたときの球関数 (の「境界値」) になっていると考えられる ([Mo-4]).

注意 2 講演では, Hoffstein-Murty が $GL(3)\times GL(1)$ のゼータ積分を計算するのに用いた trick をこの場合に適用することでこの命題を証明した. すなわち $Z_N^+(s,y_1;W_v)$ を y_1 で Mellin 変換すると,

$$\int_0^\infty Z_N^+(s,y_1;W_v)\,y_1^w d^\times y_1 = \int_0^\infty d^\times y_1\int_0^\infty d^\times y\,W_v|_{A_0}\big(\mathrm{diag}(\sqrt{y_1},\sqrt{y},1/\sqrt{y_1},1/\sqrt{y})\big)y_1^{w/2}y^{s-(w+3)/2} \times\int_{\mathbf{R}} dx\,\exp(2\pi\sqrt{-1}\,xy)\cdot(1+x^2)^{s-(w+3)/2}\Big(\frac{1-\sqrt{-1}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\Big)^m.$$

ここで m は

$$\Pi_\infty(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta \\ \hline & & 1 & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta \end{array}\right))v = e^{\sqrt{-1}\,m\theta}v$$

によって決まる整数. すると x での積分は $GL(2)$ の Jacquet 積分となり, $GL(2,\mathbf{R})$ の主系列表現に付随する Whittaker 関数の動径成分を表す. 故に全体の積分は $GSp(2)\times GL(2)$ の Novodvorsky 積分の無限成分 (この Rankin-Selberg 積分の詳細については [B1] などを参照) になり, この積分は「diagonal」な積分なのでゼータ積分の計算は比較的容易である. 実際 $GSp(2)$ と $GL(2)$ の尖点保型表現が無限素点でともにクラス 1 主系列表現を生成している場合 ($m=0$ となる) には Γ 関数の積商で書けることが Niwa ([Ni]) により示され

ている:

$$\int_0^\infty Z_N^+(s,y_1;W_{v_0})\,y_1^w d^\times y_1$$
$$= C\,\pi^{-(s+w+2)}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4}\Big)$$
$$\times\frac{\Gamma(\frac{-s+w+2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(\frac{-s+w+2}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(\frac{-s+w+2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{-s+w+2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4})}{\Gamma(-s+\frac{w+3}{2})\Gamma(\frac{w+2}{2})}.$$

従って Mellin-inversion を適用して上の命題を得る.

注意 3 $\Lambda(s,\Pi)$ が entire になることの証明は [Mo-2, §3.4] と同様にできる.

他の Case でも適当なベクトルに対する Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型積分表示を用いることで, 局所関数等式を示すことができる. 以下, それぞれの場合にどのベクトルを取って計算したかを述べておく.

Case 1-(ii) Case 1-(i) と同じベクトル v_0 に対してゼータ積分を計算すると先に述べたように $\Pi_\infty(\gamma_0)v_0=-v_0$ となり, $Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W)=0$ になってしまう. そこで,

$$v_1'(g):=v_0(g,X_{(1,1)}),\quad v_1''(g):=v_0(g,X_{(-1,-1)})$$

とおく. ここで, $v(g,X):=\frac{d}{dt}|_{t=0}v(g\exp(tX))\ \ (g\in\mathsf{G}_{\mathbf{R}}, X\in\mathrm{Lie}(\mathsf{G}_{\mathbf{R}}))$,

$$X_{(\pm1,\pm1)}=\left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \pm\sqrt{-1}\\ 1 & & \pm\sqrt{-1} & \\ \hline & \pm\sqrt{-1} & & -1\\ \pm\sqrt{-1} & & -1 & \end{array}\right).$$

v_1', v_1'' はそれぞれ $\tau_{(2,0)}$, $\tau_{(0,-2)}$ に属するベクトルで $\Pi_\infty(\gamma_0)v_1'=-v_1''$ となり $Z_N^{(\infty)}(s,y_1;W_{v_1'})$ は Case 1-(i) の場合とほぼ同様に計算できる.

Case 2 Π_∞ の minimal K_0-type $\tau_{(\pm1,\pm1)}$ の元

$$v_0(k_{A,B}):=\det(A+\sqrt{-1}B),\quad v_0'(k_{A,B}):=\det(A-\sqrt{-1}B)$$

を取ると, $\Pi_\infty(\gamma_0)v_0'=\sigma(\gamma_0)v_0$ となり (i), (ii) のいずれの場合も Case 1-(i) とほぼ同様に計算できる.

Case 3 Π_∞ の minimal K_0-type は $\tau_{(1,0)}$, $\tau_{(0,-1)}$ でいずれも表現は 2 次元になる.

$$(v_1(k_{A,B}),v_0(k_{A,B})):=(0,1)(A+\sqrt{-1}B),$$
$$(v_1'(k_{A,B}),v_0'(k_{A,B})):=(1,0)\det(A+\sqrt{-1}B)^{-1}(A+\sqrt{-1}B)$$

とすると $\{v_1,v_0\}$ (resp. $\{v_1',v_0'\}$) は $\tau_{(1,0)}$ (resp. $\tau_{(0,-1)}$) の standard basis となり, $\Pi_\infty(\gamma_0)v_0=\sigma(\gamma_0)v_1'$, $\Pi_\infty(\gamma_0)v_1=-\sigma(\gamma_0)v_0'$ を満たす. ゼータ積分の計算は若干の工夫を要するが上と同様の方針でできる.

Case 4 Case 3 と同様に Π_∞ の minimal K_0-type $\tau_{(1,0)}$, $\tau_{(0,-1)}$ の standard basis

$$(v_1(k_{A,B}),v_0(k_{A,B})):=(1,0)(A+\sqrt{-1}B),$$
$$(v_1'(k_{A,B}),v_0'(k_{A,B})):=(0,1)\det(A+\sqrt{-1}B)^{-1}(A+\sqrt{-1}B)$$

をとればよい.

REFERENCES

[B1] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. In: Number theory, trace formulas and discrete groups, Academic Press (1989), 49-109.

[B2] BUMP, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, (1997).

[H-M] HOFFSTEIN, J. AND MURTY, M. R., L-series of automorphic forms on $\mathrm{GL}(3, R)$, In: Théorie des nombres (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, (1989), 398–408.

[H] HORI, A., Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two, Math. Ann. **303** (1995), 195-226.

[I] ISHII, T.,On principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, preprint (2002).

[Ko] KOSTANT, B., On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math. **48** (1978), 101-184.

[Mo-1] MORIYAMA, T., A remark on Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9**(2002), 627-635.

[Mo-2] MORIYAMA, T., Entireness of the Spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, Amer. J. Math, **126** (2004), 899-920.

[Mo-3] MORIYAMA, T., $Sp(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について, 数理研講究録 1281 (2002), 1-13.

[Mo-4] MORIYAMA, T., this volume.

[Ni] NIWA, S., Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A.(1995), 189-191.

[N] NOVODVORSKY, M. E.,Automorphic L-functions for symplectic group $GSp(4)$, Proc. Sympos. Pure Math. **33-2** (1979), 87-95.

[P] PROSKURIN, N., Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions, Lect. Notes in Math. **1677** (1998).

[TB] TAKLOO-BIGHASH, R., L-functions for the p-adic group GSp(4), Amer. J. Math. **122** (2000), 1085-1120.

[V] VOGAN, D., Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, Invent. Math. **48** (1978), 75-98.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2-12-1 OH-OKAYAMA, MEGURO-KU, TOKYO 152-8551, JAPAN

E-mail address: taku@math.titech.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554, JAPAN

E-mail address: moriyama@mm.sophia.ac.jp