数理解析研究所講究録 1427 巻 2005 年 43-48

Lieb skew entropy と 柳・古市・栗山の不等式

大阪教育大学 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

最近、柳・古市・栗山の3人の先生方 [11] が次の不等式を考察されているということを間接的に知り、興味を持った(トレースを取った作用素不等式としては成立しない [5]):

柳・古市・栗山の不等式. If A and B are positive-definite contractive matrices, then

$$\mathrm{Tr}\ (A+B)^s\{A(\log A)^2+B(\log B)^2\} \geq \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}(A\log A+B\log B)^2]$$

holds for any real number $s \in [0,1]$.

この問題は、非可換情報理論で Holevo[8] が(古典的)量子通信路容量による通信路符号化において、「誤りべき指数」を定める「信頼性関数」について論じたことに端を発している。最大値を求めるために信頼性関数の中心部の凹性を Holevo が予想しつつも示せなかった経緯に対し、上記3人の先生方 [7] によって、凹性の十分条件が次のトレース不等式

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_k \pi_k S_k^{\frac{1}{1+s}}\right)^s \sum_k \pi_k S_k^{\frac{1}{1+s}}\left(\log S_k^{\frac{1}{1+s}}\right)^2\right] \geqq \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_k \pi_k S_k^{\frac{1}{1+s}}\right)^{s-1}\left(\sum_k \pi_k S_k^{\frac{1}{1+s}}\log S_k^{\frac{1}{1+s}}\right)^2\right]$$

の成立であると突き止められた。非常に明確な形になったものの、十分条件を与えるトレース不等式 (1) はやはり扱いにくく、まだこの問題は解決されていない。

そこで、特別な場合として、上記の不等式が論じられたが、2次行列では完全解決したものの、一般の行列では、$s=0,1$ の場合しか解かれていなかった。そこで、(1) にとらわれた形ではやはり難しいのではないかと考え、もっと一般的なエントロピー的な定式化をすれば解けるのではないかと思いついた。それは、通信路容量自体が相互エントロピーの

最大値であり、それに基づいた状況下での信頼性関数ということからも、無理のない思い付きだと思われる。そこで、目についたのが Lieb の skew information である [10]：

$$S_p(\rho, X) = \mathrm{Tr}\ \rho^{1-p} X \rho^p X - \mathrm{Tr}\ \rho X^2$$

for positive numbers $p \in (0,1)$, a density matrix $\rho \geq 0$ and an observable $X = X^*$.

これ自体は負の量であるが、形が似ているので、このエントロピーを拡張すれば解けそうだと考え、次の量を導入してみた（仮に Lieb skew entropy とでも呼んでおく）：

$$S_{f,g}(A, X) = \mathrm{Tr}\ f(A) X g(A) X - \mathrm{Tr}\ f(A) g(A) X^2$$

for selfadjoint matrices A and X.

すると、次の結果が得られる（$f, g \geqq 0$ の場合は Bourin[2, 3] が既に示していたので名前を冠しておく。実際上記の不等式を示すのには $f, g \geqq 0$ の場合で十分である）：

Bourin's theorem. If (f, g) is a monotone (resp. antimonotone) pair, then $S_{f,g}(A, X) \leqq 0$ (resp. $S_{f,g}(A, X) \geqq 0$).

ここで、(f, g) ：a **monotone** (resp. **antimonotone**) **pair** on D とは、

$$(f(a) - f(b))\,(g(a) - g(b)) \geqq 0 \quad (\text{resp. } (f(a) - f(b))\,(g(b) - g(a)) \geqq 0)$$

for any $a, b \in D \subset \mathrm{dom}\ f \cap \mathrm{dom}\ g$

が成り立つことである。証明を付しておく。

Proof. It suffices to consider the monotone case, that is,

$$f(a)g(b) + f(b)g(a) \leqq f(a)g(a) + f(b)g(b).$$

We may assume that A is diagonal; $A = \mathbf{diag}(t_1, ..., t_n)$. Since $x_{ij}x_{ji} = |x_{ij}|^2$ for selfadjoint $X = (x_{ij})$, we have

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\ f(A)Xg(A)X &= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} f(t_1)x_{11} & \cdots & f(t_1)x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t_n)x_{n1} & \cdots & f(t_n)x_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(t_1)x_{11} & \cdots & g(t_1)x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(t_n)x_{n1} & \cdots & g(t_n)x_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g(t_k)|x_{kk}|^2 + \sum_{k<j}\left(f(t_k)g(t_j) + f(t_j)g(t_k)\right)|x_{kj}|^2 \\
&\leqq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g(t_k)|x_{kk}|^2 + \sum_{k<j}\left(f(t_k)g(t_k) + f(t_j)g(t_j)\right)|x_{kj}|^2 \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} f(t_k)g(t_k)|x_{kj}|^2 \\
&= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} f(t_1)g(t_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(t_n)g(t_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_k |x_{1k}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \sum_k |x_{nk}|^2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Tr}\ f(A)g(A)X^2.
\end{aligned}
$$

Thus $S_{f,g}(A,X) \leqq 0$. □

特に $f(x) = x^s$, $g(x) = 1/x$ は antimonotone pair なので、$S_{f,g}(A,X) \geqq 0$ となり、負の場合も含んだ区間上の x^2 の作用素凸性に基づいた Jensen 不等式を使うことで、次のように少し一般的な形で、不等式を示すことができる：

Theorem. If A and B are $n \times n$ positive-definite matrices whose spectra are contained in an interval $[m, M]$, then the following inequalities hold for any $s \geqq 0$:

$$
\begin{aligned}
&S_{x^s,1/x}(A+B, A\log A + B\log B) + \frac{(\log\frac{m}{M})^2}{4}\mathrm{Tr}\ (A+B)^{s+1} \\
&\geqq \mathrm{Tr}\ [(A+B)^s\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\}] \\
&\qquad\qquad - \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}(A\log A + B\log B)^2] \\
&\geqq S_{x^s,1/x}(A+B, A\log A + B\log B) \geqq 0.
\end{aligned}
$$

上限の方はオマケであるが、いわゆる Mond-Pečarić method :

Lemma. If X and Y are Hermitian with $\ell \le X, Y \le L$ for real numbers ℓ and L and if $C^*C + D^*D = 1$, then

$$C^*X^2C + D^*Y^2D \le (C^*XC + D^*YD)^2 + \frac{(L-\ell)^2}{4}.$$

によってすぐわかる：

Proof. Putting $C = A^{1/2}(A+B)^{-1/2}$ and $D = B^{1/2}(A+B)^{-1/2}$, we can apply the above Jensen's inequality:

$$C^*(\log A)^2C + D^*(\log B)^2D \ge [C^*(\log A)C + D^*(\log B)D]^2,$$

and hence

$$\begin{aligned}&(A+B)^{s/2}\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\}(A+B)^{s/2}\\ &\qquad \geqq (A+B)^{(s+1)/2}\{C^*(\log A)C + D^*(\log B)D\}^2(A+B)^{(s+1)/2}.\end{aligned}$$

Put $E = A\log A + B\log B$. Then it follows that

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\ (A+B)^s\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\}\\ &\qquad \geqq \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{(s+1)/2}\{C^*(\log A)C + D^*(\log B)D\}^2(A+B)^{(s+1)/2}]\\ &\qquad = \mathrm{Tr}\ [(A+B)^sE(A+B)^{-1}E].\end{aligned}$$

Since $(x^s, 1/x)$ is a antimonotone pair of functions, we have by Bourin's Theorem

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\ [(A+B)^s\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\}] - \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}(A\log A + B\log B)^2]\\ &\quad \geqq \mathrm{Tr}\ [(A+B)^sE(A+B)^{-1}E] - \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}E^2]\\ &\quad = S_{x^s,1/x}(A+B, E) \geqq 0.\end{aligned}$$

This proves the second inequality of Theorem. Applying Lemma for $\ell = \log m$ and

$L = \log M$, we also have

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\ (A+B)^s\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\} \\
&\quad = \mathrm{Tr}\ (A+B)^{\frac{s+1}{2}}\{C^*(\log A)^2 C + D^*(\log B)^2 D\}(A+B)^{\frac{s+1}{2}} \\
&\quad \leqq \mathrm{Tr}\ (A+B)^{\frac{s+1}{2}}\left[\{C^*(\log A)C + D^*(\log B)D\}^2 + \frac{(\log \frac{M}{m})^2}{4}\right](A+B)^{\frac{s+1}{2}} \\
&\quad = \mathrm{Tr}\ [(A+B)^s E(A+B)^{-1}E] + \frac{(\log \frac{M}{m})^2}{4}\mathrm{Tr}\ (A+B)^{s+1}
\end{aligned}
$$

and hence

$$
\begin{aligned}
&S_{x^s,1/x}(A+B,E) + \frac{(\log \frac{M}{m})^2}{4}\mathrm{Tr}\ (A+B)^{s+1} \\
&\quad = \mathrm{Tr}\ (A+B)^s E(A+B)^{-1}E + \frac{(\log \frac{M}{m})^2}{4}\mathrm{Tr}\ (A+B)^{s+1} - \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}E^2] \\
&\quad \geqq \mathrm{Tr}\ [(A+B)^s\{A(\log A)^2 + B(\log B)^2\}] \\
&\qquad\qquad - \mathrm{Tr}\ [(A+B)^{s-1}(A\log A + B\log B)^2]
\end{aligned}
$$

This proves the first inequality of Theorem.

□

付記. 講演後に中本律男先生から指摘を受け、元の (1) が成立することが分かった。これは、[6] にまとめて投稿中である。

参考文献

[1] T.Ando, F.Hiai and K.Okubo: *Trace inequalities for multiple products of two matrices*, Math. Inequal. Appl. **3** (2000), 307–318.

[2] J.-C.Bourin: *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Alg. Appl. **292** (1999) 139–154.

[3] J.-C.Bourin: "Compressions, Dilations and Matrix Inequalities", RGMIA Monographs, Victoria university 2004. (`http://rgmia.vu.edu.au/monographs`)

[4] J.I.Fujii and M.Fujii: *Jensen's Inequalities on any interval for operators*, to appear in Nonlinear Anal. and Convex Anal..

[5] J.I.Fujii, M.Fujii and R.Nakamoto: *Jensen's operator inequality and its application*, Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku, Preprint.

[6] J.I.Fujii, R.Nakamoto and K.Yanagi: *Concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliability function in classical-quantum channels*, Preprint.

[7] S.Furuichi, K.Yanagi, and K.Kuriyama: *A sufficient condition on concavity of the auxiliary function appearing in quantum reliability function*, Information **6** (2003), no. 1, 71–76.

[8] F.Hansen and G.K.Pedersen: *Jensen's operator inequality*, Bulll. London Math. Soc. **35** (2003) 553–564.

[9] A.S.Holevo: *Reliability function of general classical-quantum channel*, IEEE Trans. Inform. Theory **46** (2000), no. 6, 2256–2261.

[10] E.H.Lieb: *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv. in Math., **11** (1973), 267–288.

[11] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama: *On trace inequalities and their applications to noncommutative communication theory*, to appear in Linear Alg. Appl. (`http://arxiv.org/abs/quant-ph/0403187`)