

自由落下水膜の数理的課題

筑波大学システム情報工学研究科 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH)

Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba

茨城県つくば市 305-8573(kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp)

2004 年 10 月

概要

自由落下水膜の実験から、自励振動現象を解明するための数理的な課題を提起した。また、半無限領域における線形安定性理論についてフーリエ sine, cosine 変換を基礎に議論を行なった。

1 序論

堰から越流する水膜は、落下に伴って自励振動を始める。水膜が空気中を振動しながら落下することで低周波音が発生し、また、振動振幅が増大すると水膜の破れが生じる。したがって、この現象の理解は滝における水滴の生成や水空間の設計にとって重要である。

水膜振動はナップの脈動現象に関連して過去に研究された [1, 2, 3]。ナップの振動の発生原因としては、ゲートと水膜背面の空気の連成振動 [4] および水膜上に発生する不安定波が考えられ、実際の現象はこれらが重合した形で起きている。また、水膜厚さが流れ方向に変化する流れの安定問題はフィルムのコーティングの際の液膜の安定性に関連して研究されている [3]。これら水膜の全体的な運動に対して、Taylor は水の表面張力が支配的となる空間スケールにおける水膜上の波・水膜の破れ・水滴生成について実験および理論から探求した [5, 6]。この方面の研究は液体の微粒化と併せてさらなる研究が進められている。とくに、液膜流の安定問題は、液体の噴霧化（燃料の混合）に関連して、実験的 [7] および理論的 [8] に研究されている。ただし、この現象では空気流によるせん断応力が支配的であるため、重力の効果は無視されている。一方、自由落下水膜は重力により厚さが変化し、本実験において水膜ばらけ位置における水膜厚さは数ミリ、落下速度は 6m/s であり、空気の影響を大きく受けている。

過去の実験から理解されるように [9]、落下水膜の振動を議論する際にはその原因を大きく別けて 2 つ考慮する必要がある。1 つ目は水膜と背後に閉じ込められた空気の連成振動による不安定性、2 つ目は落下水によって加速された空気流のせん断不安定である。水膜の落下高さが小さく、水膜前面もしくは背面の空気が閉じ込められている場合は前者の要因が支配的であり、水膜の落下高さが大きく水膜前後の空間が吹き抜けになっている場合には後者の要因が水膜振動に大きく関与する。水膜振動を理論的に予測する際に考慮すべき点を挙げると次のようになる。(A) 非一様流。(B) 重力の効果。(C) 空気を媒介とする圧力の伝播。(D) 水および空気のせん断流の不安定。(E) 水の表面張力の影響。これらに加えて、今回は特に側壁と

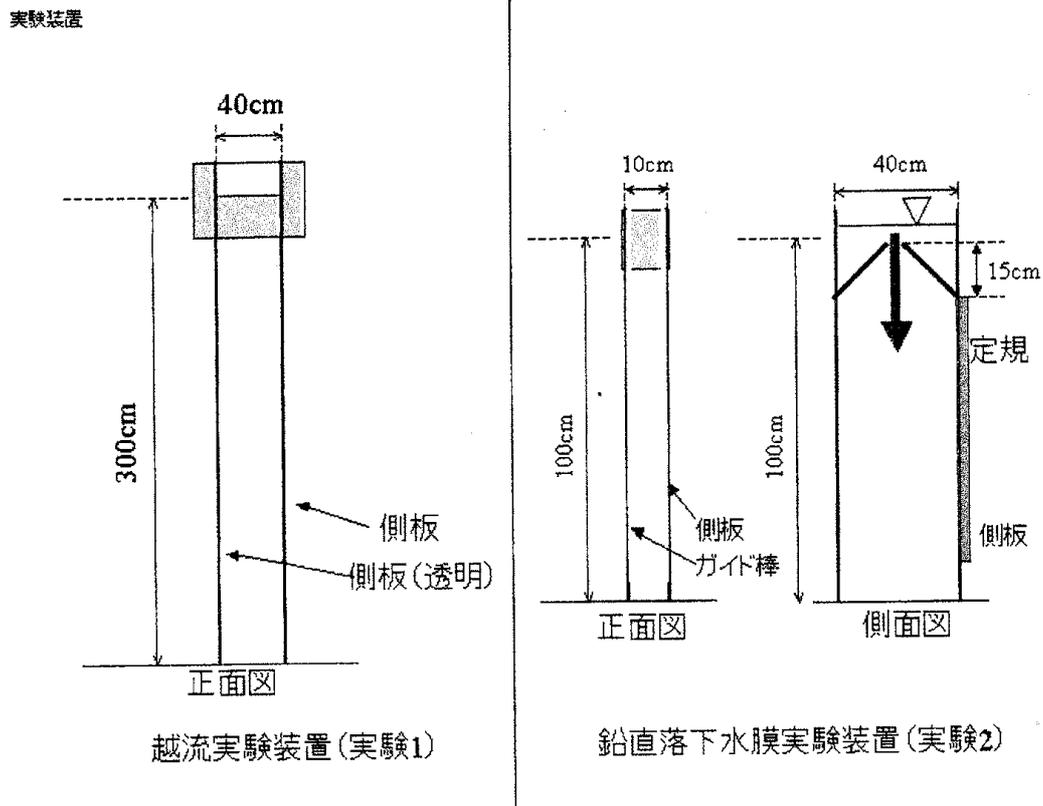


図 2.1: 実験装置 (右: 越流実験 (ノズル幅 40cm), 左: 鉛直落下水膜実験 (ノズル幅 10cm))

水膜の境界から発生する高周波の波動が水膜の自励振動に重要な役割を果たしていることを説明する。また、半無限領域の安定性理論について、不完全ながら紹介する。

2 水膜の自励振動

図 2.1 に本研究で用いた実験装置の概略図を示す。図左は越流幅 40cm, 高さ 300cm の大型装置 ([9]) であり, 図右は本研究で新たに行なったノズル幅 10cm から鉛直落下する水膜の実験装置である。ここでは, これらの装置で行なった実験結果について紹介する。

2.1 実験

図 2.2 は鉛直平板間から越流する水膜の写真である。この実験では流量は 220cm^3 , 越流水深は 1cm である。壁面上の境界層が水膜の落下に伴って発達し, およそ 30cm の位置で表面張力波が発生している。この表面張力波は水膜の落下方向に, また, 横断方向に伝播し, 水膜全体を覆うようになる。この表面張力波上に, 落下方向に垂直な波峰をもつ 15Hz 程度の波が現れ水膜を大きく振動させる。

図 2.3 ではカメラのシャッタースピードは $1/30$ 秒であり, 上記の漣は高周波のため画像にボカシが入っている。このボカシの移動速度および波長を読むと, 移動速度は水粒子速度程度であり波長から振動数は 12Hz 程度となる。実際, この振動は水膜落下に伴って増幅し, 底面を叩く水の音として認識される。同

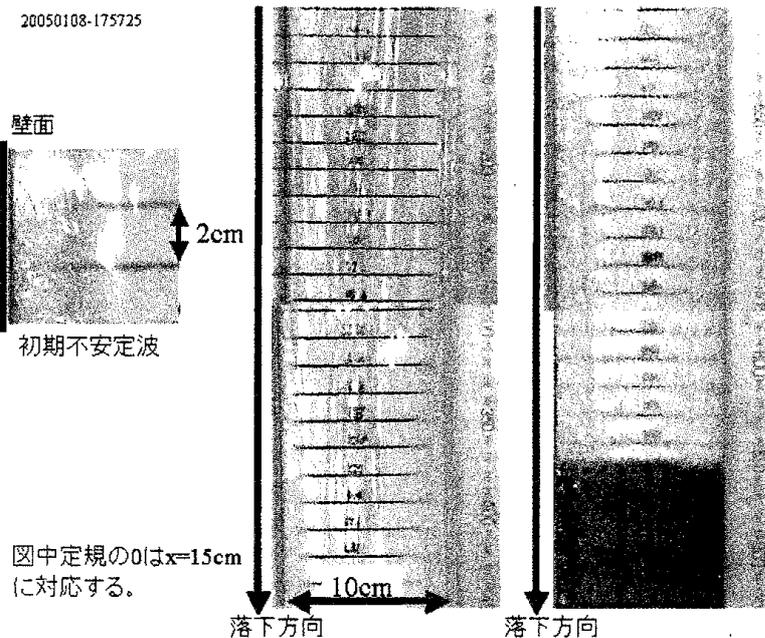


図 2.2: 鉛直落下水膜の壁面境界に発生する漣

様な画像が図 2.4 (実験 1) に示されている。この図では、振動数はおよそ 25Hz 程度である。一方、図 2.5 に、この変位のスペクトルを示す。落下後、1m 程度の距離では 15Hz 程度の振動数が現れている。

以上のことから自由落下水膜の自励振動についての推論をまとめると以下の通りである。

- 壁面上に発達した水膜境界層から波長数ミリ程度の表面張力波が現れる。
- この表面張力波により、気流は粗面上のサクシヨン流れとなる。
- 気流の境界が滑面から粗面に遷移することで気流は不安定となり二次元的な波動が現れる。
- したがって、自由落下水膜の二次元的な波動は側壁が存在することによって励起される。

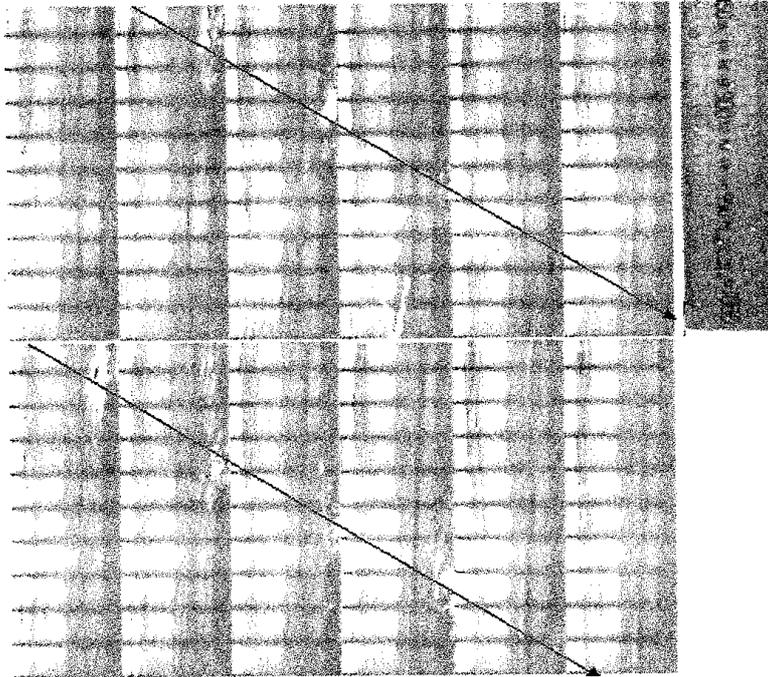
上記の推論は、側壁の影響を考慮しない場合には流れが加速流で極めて安定であり自由落下水膜は通常の落下高さでは不安定とならないという事実と整合する。

平板で水膜を架橋する場合には平板に沿う液膜流が水膜の落下に伴って成長し、その液膜流が水膜に影響を与えている可能性がある(図 2.2)。そこで水膜を架橋するための表面として平板ではなく円柱を使用し実験を行なった(図 2.6 参照)。

2.2 鉛直落下水膜の壁面境界に生じる波

鉛直な平行円柱間(直径 4mm)に水の表面張力を利用して水膜を架橋し、水をノズルから自由落下させたときに水膜上に発生する波について実験的に調べた(図 2.1 (実験 2))。本実験におけるスリット幅および円柱の径は 4mm、流量は $129\text{cm}^3/\text{s}$ である。図 2.6 は水膜のデジタルカメラ画像で、水膜を鉛直上方が左、下方が右となるように表示したものである。円柱上を水が滴ることなく、水膜が架橋されていることがわかる。図 2.7 はシャッタースピード 1/1000 秒の高速ビデオ画像である。水膜の落下距離の増加に伴って

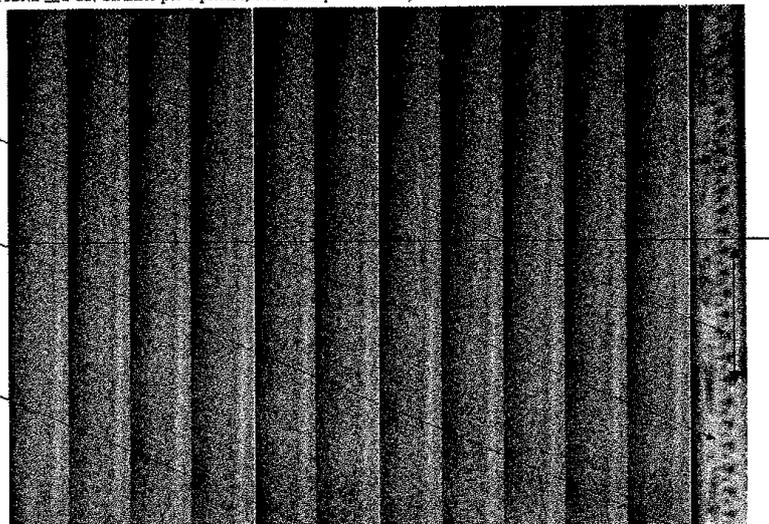
2004_12_30_2(954-976, 2frames per 1picture)



$17\text{cm}/10\text{frames} \rightarrow 125 \times 1.7 = 212.5 \text{ cm/s}$
 $f = 125/10 \text{ Hz}$, wave length = 13cm,

図 2.3: 越流水膜上に発生する不安定波 (幅 10cm, 流量 $145\text{cm}^3/\text{s}$)

11.13BMP上2-22, 2frames per 1 picture, one frame per 1/250sec)



$26\text{cm}/20\text{frames} \rightarrow 250 \times 1.3 = 325 \text{ cm/s}$
 wave length = 13cm, $f = 25 \text{ Hz}$

図 2.4: 越流水膜上に発生する不安定波 (幅 40cm)

強制外乱なし自由落下実験：スペクトル

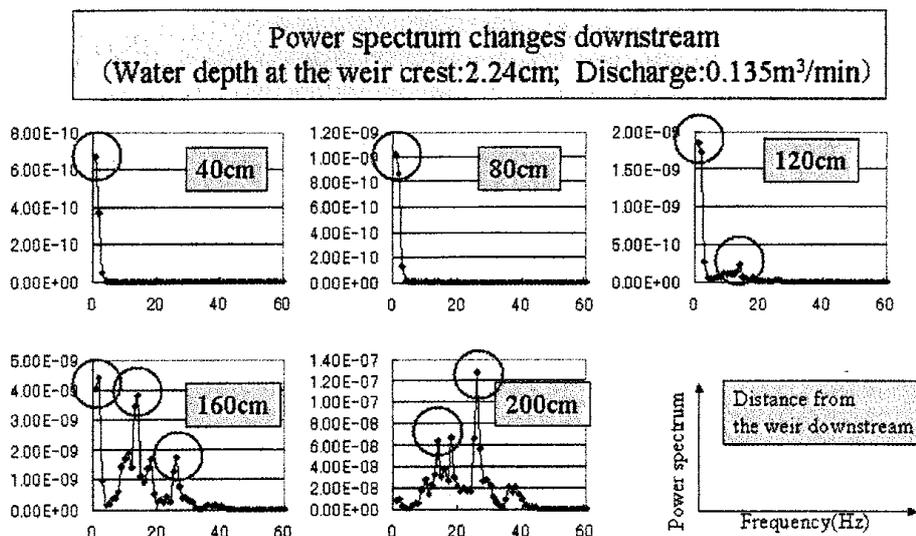


図 2.5: 越流水膜の変位のスペクトル (幅 40cm)

て微細な漣の表面に 2 次元的な波動が現れる。さらに、この漣の鉛直下方の波速を評価するために連続する 2 画像の輝度値の差分を求めた (図 2.8)。この差分画像間の輝度値の相関を取ることで漣の鉛直下方への速度を画像処理により算定すると 360cm/s となる。流下方向の波長は 1cm 程度であるから、振動数はおよそ 360Hz である。また、漣の波峰と鉛直のなす角はおよそ 22 度である。一般に固体壁上の凹凸を核として成長する衝撃波は定常であるが、本実験では波は流れに重合される形で伝播する。この非定常性は差分画像によって明確に描写されている (図 2.9)。

固定位置における波動の時間的な振動を捉えるために、画像の中心高さにおける輝度の積分値 (縦 5 ピクセル、横 100 ピクセル) の時間変化を求め、そのスペクトルを算定した (図 2.10)。画像の輝度から水膜振動を予測する際には、照明などの外乱を除くことおよび値の大きさは変位に比例しないことに注意する必要がある。ここでは外乱を除くために、ある時点の画像の輝度の全積分値で抜き取った部分画像を無次元化した。図 2.10 における $x=85\text{cm}$ のスペクトルから、図 2.7 に見られる横縞の振動数はおよそ 15Hz である。

今回の実験から判明したことは、越流水膜の二次元的な振動に側壁から生成される高周波の漣が寄与しているということである。推測ではあるが、この漣により水膜表面は粗面となり気流の不安定性が生じると考えられる。水膜上の横波は粗面上に発生した T-S 波によって励起されたのではないかと。以上を要約すると、以下の課題を理論および実験から探求する必要がある。

- 漣の発生を予測すること。
- 漣の発生に伴う気流の安定性を調べる。
- 表面張力の異なる流体で実験を行うことで漣の発生を制御し、その際の液膜の振動特性を調べる。

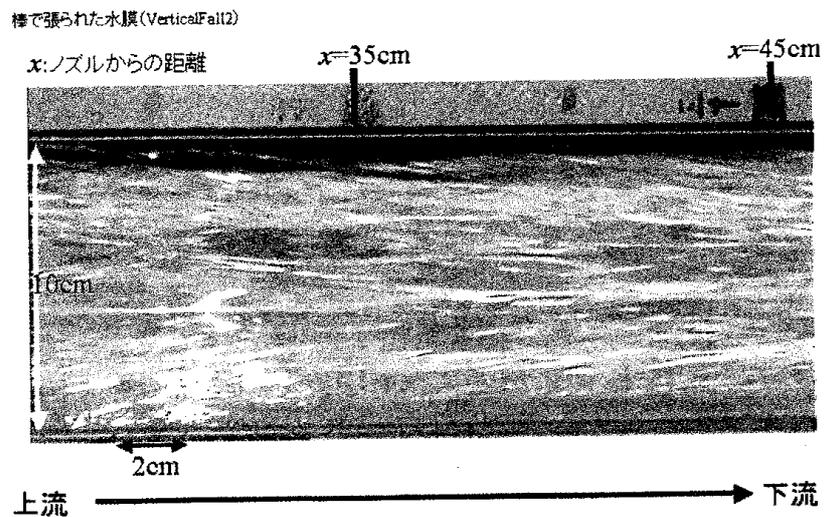


図 2.6: 平行円柱間の水膜 (図左が鉛直上方)

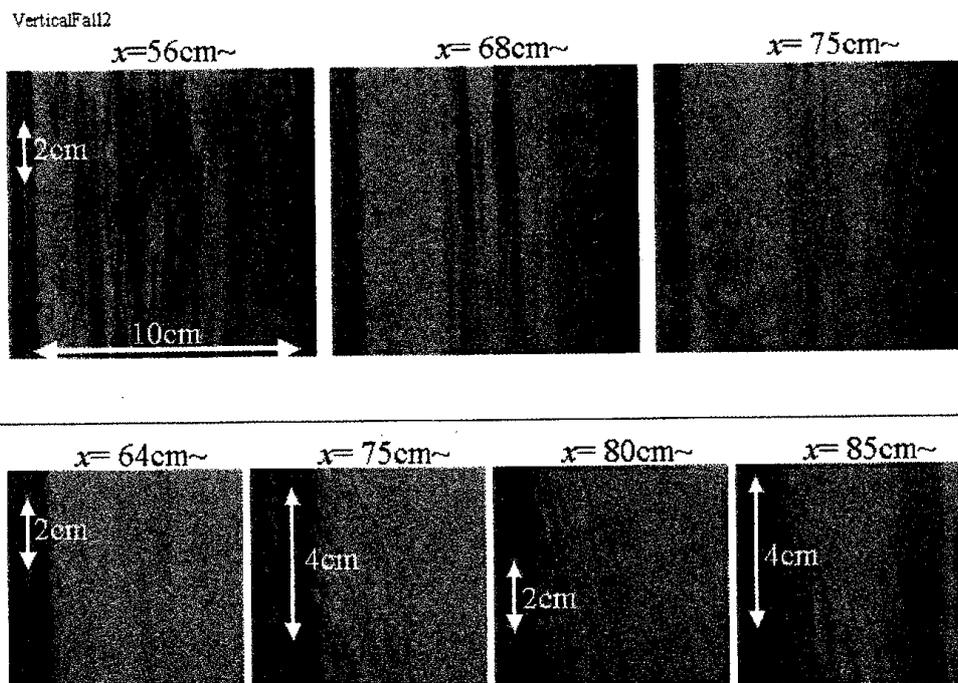


図 2.7: 壁面近傍に発生する不安定波の画像 (上: 水膜幅全体, 下: 水膜左側を拡大)

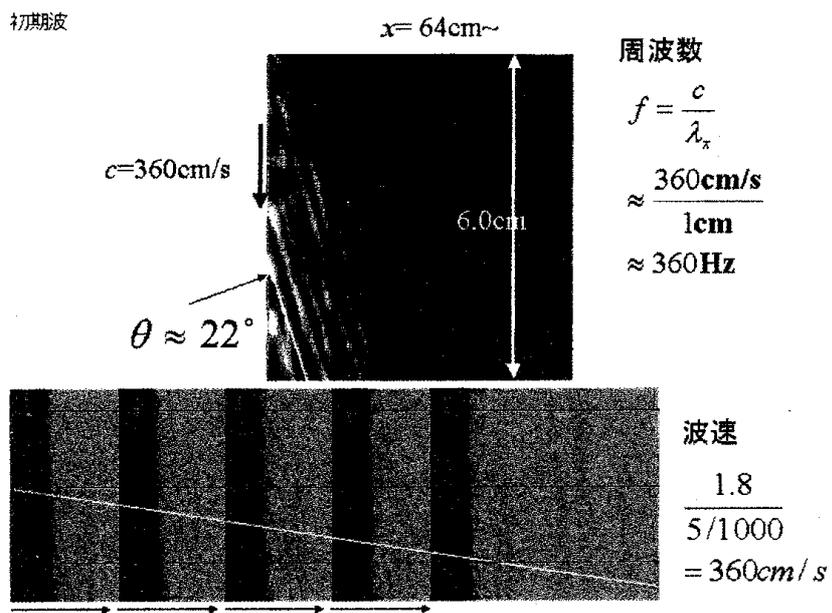


図 2.8: 壁面近傍に発生する初期不安定波 (上:差分画像, 下:波峰の伝播)

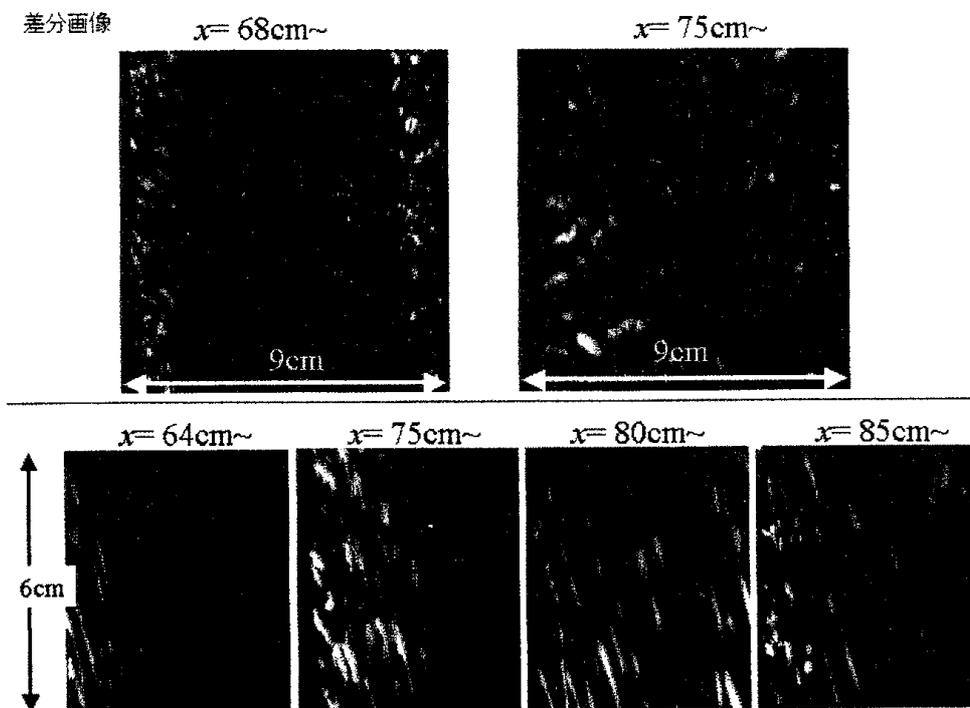


図 2.9: 壁面近傍に発生する不安定波の差分画像

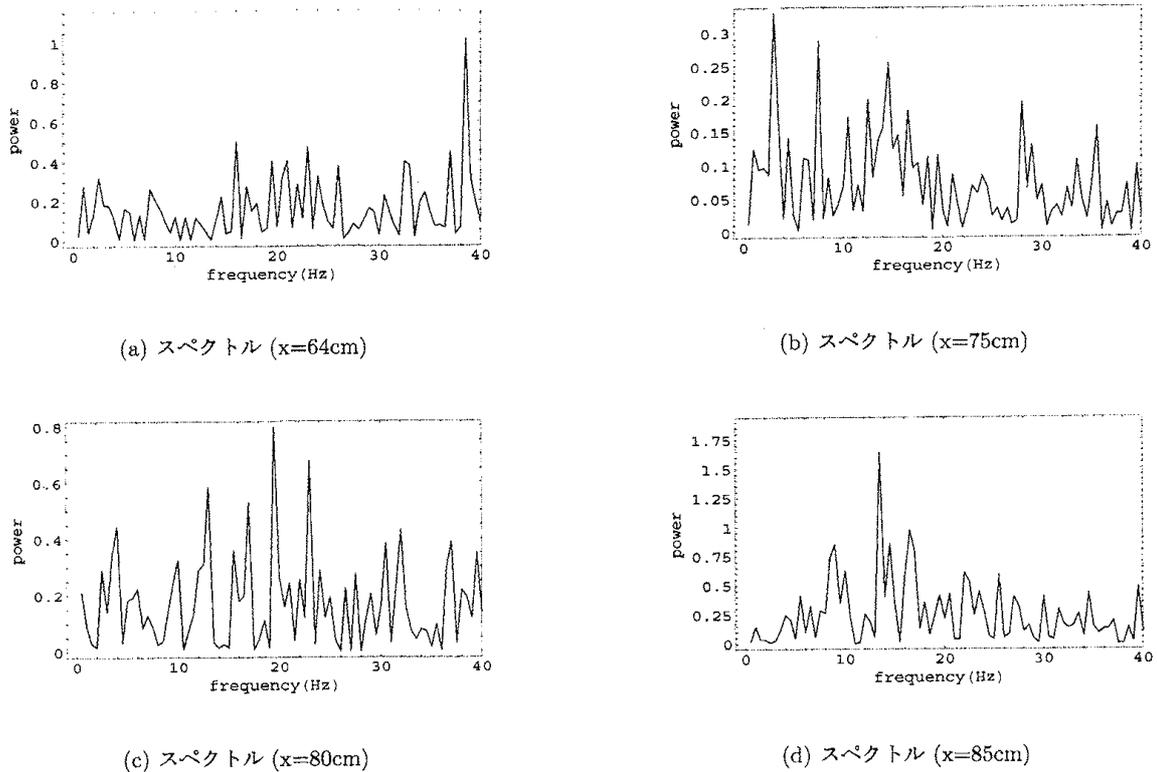


図 2.10: 差分画像の輝度スペクトル (低周波成分)

2.3 理論的考察

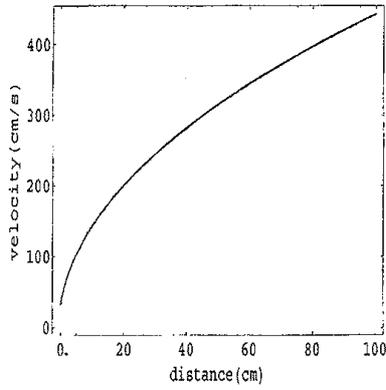
2.3.1 漣

本実験における水粒子の流速, 水膜厚などの物理量は, 水膜が 1mm 程度と極めて薄いため, 水膜を乱さずに測定することは難しい. そこで, 水膜が空気の影響を受けずに自由落下するとして, これら諸量を見積ることにする. ただし, 水粒子速度, 壁面上の水の境界層および運動量の厚さを

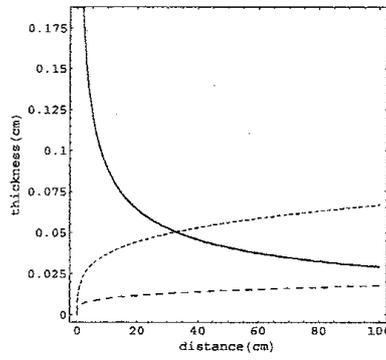
$$u_w = \sqrt{2gx + u_e}, \quad \delta_w = 1.2168 \sqrt{\frac{4\nu_w x}{3u_w}}, \quad \theta_w = \sqrt{\frac{0.44\nu_w}{u_w^{5.4}} \int_0^x u_w^{4.4} dx} \quad (1)$$

により評価した ([13]). 図 2.11(a) から先に求めた $x \approx 64\text{cm}$ における漣の波速 360cm/s と比較すると良好な一致が見られる. したがって, 斜行波はほぼ流下方向に流速で移流していると考えられる. 図 2.11(b) に水膜, 壁面上境界層および運動量の各厚さを示す.

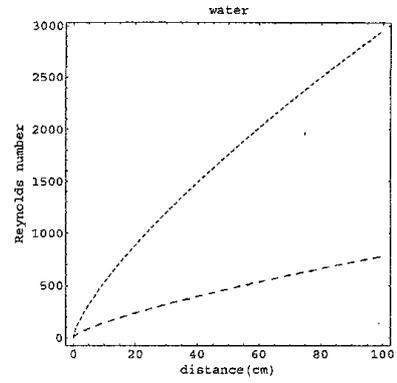
また, 図 2.12 に水膜上の反対称 (sinuous mode) および対称 (dilational mode) モードの波の波速を示す. 図 2.2 から, 上流で生成した漣は流下に伴ない水膜中心に向かって伝播していることが分かる. 図 2.8 で観察された斜行波が反対称モードであれば, 図 2.12(c) からこの波は流れに逆らって静止することはできない (静止するためには波峰方向角が 8 度程度に鋭角となる必要がある). 斜行波が流れに逆らって伝播する反対称モードであるとすれば, 図 2.12(c) から, その移流速度は流速に比べておよそ 55cm/s 遅くなるはずである. したがって, この漣が反対称モードか否かも不明である.



(a) 水粒子流速

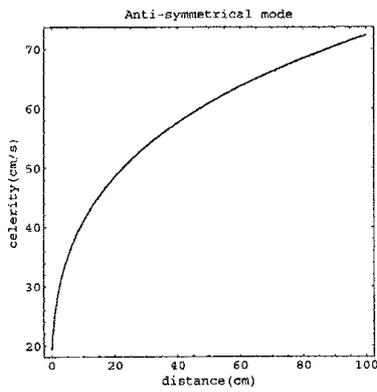


(b) 水膜 (実線), 境界層 (点線), 運動量厚さ (破線)

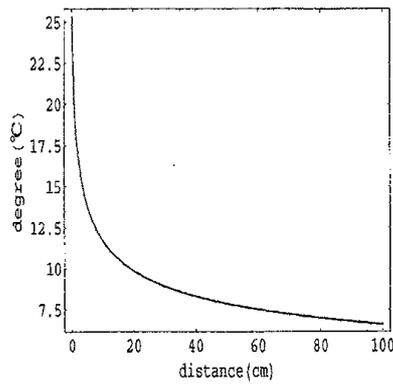


(c) 側壁における水流のレイノルズ数 (境界層 (点線), 運動量厚さ (破線))

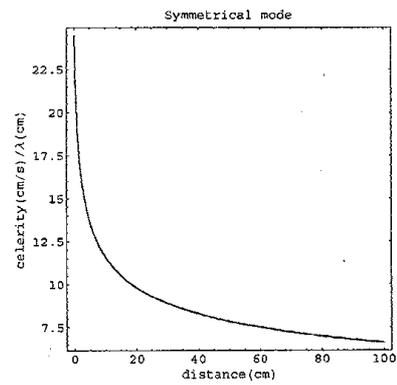
図 2.11: 鉛直落下水膜の速度, 厚さ, レイノルズ数



(a) sinuous mode の波速



(b) 波峰方向の角度

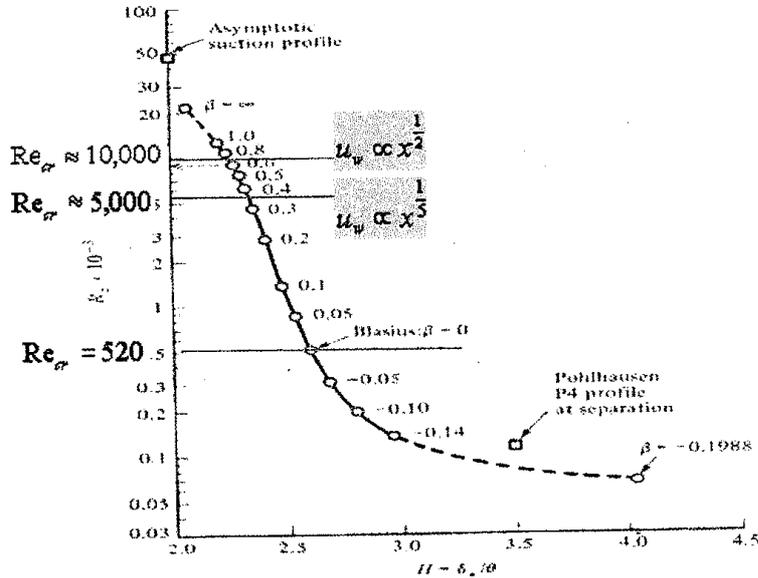


(c) dilational mode の波速/波長

図 2.12: 水膜上の波の波速および波峰方向

Falkner-Skan境界層の臨界レイノルズ数

DRAZIN, P. G. & W. H. REID 1981 *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.



吸い込み流れは非常に安定→

この流速分布で固定境界の場合には臨界レイノルズ数は10,000($m=1/2$), 5,000($m=1/5$)程度。

図 2.13: 平板上の加速流の安定性, 臨界レイノルズ数

2.3.2 水膜の自励振動

自由落下水膜により誘起される気流は加速流であり, 流れは極めて安定である。水膜表面が滑らかで水粒子が \sqrt{x} に比例して加速するときは, 図 2.13 から臨界レイノルズ数は 10000 程度である。一方で, 図 2.14 から落下距離が 1m でレイノルズ数は 800 程度であり, 結果として水膜の自励振動を二次元 TS 波の不安定性から説明することはできない。

前節の実験から, 水膜上に発生する二次元的な波動は表面の漣を粗度の増加として考慮すれば説明可能ではないかと考える。これについては, 側壁に生じる漣を表面張力を変えるなどして制御し, 結果として自励振動がどのように変化するかを調べる必要がある。今後の課題である。

2.4 自由落下水膜の数理的課題

以上の実験から落下水膜の不安定性に関して次のような数理的課題が挙げられる。

- 漣の生成と表面張力および渦度の関係。
- 漣の振動数, 波長, 波速の予測。
- 漣を粗度としたときの落下水膜の安定性。

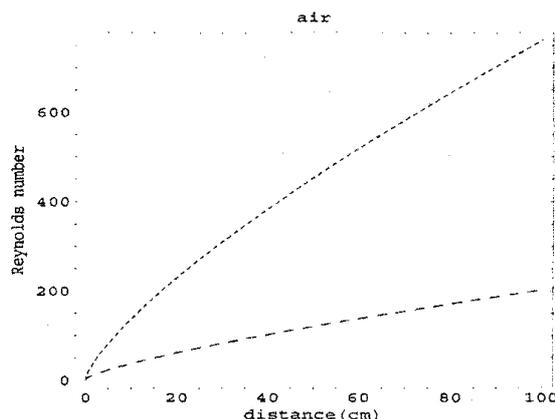


図 2.14: 気流のレイノルズ数 (境界層 (点線), 運動量厚さ (破線))

3 半無限領域における安定性理論

半無限領域における流れの安定性を議論する場合, 境界 $x = 0$ で与えた擾乱が $x \geq 0$ でどのように振舞うかを調べる必要がある. Huerre[14] らは, $x = 0$ に外力項のある方程式をフーリエ変換し波数空間における解の $t \rightarrow \infty$ における漸近的挙動を解析することでこの問題の解明を行なった. しかし, 方程式に外力項を付加した問題と境界値問題は等価ではない. もちろん, 問題が線形であれば適当なグリーン関数を構成することで, これらの数学的な問題の関係を見つけることは可能であると考えられる.

本節では, フーリエ sin, cosine 変換を利用して境界条件が陽に関わる形で方程式を導き, 従来の無限領域の安定性理論がどのように変形されるかについて考察する.

3.1 \mathcal{F} 変換の定義

変数 x が無限遠で 0 に収束する関数はフーリエ sin もしくは cosine 変換によって表示される. この論文では, これらの変換およびその逆変換を次式によって定義する.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_s[f](\alpha) &\equiv 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx, & \mathcal{F}_s^{-1}[f](x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \\ \mathcal{F}_c[f](\alpha) &\equiv 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx, & \mathcal{F}_c^{-1}[f](x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \\ \mathcal{L}[f](s) &\equiv \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, & \mathcal{L}^{-1}[f](t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s) e^{st} ds, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで, \mathcal{F} はフーリエ変換, 下付き添え字の s および c はそれぞれフーリエ sine, cosine 変換を意味する. また, \mathcal{L} はラプラス変換である. 上記の定義から $\mathcal{F}_s[f](\alpha)$ と $\mathcal{F}_c[f](\alpha)$ は, それぞれ変数 α に関して奇関数および偶関数となる.

この論文では, \mathcal{F} 変換を次式により定義する.

$$\mathcal{F}[f](\alpha) \equiv \mathcal{F}_c[f](\alpha) + i \mathcal{F}_s[f](\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (3)$$

その逆変換として以下の2つの関係が導かれる。1つ目は、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m^{-1}[\mathcal{F}[f]] &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_c[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= f_c + f_s,\end{aligned}\tag{4}$$

2つ目は、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[f]] &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_c[f](\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= f_c - f_s,\end{aligned}\tag{5}$$

ここで、 f_c と f_s は $x \geq 0$ において

$$f_c \equiv \mathcal{F}_c^{-1}[\mathcal{F}_c[f]](x) \quad f_s \equiv \mathcal{F}_s^{-1}[\mathcal{F}_s[f]](x).\tag{6}$$

と定義されている。また、上式を導く際に以下の関係を用いた。

$$\mathcal{F}_c[f](-\alpha) = \mathcal{F}_c[f](\alpha), \quad \mathcal{F}_s[f](-\alpha) = -\mathcal{F}_s[f](\alpha)\tag{7}$$

変換 $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_c^{-1}$ および \mathcal{F}_s^{-1} が存在すれば、式(6)から $f_c = f$ および $f_s = f$ の関係が得られる。この場合には、(4)と(5)は、それぞれ $2f$ および 0 となる。すなわち、最初の積分は関数 f 、2番目の積分はフーリエ sine 変換と cosine 変換の適合条件を与える。

もう1つ重要な公式として、フーリエ sine 変換と cosine 変換の直接的な関係式を導くことができる。逆フーリエ sine 変換の関係式

$$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}[\mathcal{F}_s[f]] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha_I) \sin \alpha_I x d\alpha_I\tag{8}$$

にフーリエ cosine 変換を適用し、これら変換が存在する場合には、変数 x と α_I の積分順序を入れ替えることで

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c[f] &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha_I) \sin \alpha_I x d\alpha_I \right) \cos \alpha x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha_I) \left[\frac{\cos(\alpha - \alpha_I)x}{\alpha - \alpha_I} - \frac{\cos(\alpha + \alpha_I)x}{\alpha + \alpha_I} \right]_{x=0}^{x=\infty} d\alpha_I.\end{aligned}\tag{9}$$

が得られる。仮に $f(x)$ が $x \rightarrow \infty$ で 0 に収束するとすれば、 $\mathcal{F}[f](\alpha)$ も $\alpha \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。さらに、被積分関数を特異点 $\alpha_I = \alpha$ において評価すると

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha+\epsilon} \mathcal{F}_s[f](\alpha_I) \sin \alpha_I x d\alpha_I \right) \cos \alpha x dx \\ &\approx \frac{\epsilon}{\pi} \mathcal{F}_s[f](\alpha) \int_0^{\infty} \sin \alpha x \cos \alpha x dx,\end{aligned}\tag{10}$$

となり、その特異点の積分への寄与は $\epsilon \rightarrow 0$ で消失する。以上の事実および Riemann-Lebesgue の定理から次式が導かれる。

$$\mathcal{F}_c[f](\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\alpha_I) \frac{\alpha_I}{\alpha_I^2 - \alpha^2} d\alpha_I.\tag{11}$$

同様に sine と cosine 関数の役割を入れ替えれば, \mathcal{F}_s に対して次の公式を得る.

$$\mathcal{F}_s[f](\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c[f](\alpha_I) \frac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha_I^2} d\alpha_I. \quad (12)$$

結果的にフーリエ sine, cosine 変換を使う場合には2つの方法があり, 1つは式(4), (5)に基づいて解析する方法, 後1つは式(11)もしくは(12)による方法である. 後者の方法を奇数階の空間微係数を持つ方程式に適用すると, 固有値問題は積分方程式を解くことにより解析され複雑となることに注意する.

3.2 \mathcal{F} 変換の漸近展開

式(3)の α^{-1} に関する形式的な漸近展開は, 部分積分により, 以下のように表わされる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\alpha) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= -\frac{2}{i\alpha} f(0) - \frac{2}{i\alpha} \int_0^{\infty} f'(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= 2\frac{-1}{i\alpha} f(0) + 2\left(\frac{-1}{i\alpha}\right)^2 f'(0) + 2\left(\frac{-1}{i\alpha}\right)^3 f''(0) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, 関数 $f(x)$ と x に関する微係数は無限遠で0に収束すると仮定した. 方程式(13)は, $f_s = f_c$ であればフーリエ変換された解は自動的に $x = 0$ における境界条件を満たすこと示している.

3.3 半無限領域における一様な液膜運動

半無限領域の問題を前節の方法を使って解析した場合の問題点を明確にするために, 簡単な微分方程式を解析する. ここでは, 気流の影響および重力を無視した一様な液膜運動を解析する ([8]).

3.3.1 Sinuous モード

真空中の一様な液膜の sinuous モードは次式の方程式を満たす.

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} - v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - 4\epsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

ここで, Y および v は x に垂直方向の液膜の変位および速度である. x 方向の流速は1となるように正規化されている. また, ϵ の2乗はウエバー数 W_b の逆数に比例する. この初期値, 境界値問題を解くために, ラプラスおよび \mathcal{F} 変換を適用すると次式を得る.

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] - \mathcal{F}[Y_I] - i\alpha\mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] - 2\mathcal{L}[Y_b] - \mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] &= 0, \\ s\mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] - \mathcal{F}[v_I] - i\alpha\mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] - 2\mathcal{L}[v_b] \\ - 4\epsilon^2(-\alpha^2\mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] + 2i\alpha\mathcal{L}[Y_b] - 2\mathcal{L}[Y_{xb}]) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、添え字 l および b は関数の初期値および境界値を意味する。線形代数方程式 (15) の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] &= \frac{2(s-i\alpha)\mathcal{L}[v_b] + 8i\epsilon^2 s\alpha \mathcal{L}[Y_b] - 8\epsilon^2(s-i\alpha)\mathcal{L}[Y_{xb}]}{D(s,\alpha)} \\ &\quad + \frac{(s-i\alpha)\mathcal{F}[v_l] - 4\epsilon^2\alpha^2\mathcal{F}[Y_l]}{D(s,\alpha)}, \\ \mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] &= \frac{2\mathcal{L}[v_b] + 2\{s-i(1-4\epsilon^2)\alpha\}\mathcal{L}[Y_b] - 8\epsilon^2\mathcal{L}[Y_{xb}]}{D(s,\alpha)} \\ &\quad + \frac{\mathcal{F}[v_l] + (s-i\alpha)\mathcal{F}[Y_l]}{D(s,\alpha)}\end{aligned}\quad (16)$$

ここで

$$D(s,\alpha) = \{s-i(1-2\epsilon)\alpha\}\{s-i(1+2\epsilon)\alpha\}.\quad (17)$$

式 (16) の実数部および虚数部はそれぞれ偶および奇関数になる。また、式 (16) は v と Y の \mathcal{F} 変換であるから、§3.2 で示したように $x=0$ における境界条件を自動的に満足する。しかしながら、適合条件, i.e., $\mathcal{F}_c^{-1}[\mathcal{F}_c] = \mathcal{F}_s^{-1}[\mathcal{F}_s]$, は一般的には満たしていない。この適合条件は、式 (5) にしたがうと、

$$\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[v]] = 0, \quad \mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[Y]] = 0,\quad (18)$$

と表わされる。さらに、方程式 (16) の逆ラプラス変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[v]] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{-2i\epsilon(1-2\epsilon)\alpha Y_b(t-\tau) + v_b(t-\tau) - 4\epsilon^2 Y_{xb}(t-\tau)\} e^{i\alpha\{x_\ell+(1-2\epsilon)\tau\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}[v_l](\alpha) - i\epsilon\alpha\mathcal{F}[Y_l](\alpha)\right) e^{i\alpha\{x_\ell+(1-2\epsilon)t\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{2i\epsilon(1+2\epsilon)\alpha Y_b(t-\tau) + v_b(t-\tau) - 4\epsilon^2 Y_{xb}(t-\tau)\} e^{i\alpha\{x_\ell+(1+2\epsilon)\tau\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}[v_l](\alpha) + i\epsilon\alpha\mathcal{F}[Y_l](\alpha)\right) e^{i\alpha\{x_\ell+(1+2\epsilon)t\}} d\alpha \\ \mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[Y]] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{(1-2\epsilon)Y_b(t-\tau) + \frac{i}{2\epsilon\alpha}v_b(t-\tau) - \frac{2i\epsilon}{\alpha}Y_{xb}(t-\tau)\} e^{i\alpha\{x_\ell+(1-2\epsilon)\tau\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}[Y_l](\alpha) + \frac{i}{4\epsilon\alpha}\mathcal{F}[v_l](\alpha)\right) e^{i\alpha\{x_\ell+(1-2\epsilon)t\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{(1+2\epsilon)Y_b(t-\tau) - \frac{i}{2\epsilon\alpha}v_b(t-\tau) + \frac{2i\epsilon}{\alpha}Y_{xb}(t-\tau)\} e^{i\alpha\{x_\ell+(1+2\epsilon)\tau\}} d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}[Y_l](\alpha) - \frac{i}{4\epsilon\alpha}\mathcal{F}[v_l](\alpha)\right) e^{i\alpha\{x_\ell+(1+2\epsilon)t\}} d\alpha.\end{aligned}\quad (19)$$

ここで、下付き添え字 ℓ は、 p もしくは m であり、このとき $x_p = x$; $x_m = -x$ となる。

上記の定積分を計算するために、任意関数 f に対する次の関係式を用いる。

$$\begin{aligned}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{i\alpha(x+a\tau)} d\alpha &= 2\pi \int_0^t f(t-\tau) \delta(x+a\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} 0 & -\frac{x}{a} < 0 \text{ or } -\frac{x}{a} > t, \\ 2\pi \frac{f(t+x/a)}{|a|} & 0 < -\frac{x}{a} < t. \end{cases}\end{aligned}\quad (21)$$

および

$$\begin{aligned}
\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{i\alpha(x+a\tau)} d\alpha &= \int_0^{\infty} f(\bar{x}) d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(\bar{x}+x+a\tau)} d\alpha \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} f(\bar{x}) \delta(\bar{x}+x+a\tau) d\bar{x} \\
&= \begin{cases} 0 & x > -at, \\ 2\pi f(-x-at) & x < -at. \end{cases} \quad (22)
\end{aligned}$$

したがって、 $\epsilon \leq 1/2$ に対しては、 $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[v]] = 0$ および $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[Y]] = 0$ がすべての初期値および境界値に対して成立する。一方、 $\epsilon \geq 1/2$ の場合には何らかの制約条件が付加される。

3.3.2 Dilational モード

液膜の対称モードの支配方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon^2 \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = 0, \quad (23)$$

ここで Y および v は、 x 軸に垂直な方向の変位および流速である。式 (23) のラプラスおよび \mathcal{F} 変換は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
s \mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] - \mathcal{F}[Y_I] - i\alpha \mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] - 2\mathcal{L}[Y_b] - i\alpha \mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] - 2\mathcal{L}[v_b] &= 0, \\
s \mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] - \mathcal{F}[v_I] - i\alpha \mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] - 2\mathcal{L}[v_b] \\
- \epsilon^2 (i\alpha^3 \mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] + 2\alpha^2 \mathcal{L}[Y_b] + 2i\alpha \mathcal{L}[Y_{xb}] - 2\mathcal{L}[Y_{xxb}]) &= 0. \quad (24)
\end{aligned}$$

以下では簡単のため境界値は単振動関数で表わされ、初期値が 0 の場合を扱う。すなわち、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[Y_b] = \frac{A_{Y_b}}{s - i\omega}, \quad \mathcal{L}[Y_{xb}] = \frac{A_{Y_{xb}}}{s - i\omega}, \quad \mathcal{L}[Y_{xxb}] = \frac{A_{Y_{xxb}}}{s - i\omega}, \quad \mathcal{L}[v_b] = \frac{A_{v_b}}{s - i\omega}, \\
\mathcal{F}[Y_I] = 0, \quad \mathcal{F}[v_I] = 0. \quad (25)
\end{aligned}$$

式 (24) に (25) を代入すると、以下の解を得る。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathcal{F}[v]] &= \frac{-\{s + i\alpha(1 - \epsilon^2 \alpha^2)\} A_{v_b} - \epsilon^2 s \alpha^2 A_{Y_b} + i\epsilon^2 \alpha (s + i\alpha) A_{Y_{xb}} + \epsilon^2 (s + i\alpha) A_{Y_{xxb}}}{(s - i\omega) D(s, \alpha)} \\
\mathcal{L}[\mathcal{F}[Y]] &= \frac{-s A_{v_b} - (s + i\alpha - i\epsilon^2 \alpha^3) A_{Y_b} + \epsilon^2 \alpha^2 A_{Y_{xb}} - i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xxb}}}{(s - i\omega) D(s, \alpha)}, \quad (26)
\end{aligned}$$

ここで

$$D(s, \alpha) = \{s + i\alpha(1 - \epsilon\alpha)\} \{s + i\alpha(1 + \epsilon\alpha)\}. \quad (27)$$

逆ラプラス変換は、極 $s = -i\alpha(1 - \epsilon\alpha)$, $-i\alpha(1 + \epsilon\alpha)$ & $i\omega$ における留数を計算すればよい (図 3.15 の上

図参照). 最終的に $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{L}[\mathcal{F}]]$ および $\mathcal{F}_m^{-1}[\mathcal{L}[\mathcal{F}]]$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[v]] \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\epsilon^2 \alpha^3 - \alpha - \omega) A_{v_b} - \epsilon^2 \omega \alpha^2 A_{Y_b} + i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xb}} + \epsilon^2 (\alpha + \omega) A_{Y_{xzb}} e^{i(\alpha x_\ell + \omega t)}}{(\epsilon \alpha^2 - \alpha - \omega)(\epsilon \alpha^2 + \alpha + \omega)} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(1 - \epsilon \alpha) A_{v_b} + \epsilon \alpha (1 - \epsilon \alpha) A_{Y_b} + i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xb}} + \epsilon^2 A_{Y_{xzb}} e^{i\alpha \{x_\ell - (1 - \epsilon \alpha)t\}}}{2(\epsilon \alpha^2 - \alpha - \omega)} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \epsilon \alpha) A_{v_b} + \epsilon \alpha (1 + \epsilon \alpha) A_{Y_b} - i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xb}} - \epsilon^2 A_{Y_{xzb}} e^{i\alpha \{x_\ell - (1 + \epsilon \alpha)t\}}}{2(\epsilon \alpha^2 + \alpha + \omega)} d\alpha, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[Y]] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega A_{v_b} - (\epsilon^2 \omega \alpha^3 - \alpha - \omega) A_{Y_b} + i\epsilon^2 \alpha^2 A_{Y_{xb}} + \epsilon^2 \alpha A_{Y_{xzb}} e^{i(\alpha x_\ell + \omega t)}}{(\epsilon \alpha^2 - \alpha - \omega)(\epsilon \alpha^2 + \alpha + \omega)} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \epsilon \alpha) A_{v_b} - \epsilon \alpha (1 - \epsilon \alpha) A_{Y_b} - i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xb}} - \epsilon^2 A_{Y_{xzb}} e^{i\alpha \{x_\ell - (1 - \epsilon \alpha)t\}}}{2\epsilon \alpha (\epsilon \alpha^2 - \alpha - \omega)} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \epsilon \alpha) A_{v_b} + \epsilon \alpha (1 + \epsilon \alpha) A_{Y_b} - i\epsilon^2 \alpha A_{Y_{xb}} - \epsilon^2 A_{Y_{xzb}} e^{i\alpha \{x_\ell - (1 + \epsilon \alpha)t\}}}{2\epsilon \alpha (\epsilon \alpha^2 + \alpha + \omega)} d\alpha \end{aligned} \quad (29)$$

式 (28) および (29) の第一番目の積分は, 以下の極に対する留数から計算することができる.

$$\alpha = \alpha_s \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon\omega}}{2\epsilon}, \quad -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon\omega}}{2\epsilon}. \quad (30)$$

一方, 式 (28) の第二, 第三番目の積分は解析的に実行できないため, $t \rightarrow \infty$ における漸近解析, すなわち, 位相一定法 (stationary phase) および最急降下法 (steepest descent), によって評価される.

そこで, 式 (28) および (29) の指数関数の位相を書き換えて

$$\alpha \{x_\ell - (1 \pm \epsilon \alpha)t\} = \mp \epsilon t \left\{ \left(\alpha \mp \frac{x_\ell - t}{2\epsilon t} \right)^2 - \left(\frac{x_\ell - t}{2\epsilon t} \right)^2 \right\}, \quad (31)$$

とし, さらに

$$\beta = \alpha \mp \frac{x_\ell - t}{2\epsilon t}, \quad (32)$$

とおくと, 式 (28) および (29) の典型的な積分は次式のように表現される.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) \frac{e^{i\mu\beta^2}}{\beta - \beta_s} d\beta \quad (33)$$

ここで, f は解析関数, $\beta_s = \alpha_s \mp (x_\ell - t)/2\epsilon t$ は β 平面における特異点, また, $\mu = \mp \epsilon t$ である. $t \rightarrow \infty$ のときの値は位相一定法と最急降下法から算定される. 図 3.15 は積分 (33) の $\mu \geq 0$ & $\mu \leq 0$ における経路を示す. 以下の関係

$$i\mu\beta^2 = i\mu(\beta_r + i\beta_i)^2 = -2\mu\beta_r\beta_i + i\mu(\beta_r^2 - \beta_i^2), \quad (34)$$

から, 位相が一定となる経路は $\beta_r = \pm\beta_i$, また最急降下経路は $\beta_r = \beta_i$ for $\mu \geq 0$, $\beta_r = -\beta_i$ for $\mu \leq 0$ である. 結果的に, 留数定理から

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) \frac{e^{i\mu\beta^2}}{\beta - \beta_s} d\beta \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f((1+i)\beta_r) \frac{(1+i)e^{-2\mu\beta_r^2}}{(1+i)\beta_r - \beta_s} d\beta_r + i\pi f(\beta_s) e^{i\mu\beta_s^2} \text{sign}(\beta_s), & \text{for } \mu \geq 0. \\ \int_{-\infty}^{\infty} f((1-i)\beta_r) \frac{(1-i)e^{2\mu\beta_r^2}}{(1-i)\beta_r - \beta_s} d\beta_r - i\pi f(\beta_s) e^{i\mu\beta_s^2} \text{sign}(\beta_s), & \text{for } \mu \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで β_s は実数であると仮定した. 式 (35) の第一および第二項は 最急降下経路に沿う経路積分, および極 $\beta = \beta_s$ における留数である. 第一番目の積分は鞍点法を使って評価される.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f((1+i)\beta_r) \frac{(1+i)e^{-2\mu\beta_r^2}}{(1+i)\beta_r - \beta_s} d\beta_r \\ & \approx -\frac{(1+i)f(0)}{\beta_s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu\beta_r^2} d\beta_r = -\frac{(1+i)f(0)}{\beta_s} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, \quad \text{for } \mu \rightarrow \infty, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f((1-i)\beta_r) \frac{(1-i)e^{2\mu\beta_r^2}}{(1-i)\beta_r - \beta_s} d\beta_r \\ & \approx -\frac{(1-i)f(0)}{\beta_s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\mu\beta_r^2} d\beta_r = -\frac{(1-i)f(0)}{\beta_s} \sqrt{\frac{\pi}{-2\mu}}, \quad \text{for } \mu \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (36)$$

ここで, 鞍点は $\beta = 0$ にある. さて, 式 (28) において $x_\ell/t = \text{const.}$ の条件のもとに $t \rightarrow \infty$ とすると, 式 (36) の値は $\mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[v]]$ および $\mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[Y]]$ では 0 に漸近するため, 極から算定される値のみを考慮すれば良い. 結果的に, $\mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[v]]$ および $\mathcal{F}_\ell^{-1}[\mathcal{F}[Y]]$ の $t \rightarrow \infty$ における値は次式によって支配される.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha - \alpha_s} e^{i\psi(\alpha)} d\alpha \approx \pi i \sum_{\alpha_s} f(\alpha_s) e^{i\psi(\alpha_s)} \text{sign}[\psi_{\alpha\alpha}(\alpha_0)(\alpha_s - \alpha_0)], \quad \text{for } t \rightarrow \infty \quad (37)$$

ここで, ψ は位相関数, f は解析関数, α_0 は α の $\psi_\alpha = 0$ における値である. α_s が実数, すなわち $\epsilon\omega \leq 1/4$ のとき, 適合条件: $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[v]] = 0$ および $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[Y]] = 0$ は, 領域 $x \leq \sqrt{1-4\epsilon\omega}t$ において次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1-4\epsilon\omega}} A_{v_b} - 2\omega A_{Y_b} + i(1 + \sqrt{1-4\epsilon\omega}) A_{Y_{xb}} - 2\epsilon A_{Y_{xzb}} = 0, \\ & \frac{4\omega}{1 + \sqrt{1+4\epsilon\omega}} A_{v_b} - 2\omega A_{Y_b} + i(1 + \sqrt{1+4\epsilon\omega}) A_{Y_{xb}} + 2\epsilon A_{Y_{xzb}} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

ここで, 適合条件 $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[v]] = 0$ および $\mathcal{F}_p^{-1}[\mathcal{F}[Y]] = 0$ から 8 つの制約条件が導かれるが, このうち 2 つのみが独立な関係を与えることに注意する. 同様に, Y に対して

$$\begin{aligned} Y = & \frac{-2(1 + \sqrt{1-4\epsilon\omega}) A_{v_b} + 4\epsilon\omega A_{Y_b} - 2i(1 - \sqrt{1-4\epsilon\omega}) A_{Y_{xb}} + 4\epsilon^2 A_{Y_{xzb}}}{4\sqrt{1-4\epsilon\omega}(1 - \sqrt{1-4\epsilon\omega})} \\ & \times \exp\left\{i\omega t - i\frac{1 - \sqrt{1-4\epsilon\omega}}{2\epsilon} x\right\} \\ & + \frac{-2(1 + \sqrt{1+4\epsilon\omega}) A_{v_b} - 4\epsilon\omega A_{Y_b} - 2i(1 - \sqrt{1+4\epsilon\omega}) A_{Y_{xb}} + 4\epsilon^2 A_{Y_{xzb}}}{4\sqrt{1+4\epsilon\omega}(1 - \sqrt{1+4\epsilon\omega})} \\ & \times \exp\left\{i\omega t + i\frac{1 - \sqrt{1+4\epsilon\omega}}{2\epsilon} x\right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

が得られる. 上式は正の位相速度および群速度をもつモードの重ね合わせである.

4 まとめ

本論文で報告したことを整理すると以下の 3 点が重要である.

1. 液膜と壁面の境界層には境界層の発達に伴って不安定となる表面張力性の波動が現れる. これが渦により生成された表面張力波ではないかと推察される.

Dilational mode

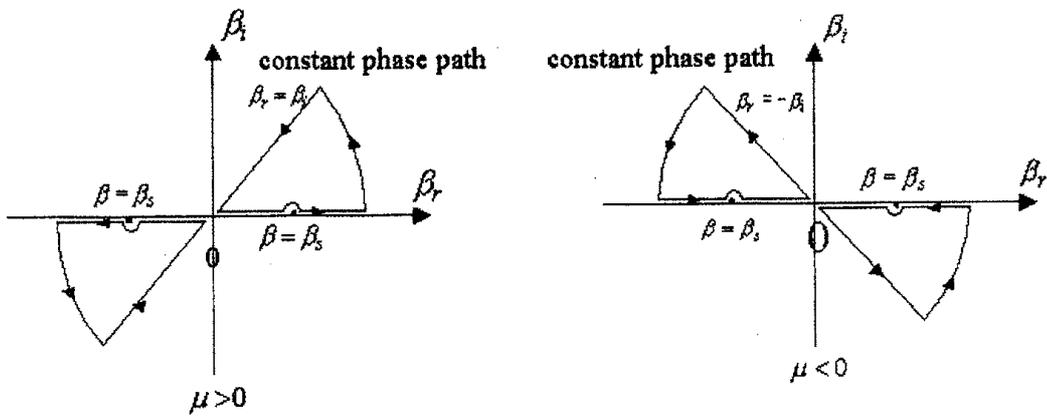
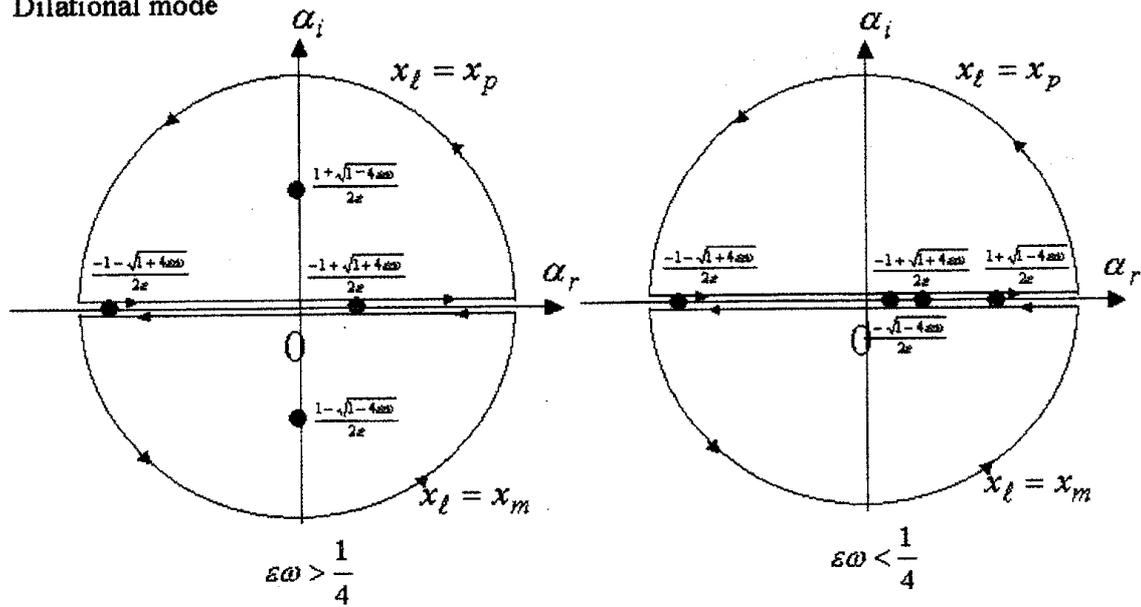


图 3.15: 积分経路

2. 水膜の二次元的な振動は、この表面張力波によって間接的に励起されると考えられる。
3. 半無限領域の安定性を波数空間で議論することを試みた。特に、奇数階の微分を含む方程式の場合に固有値問題は無限領域の場合と大きく異なる。この問題を数学的に整理することが必要である。

参考文献

- [1] 本間 仁, 荻原国宏: フラップゲートの振動についての理論解析, 土木学会論文報告集, No.238, pp.43-53, 1975.
- [2] Casperson, L. W.: Fluttering fountains, J. Sound and Vibration, Vol. 162(2), pp.251-262, 1993.
- [3] Weinstein, S. J., A. Clarke, A. G. Moon and E. A. Simister: Time-dependent equations governing the shape of a two-dimensional liquid curtain, Part 1: Theory, Phys. Fluids, Vol. 9(12), pp.3625-3636, 1997.
- [4] Shwartz, H. I.: Projected nappes subject to harmonic pressures, Proc. Inst. Civil Engineers., Vol.28, pp.313-326, 1964.
- [5] Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, II. Waves on fluid sheets, Proc. R. Soc. Lond., A253, pp.296-312, 1959a.
- [6] Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, III. Disintegration of fluid sheets, Proc. R. Soc. Lond., A253, pp.313-321, 1959b.
- [7] Mansour, A. and N. Chigier: Dynamic behavior of liquid sheets, Phys. Fluids, Vol. A3(12), pp.2971-2980, 1991.
- [8] Mehring, C. and W. A. Sirignano: Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets, J. Fluid Mech., Vol. 388, pp.69-113, 1999.
- [9] Kyotoh, H., R. Nakamura and P. J. Baruah: Incipient oscillations of a sheet of falling water and the instability mechanisms, J. Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol. 20, No.1, 2002.
- [10] Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGRAW-HILL, 647 p., 1960.
- [11] Hughes, T. H. and W. H. Reid: On the stability of the asymptotic suction boundary-layer profile, J. Fluid Mech., Vol. 23, No. 4, pp. 715-735, 1965.
- [12] 巽 友正, 後藤金英: 流れの安定性理論, 産業図書, 275 p., 1976.
- [13] Govindarajan, R. and R. Narasimha: Stability of spatially developing boundary layers in pressure gradients, J. Fluid Mech., Vol. 300, pp. 117-147, 1995.
- [14] Huerre, P. and P. A. Monkewitz: Absolute and convective instabilities in free shear layers. J. Fluid Mech., Vol. 159, pp. 151-168, 1985.