数理解析研究所講究録 1427 巻 2005 年 49-53



# 自己のスカラー倍にユニタリー同値になる作用素について
(On some operator unitarily equivalent to a scalar multiple of itself)

九州大学 大学院芸術工学研究院　太田　昇一 (Schôichi Ôta)
Faculty of Design, Department of Art and Information Design
Kyushu University

ヒルベルト空間上の weighted（片側、両側）シフト作用素 $T$ は, 絶対値が 1 の任意の複素数 $c$ に対して、その $c$ 倍である $c \cdot T$ にユニタリー同値になる。一方、ヒルベルト空間上の作用素 $S$ が自己の $\lambda$ $(|\lambda| \neq 1)$ 倍 $\lambda \cdot S$ にユニタリー同値ならば、その作用素は非有界になる。この講演では、非有界 weighted シフト作用素の場合、この性質はそのシフト作用素によって一意に定まる整数で特徴づけられる事を報告する。

## I.

$q$ を 1 でない正数とする。$T$ を稠密な定義域を持つ閉作用素とし、$T = U|T|$ を極分解とする。さらに、$K_T \equiv (U^*)^2$ とおく。

**例**　$T$ が関係式 $TT^* = qT^*T$ を満たすとする。このとき、$K_T$ は始集合と終集号が $\overline{\mathcal{R}(T)}$ なる部分的等距離作用素になり、$TK_T = qK_T T$ が成り立つ. 特に, $T$ は $q \cdot T$ にユニタリー同値になる.

**定義**　$T$ をヒルベルト空間上の稠密な定義域を持つ作用素とする。もし、1 でない正数 $q$ で $T$ が $q \cdot T$ にユニタリー同値になるものが存在するならば、$T$ は「性質 (Q) を持つ」という。

**命題**　稠密な定義域を持つ零でない閉作用素 $T$ が性質 (Q) を持つとする。この時、

1. $T$ は非有界である。
2. $T$ のスペクトラムは 0 を含む。

3. $T$ の絶対値 $|T|$ も性質 (Q) を持つ。

**II.**

$S$ を可分な Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の稠密な定義域を持つ閉作用素とする。もし、直交基底 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と 数列 $\{w_n\}(w_n \neq 0\ , n \in \mathbb{Z})$ で

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n \in \mathcal{H} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 |w_n|^2 < \infty \right\}$$

かつ

$$Se_n = w_n e_{n+1}$$

for all $n \in \mathbb{Z}$ を満たすものがある場合, $S$ を weights$\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を持つ両側 weighted シフト作用素 (with respct to $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$) という。同様にして, 片側 weighted シフト作用素も定義される.

**定義**　$q$ を 1 でない正数とする。$S$ を両側 weighted シフト作用素とする。もしも、$S$ がすべての $\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ にたいして $qe^{i\theta}S$ にユニタリー同値になるとき、$S$ は「$q$-circular」であるという。

性質 (Q) を持つ両側 weighted シフト作用素は、適当な正数 $q$ でもって $q$-circular になる。さらに、いかなる片側 weighted シフト作用素も性質 (Q) を持たない事に注意しておく。

**III.**

**定理**　$S$ を weights$\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を持つ両側 weighted シフト作用素とする。このとき、$S$ が $q$-circular であるための必要十分条件は、全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$|w_n| = q\,|w_{n+k}| \tag{1}$$

を満たす整数 $k$ が存在することである。

この場合、全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して上の等式 (1) を満たす整数 $k$ は一意に定まる。

**Notation** 上記の等式(1)を満たす整数$k$を$k(S,q)$と書くことにする。

**命題** この整数$k(S,q)$に関して：

1. $k(S,q) \neq 0$
2. 2つの両側weightedシフト作用素$S_1$、$S_2$がユニタリー同値とする。$S_1$が$q$-circularならば他方$S_2$もそうであり、
$$k(S_1,q) = k(S_2,q) \ .$$

$S$をweights$\{w_n\}$を持つ両側weightedシフト作用素(with respct to $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$)とする。この時、その共役作用素$S^*$は

$$\mathcal{D}(S^*) = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n \in \mathcal{H} : \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 |w_{n-1}|^2 < \infty \right\}$$

と

$$S^* \left( \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{w_{n-1}} \, e_{n-1} \ ,$$

で与えられる。この事に因り、その逆作用素$(S^*)^{-1}$もweights$\{\overline{w_n}^{-1}\}$を持つ両側weightedシフト作用素になる。

**命題** $S$を$q$-circular両側weightedシフト作用素とする。このとき、

1. $(S^*)^{-1}$も$q$-circularとなり、
$$k((S^*)^{-1},q) = -k(S,q)$$
を満たす。
2. 各零でない整数$m$にたいして、$S$は$q^m$-circularになり、以下の等式を満たす：
$$k(S,q^m) = mk(S,q).$$

**IV.**

<u>**定理**</u>　$S$ を $q$-circular で weights$\{w_n\}$ を持つ両側 weighted シフト作用素とする。もしも、$S$ が $q'$-circular ならば

$$q' = q^{\frac{k(S,q')}{k(S,q)}}$$

が成り立つ。

この結果によって、「任意の整数 $\mu$ に対して、$q$-circular な weighted シフト作用素は $q^{\frac{\mu}{k(S,q)}}$-circular になるか？」、すなわち、「整数 $\mu$ に対して $S$ は $q'$-circular（ただし、$k(S,q') = \mu$）になるか？」を問うのは自然だと思われる。もし、$\mu$ が $k(S,q)$ の倍数ならば明らか成り立つ。その他の場合について、$q$-変形作用素に関連して以下のことが成り立つ：

<u>**定理**</u>　$S$ を $q$-circular な weighted シフト作用素で $k(S,q) = 2$ とする。$\mu$ を奇数とする。このとき、以下は同値である：

- $S$ が $q^{\frac{\mu}{2}}$-circular。
- $S$ は等式
$$SS^* = qS^*S$$
を満たす。

**V.**

<u>**定理**</u>　$q$-circular、両側 weighted シフト作用素 $S$ のスペクトラムは複素数全体になる。さらに、以下のことが成り立つ：

1. $q > 1$ の場合：
 (a) もし $k(S,q) > 0$ のとき、

$$\sigma_p(S) = \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad \sigma_c(S) = \{0\} \quad \text{and} \quad \sigma_r(S) = \emptyset.$$

(b) もし $k(S,q)<0$のとき、

$$\sigma_p(S)=\emptyset, \quad \sigma_c(S)=\{0\} \quad \text{and} \quad \sigma_r(S)=\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

2. $0<q<1$の場合：
(a) もし $k(S,q)>0$のとき、

$$\sigma_p(S)=\emptyset, \quad \sigma_c(S)=\{0\} \quad \text{and} \quad \sigma_r(S)=\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

(b) もし $k(S,q)<0$のとき、

$$\sigma_p(S)=\mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad \sigma_c(S)=\{0\} \quad \text{and} \quad \sigma_r(S)=\emptyset.$$

さらに、上記の1-$(a)$と2-$(b)$における任意の固有値の重複度は1である。

## 参考文献

[1] S. Ôta, Some classes of $q$-deformed operators, *J. Operator Theory,* **48**(2002), 151-186.

[2] S. Ôta, $q$-deformed circular operators, to appear in Integral Equations and Operator Theory.

[3] Shields, A.L.: Weighted shift operators and analytic function theory, Math. Surveys, American Mathematical Society **13**, Providence Rhode Island (1974).