数理解析研究所講究録 1430 巻 2005 年 76-80

星雲方程式の弱解について

佐賀大・理工　小林　孝行
Takayuki KOBAYASHI
Department of Mathematics
Faculty of Science and Engineering, Saga University

大阪大・基礎工　鈴木　貴
Takashi SUZUKI
Division of Mathematical Science
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 Introduction

自己重力場における圧縮性粘性気体の運動を記述した Navier-Stokes-Poisson 方程式:

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + \nabla\cdot(\rho u) = 0,\\
&(\rho u)_t + \nabla\cdot(\rho u\otimes u) + \rho\nabla\Phi + a\nabla\rho^\gamma = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u),\\
(1)\qquad &\Delta\Phi = 4\pi g\left(\rho - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho\,dx\right) \qquad \text{in} \quad \Omega\times(0,T),\\
&u = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\rho|_{t=0} = \rho_0,\quad (\rho u)|_{t=0} = q_0 \qquad \text{in} \quad \Omega,
\end{aligned}
$$

を考える．ここで，Ω は $C^{2,\theta}$ の境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbf{R}^3$ の有界領域，ν は単位外法線ベクトル，$\rho=\rho(x,t)$ は流体の密度，$u=(u^1(x,t),u^2(x,t),u^3(x,t))$ は流速，$\Phi=\Phi(x,t)$ は Newtonian gravitational potential，$\gamma>1$ は adiabatic constant，$\mu>0$ と λ は $\lambda+\frac{2}{3}\mu\geq 0$ をみたす粘性係数，$a=e^S$ はエントロピー S によって決まる定数，$g>0$ は万有引力定数である．

気体星の方程式は，粘性を考慮せず，空間を $\Omega=\mathbf{R}^3$ 全体で考えた Euler-Poisson 方程式

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + \nabla\cdot(\rho u) = 0,\\
(2)\qquad &(\rho u)_t + \nabla\cdot(\rho u\otimes u) + \rho\nabla\Phi + a\nabla\rho^\gamma = 0,\\
&\Delta\Phi = 4\pi g\rho \qquad \text{in} \quad \mathbf{R}^3\times(0,T),
\end{aligned}
$$

として記述される．この Euler-Poisson 方程式では，解が滑らかのとき，

Euler 方程式より質量保存則

$$M = \int_\Omega \rho\, dx$$

が得られ，またエネルギー

$$(3)\quad \begin{aligned} E &= \int_\Omega \left(\frac{\rho}{2}|u|^2 + \frac{P}{\gamma - 1} \right) dx + \frac{g}{2} \int\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)\rho(x)\rho(y)\, dxdy \\ &= \frac{a}{\gamma-1}\|\rho\|_\gamma^\gamma + \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}u\|_2^2 - \frac{g}{8\pi}\|\nabla\Phi\|_2^2 \end{aligned}$$

は減衰することがわかる．ここで，$P = a\rho^\gamma$ は圧力であり，$G = G(x,y)$ は Poisson 方程式

$$\Delta\Phi = 4\pi g \rho$$

の Green 関数，即ち

$$\Phi(x) = g\int_\Omega G(x,y)\rho(y)\, dy$$

である．Poisson 方程式において，$\rho \in L^\gamma$ は，$\gamma \geq \frac{6}{5}$ のとき $\Phi_{x_i} \in L^2$ であることがわかる．実際，楕円型評価と Sobolev の不等式により

$$\|\nabla\phi\|_2 \leq gK\|\rho\|_{\frac{6}{5}}$$

が成り立つからである．従って，このエネルギー E から，$\gamma > \frac{6}{5}$ と $\gamma = \frac{6}{5}$ は，それぞれ，平衡解の subcritical および critical 指数となる．実際，Euler-Poisson 方程式 (2) の $u = 0$ の場合に得られる平衡解は, $(2)_3$ と

$$\Phi + \frac{a\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = const$$

によって決まり，その変分構造から $\gamma > \frac{6}{5}$ のとき解が存在し，$1 < \gamma < \frac{6}{5}$ のとき非存在であることが知られている．

Euler-Poisson 方程式 (2) では，T. Makino [4] は，初期密度 $\rho_0(x)$ がコンパクト台をもち，非負，即ち真空を含むとき，初期値が適切な関数空間に属せば，Euler-Poisson 方程式 (2) は時間局所的に古典解を持つことを示した．T. Makino, S. Ukai, and S. Kawashima [5] は，この存在定理は平衡解をとらえていないこと，さらにこの古典解の存在時間は有限であることを示している．従って，平衡解を含む関数空間の中で存在定理を確立することが大きな目標の一つである．この問題の難しさは Euler

方程式の解が真空と接するときの解の正則性にあり，不連続も許すため，3次元 Euler 方程式の場合はその弱解の存在も知られていないのが現状である．

一方，粘性を考慮し，Poisson 項を落とした圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0,$$
$$(\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a\nabla \rho^\gamma = \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u),$$

では，P. L. Lions [9] が Cauchy 問題の場合，$\gamma > \frac{9}{5}$ のときエネルギー有限な弱解の存在を示している．また，E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová [2] は有界領域の場合，気体が単一原子である $\gamma = \frac{5}{3}$ を含む $\gamma > \frac{3}{2}$ の場合にエネルギー有限な弱解の存在を示している．

粘性を考慮した Navier-Stokes-Poisson 方程式では，M. Okada, and T. Makino [8], S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino [6, 7] が，中心に固体核を想定し，真空と接する球対称解の存在，一意性，漸近挙動の研究を行っている，また，B. Ducoment and E. Feireisl [1] は圧力 P が密度と絶対温度に依存する場合のフルシステムに対して，一般の有界領域の場合にエネルギー有限な弱解の存在を示している．本稿では，球対称を仮定せず，一般の有界領域の場合に Navier-Stokes-Poisson 方程式 (1) を研究し，E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová [2] の方法に従ってエネルギー有限な弱解の存在定理が得られたことを報告する．

2 主結果

我々は次の結果を得た．

定理 1 $T > 0$ とし $\gamma > \dfrac{3}{2}$ とする．初期値 (ρ_0, q_0) は $\rho_0 = \rho_0(x) \geq 0$, $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $|q_0^i|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$, さらに，$\rho_0(x) = 0$ のとき $q_0^i(x) = 0$ を満たすとする．このとき，次をみたすエネルギー有限な (1) の弱解 (ρ, u, Φ) が存在する:

1. $\rho = \rho(x,t) \geq 0, \rho \in L^\infty(0,T; L^\gamma(\Omega)), u^i \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.
2. E を (3) のエネルギーとするとき，$E = E(t) \in L^1_{loc}(0,T)$.
3. $\dfrac{d}{dt}E(t) + \mu\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda+\mu)\|\nabla \cdot u\|_2^2 \leq 0 \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T))$.

4. 方程式 $(1)_1, (1)_2$ は $\mathcal{D}'(\Omega \times (0,T))$ の意味で成り立つ.

5. $\Phi(\cdot,t) = g \int_\Omega G(\cdot,y)\rho(y,t)\,dy$ *for a.e.* $t \in (0,T)$.

6. ρ, u の Ω の外への零拡張は，方程式 $(1)_1$ を $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3 \times (0,T))$ の意味でみたす.

7. 方程式 $(1)_1$ は *renormalized solution* の意味で成り立つ．すなわち任意の $b \in C^1(\mathbf{R})$, $b'(z) = 0$ ($|z|$: 十分大) に対して，$\mathcal{D}'(\Omega \times (0,T))$ の意味で

$$\frac{d}{dt}b(\rho) + \nabla \cdot (b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\nabla \cdot u = 0$$

が成り立つ.

定理 1 と方程式 $(1)_{1,2}$ により

$$\rho \in C([0,T]; L^\gamma_{weak}(\Omega)),$$

$$\rho u^i \in C([0,T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}_{weak}(\Omega))$$

が得られ，従ってこの弱解において初期条件は意味を持つことがわかる.

証明は E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová [2] の方法，つまり β を十分大に取り，方程式

$$\begin{aligned} &\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = \varepsilon \Delta \rho, \\ &(\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \rho \nabla \Phi + a \nabla \rho^\gamma + \delta \nabla \rho^\beta + \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \rho \\ &\qquad = \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u), \\ &\Delta \Phi = 4\pi g \left(\rho - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho\, dx \right) \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T). \end{aligned} \tag{2}$$

から Faedo-Galerkin 法を用いて近似解 $u_{\delta,\varepsilon}(x,t)$ を構成し，$\varepsilon \to 0$ の極限操作のあと $\delta \to 0$ の極限操作を行い (1) の解を構成する．このとき，条件 $\gamma > \frac{3}{2}$ は Faedo-Galerkin 近似 における極限操作と，div-curl Lemma を用いた解の構成において必要になる.

参考文献

[1] B.Ducoment and E. Feireisl, On the dynamics of gasous stars, Arch. Rational Math. Anal. 174 (2004) 221-266

[2] E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids, J. math. fluid mech. 3 (2001) 358–392

[3] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids,* Oxford Science Publ., Oxford, 2004

[4] T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gasous stars, in; Patterns and Waves-Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations (edited by T. Nishida, M. Mimura, and H. Fujii), North-Holland/Kinokuniya, pp. 459-479,1986

[5] T. Makino, S. Ukai, and S. Kawashima, Sur la solution á support compact de l'Equation d'Euler compressible, J.Appl. Math. 3 (1986) 249-257

[6] S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation os spherically symmetric motion of viscous gas (II), Japan J. Indust. Appl. Math. 12 (1995) 195-203.

[7] S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation os spherically symmetric motion of viscous gas (III), Japan J. Indust. Appl. Math. 14 (1997) 199-213.

[8] M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation os spherically symmetric motion of viscous gas, Japan J. Indust. Appl. Math. 10 (1993) 219-235.

[9] P. L. Lions *Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 2, Compressible Models,* Oxford Science Publ., Oxford, 1998.