数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 1-18

v-ANALOGUES OF KLESHCHEV BRANCHING COEFFICIENTS AND DECOMPOSITION NUMBERS (THE 3-RD JOINT WORK WITH JOSEPH CHUANG AND KAI-MENG TAN)

宮地 兵衛 (HYOHE MIYACHI) 名古屋大学多元数理科学研究科

1. 序

佐垣氏によって開かれた本研究集会参加者なら誰もが知る通り Young 則は「既約 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-加群 $S^\lambda_{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_{n-1}$ へ制限したとき、その制限された加群の既約因子たちは multiplcity-free で登場し, 各既約因子は λ から node を一つ取り外した分割 μ に対する既約 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_{n-1}$-加群 $S^\mu_{\mathbb{Q}}$ になる.」ことを教えてくれる. さて係数体を標数 $p>0$ の体に変えて「括弧」内を読むとこのままでは、正しくない命題になってしまう. A. Kleshchev は、彼の一連の論文 BRANCHING RULES FOR MODULAR REPRESENTATIONS OF SYMMETRIC GROUPS I,II,III,IV で既約 $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$-加群 D^λ を $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_{n-1}$ に制限した加群 $D^\lambda\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}$ の分岐則を扱っている. そこで彼は先の Young 則が $p\to\infty$ と思ったときの特殊ケースとして自然に現れる分岐則として「「台 $\mathrm{Soc}(D^\lambda\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}})$ は multiplicity-free で good i-node $(0\le i\le p-1)$ と呼ばれる node を λ から取り外した μ に対する既約因子 D^μ がでる.」」を確立した. ここでは、good i-node を定義しないので、逆に台にでるラベルくらいに思ってもらいたい.

この分岐則は見かけよりもたくさんの応用をもつ. 少し振り返ってみよう.

符号表現 sgn と既約加群 D^λ の (inner) tensor は、再び既約になるがそれがどのラベル μ をもつ既約 D^μ になるかを決定できる. このことは、例えば射影的直既約加群 P^λ の組成因子が分かれば、射影的直既約加群 P^μ の組成因子も分かるのだから重要なのは言うまでもない. 「「括弧」」での λ は $i\neq j$ となる good i-node a_i と j-node a_j を持つとしたときに $D^{\lambda\setminus\{a_i\}}$ と $D^{\lambda\setminus\{a_j\}}$ は異なる block ideal に属する. good i-node の拡張概念である normal i-node は、**分岐係数** $[D^\lambda\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}: D^\mu]$ の計算に応用を持つことが分かる. 係数体は $\mathbb{Q}$ なので係数を reduction modulo p して既約 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-加群 $S^\lambda_{\mathbb{Q}}$[1]から $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$-加群 $\overline{S^\lambda_{\mathbb{Q}}}$ が得られる.[2] このとき、組成因子の重複度 $d_{\lambda,\mu}:=[\overline{S^\lambda_{\mathbb{Q}}}:D^\mu]$ は**分解定数**と呼ばれ. D^μ たちの次元を計算するには Hook length formula とこの分解定数を (λ,μ)-成分にもつ行列 (分解行列) が分かればよい. この分解行列を決める問題は、対称群のモジュラー表現論において最重要課題の

Date: 2005.

[1] $S^\lambda_{\mathbb{Z}}$ なる $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_n$-加群が定義できて $S^\lambda_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}S^\lambda_{\mathbb{Z}}$

[2] $p<n$ ならこれは既約とは限らないし、完全可約性は崩れることがある.

一つである. 70 年代ころには「分解定数は 0 か 1 しかない」とか思われていて[3]、そんな中 Kleshchev は、彼の分岐則を用いて勝手に与えた整数 N に対して λ, μ を特定して N よりも大きな分解定数 $d_{\lambda,\mu}$ が存在することを示した. これらの記述を現存知られているうち最大に拡張した論文が今回のタイトルに出てくる [Kle97](**Theorem 17,20**) である.

一方で、Kleshchev とは独立に柏原氏により創始された Drinfeld-神保の量子群の表現の tensor 積と仲良しになるいい基底の作り方として結晶基底 (crystal base) 理論がある. そこでは辺が色わけされた crystal graph と呼ばれる概念があり柏原作用と呼ばれる頂点から辺をたどる仕組みがあり、柏原作用でどれだけ進めるか等に関してある公理系を満たす. また、Misra-三輪, 林らにより affine 量子群の Fock 表現が研究され、当然重要問題であるこの表現に付随する結晶基底も研究されてきていた. 表現にあらわれる tensor 積と仲良しになる基底は、大域的結晶基底 (global base) と呼ばれ、crystal graph に現れる (局所的) 結晶基底を溶かすこと等で特徴付けられている. この global base は Lusztig による canonical base となることが Lusztig-Grojnowski により知られている. この global base を組合せ論的に上手く見つける方法を Lascoux-Leclerc-Thibon は取り扱っていて (LLT-Algorithm と呼ばれる)、そこでの key idea として先の Kleshchev の分岐則はグラフの頂点を全てのランクの対称群のモジュラー既約加群として、2 つの頂点をつなぐ辺を誘導と制限で台に現れる既約加群は、good i-node をつける/取り外すの関係で色付け定義することにより柏原結晶基底理論の一部として affine 量子群 $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_p)$ の Fock 空間の基本表現に付随する crystal graph となることを使っていた. そして global base を standard bases を使って書いた分割のサイズが 10 までの explicit な表を作った. 彼らは、この表は量子群の parameter v に 1 を代入すると G. James の有限一般線型群 $GL_n(q)$ の q を割らない素数に関するモジュラー表現における主系列モジュラーべき単表現の $n \leq 10$ までの分解行列の表と全く同じになることに気づいて、それは係数体の標数が十分大きいときの mixed case の A 型岩堀-Hecke 環のベキ根での分解行列となっていることから予想として複素数体係数の A 型岩堀-Hecke 環の分解行列を計算する術を柏原大域的結晶基底は与えると予想した. (**LLT 予想**と呼ばれる.) LLT により § 3 Table.1 にある概念が登場してきた. この LLT 予想は、有木氏によりもっと一般に有木-小池代数 (但し係数体が $\mathbb{C}$ もしくは十分大きな素数 $\ell > 0$ を標数に持つ体) の分解定数を記述する仕組みとして拡張されて証明された. 有木による解決のころから (完全に LLT が言っていたことは正しいと分かり) 2 つの分野をつなぐ Fock 空間産業は大きなマーケットとなり様々な background を持つ数学屋さんが参入し始める.[4] 有木氏の仕事以降の大きな結果として Varagnolo-Vasserot の LT 予想の解決がある. この仕事は先に James の表について触れたが、有限一般線型群 $GL_n(q)$ の $\ell \nmid q$ となる n に関して十分大き

[3]そんなにひどく変な発想ではないと思う. 実際、M. Fayers は Young 図形 λ, μ から 3 つまでの p-Hook しか取り外せない λ, μ に対しては分解定数は $0, 1$ のどちらかであることを最近示した. だから大きなランクの対称群を扱わないと $0, 1$ 以外を見つけるのは無理なわけだ.

[4]著者もそんな小臥龍の一人だ.

な素数 ℓ に関するモジュラー表現における (主系列以外も含む全ての) モジュラーべき単表現の分解行列を direct に計算する Leclerc-Thibon の術に保証を与える.

今回の報告ではこのような状況において § 3 TABLE.1 のもとで Kleshchev の分岐係数と分解定数の Fock 空間側の意味のある自然な対応物 v-類似を構成する. つまり、僕らの結果 **Theorem 17,20** の v を 1 にすると有木の定理を介して複素数体上での 1 のベキ根での A 型岩堀-Hecke 環での Kleshchev の定理がでる. VV のほうを使えば、ζ-Schur algebra の方がでてくる仕組みだ.

僕らの結果の証明には CMT 1 作目の行と列はずし定理の v-類似が使われ、また、global base が canonical base であることが必要になってくる. 特に § 4 に記した O. Schiffmann による **Varagnolo-Vasserot 予想**の解決が必要である.

2. KLESHCHEV の組合せ論

今回の結果の Journal 出版用の記号と異なるが、この講究録では Kleshchev の論文 [Kle97] に記号をまるまる似せて書くことにする. この節は日本語訳である. この方が、CMT の 3 人がいかに Fock 空間版があると信じたか感じが伝わるであろう. [5]

n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \lambda_m > 0$ に対して $1 \le j \le m, \lambda_j > \lambda_{j+1}$ のとき

$$\lambda(j) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m)$$

と定義する. さらに $1 \le i < j \le m, \lambda_i < \lambda_{i-1}, \lambda_j > \lambda_{j+1}$ のとき (λ_0 と λ_{m+1} をそれぞれ $+\infty, 0$ と解釈して)

$$\lambda(i,j) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m) \tag{1}$$

とおく.

Definition 1. [Kle97, 1.1] $T = \{t_1, t_2, \dots, t_u\}$ を $t_i = +1$ もしくは $t_i = -1$ となる有限列とする. このような列を符号列 sign sequence と呼ぶ. $u = 0$ となる場合, *i.e.* 空な列も符号列とする.

Definition 2. [Kle97, 1.2] $T = \{t_1, t_2, \dots, t_u\}$ を符号列とする.

(1) この列 T が latticed であるとは任意の $j = 1, 2, \dots, u$ に対して $\sum_{i=1}^{j} t_i \ge 0$ となるときを言う. 定義から空な列は *latticed* である.

[5] Kleshchev の組合せ論を節のタイトルにしているが、白状すると著者自身は Kleshchev の論文に出てくる 60 頁の組合せ論を理解していない, きちんと証明を追わなかった. だが僕らの定理の証明には Kleshchev の定義した用語があれば十分なのでそんなにひどく罪は重くないだろうと思って、さも知っているかのように稿を続けさせて頂く. 共同研究者の 2 人は、全部わかっているのだろうか?

(2) $\nu(T)$ を次で定義する:

$$\nu(T)=\begin{cases}1+\left|\{\, i \mid 1\le i\le u, t_i=+1, \{t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_u\} \text{ は } \textit{latticed}\,\}\right| & \\ \quad \text{もし } T \text{ が } \textit{latticed} \text{ で空でないとき}, & \\ 1 \quad T \text{ が空のとき}, & \\ 0 \quad T \text{ が } \textit{latticed} \text{ でないとき}. & \end{cases}$$

Example 3. [Kle97, 1.2] $T=\{+1,-1,+1\}$ とする. $\nu(T)=2$ となる. 実際, 空な列は *latticed* であり

$$\{\, i \mid 1\le i\le 3, t_i=+1, \{t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_u\} \text{ は } \textit{latticed}\}=\{3\}$$

となっている. $T=\{-1,+1,+1,+1,+1\}$ とする. T は *latticed* でないので $\nu(T)=0$.

Definition 4. [Kle97, 1.3] $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ を n の分割とする. 但し $\lambda_m>0$. $0\le i<j\le m$ と仮定する. $\{k_1>k_2>\dots>k_u\}$ を次の条件を満たす全ての整数 k とする: $i<k<j$ を満たし、かつ、次のいずれか一方が成り立つ:

(i) $\lambda_k>\lambda_{k+1}$ かつ $\lambda_k-k\equiv\lambda_j-j \bmod p$
(ii) $\lambda_k<\lambda_{k-1}$ かつ $\lambda_k-k+1\equiv\lambda_j-j \bmod p$

$l=1,2,\dots,u$ に対して

(1) $k=k_l$ に対して条件 (i) が成り立つとき $t_l=+1$ とし,
(2) $k=k_l$ に対して条件 (ii) が成り立つとき $t_l=-1$ として

$T_{i;j}(\lambda)=\{t_1,t_2,\dots,t_u\}$ とおく.

Remark 5. (a) 明らかに $k=k_l$ を一つ決めたときには **Definition 4** の条件 (i) と (ii) のうちどちらか一方しか成り立たない. $T_{i;j}(\lambda)$ は *well-defined* である.
(b) 列 $T_{i;j}(\lambda)$ は空であり得る.

$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする. $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ の Specht 加群を S^λ, 既約加群を D^μ(但し μ は p-正則), D^μ に対応する射影的直既約加群を P^μ と書く.

Specht(standard) 加群の中に組成因子としていくつ既約加群が入るかを数えたものを分解定数とよぶ: $[S^\lambda:D^\mu](=:d_{\lambda,\mu})$ と書く. Brauer 相互律から $d_{\lambda,\mu}=[P^\mu:S^\lambda]$ が一般に成り立つ. (右辺は Specht filtration として重複度.) この非負整数たちが全て分かれば $\dim_{\mathbb{F}_p} D^\mu$ も全て分かる. さて [Kle97] の一つ目の主結果を述べておこう.

Theorem 6 (Kleshchev[分岐係数]). $\lambda=(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_m>0)$ を n の p-正則な分割とする. (但し $\lambda_{m+1}=0$ と解釈する.) $1\le j\le m, \lambda_j>\lambda_{j+1}$ を仮定すると分岐係数に関して次が成り立つ:

$$[D^\lambda\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}: D^{\lambda(j)}]=\nu(T_{0;j}(\lambda)).$$

Remark 7. 列 $T_{0;j}(\lambda)$ が *latticed* であることと *removal node* $A=(j,\lambda_j)$ が *normal* であることは同値. それから *Frobenius* の相互律を使うと

$$[D^{\lambda}\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}: D^{\lambda(j)}] = [P^{\lambda(j)}\uparrow^{\mathfrak{S}_n}: P^{\lambda}] \tag{2}$$

が分かる. 左辺は、組成因子としての重複度で右辺は、直和因子としての重複度. **Theorem 6** と **Theorem 17** の対比を見るのに式 *(2)* を考えてもらうと v-類似という感じが分かる. ちなみに、一般の分岐係数 $[D^{\lambda}\downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}: D^{\mu}]$ を計算する術知られていない.

Definition 8. [Kle97, 1.7] $J(\neq\emptyset)$ を整数から成る有限集合とする. このとき, J は次のように書ける:

$$J=[b_1,c_1]\cup[b_2,c_2]\cup\ldots\cup[b_N,c_N] \tag{3}$$

$b_{i+1}-c_i>1$ *for* $i=1,2,\ldots,N-1$.
ここで $[x,y]=\{i\in\mathbb{Z}|x\le i\le y\}$. 式 *(3)* を J の**連結成分への分解**という.

Definition 9. [Kle97, 1.8] $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_u\}$ を符号列とする.

(i) $1\le i\le j\le u$ に対して $T(i,j):=\{t_i,t_{i+1},\ldots,t_j\}$ とおく.

(ii) J を $[1,u]$ の部分集合とする. J が *(*T に対して $[1,u]$ における*)* latticed subset であるとは次の 2 条件が成り立つときとする:

(a) $J\subset\{i\,|\,t_i=-1\}$;

(b) $[1,u]\backslash J=b_1,c_1]\cup[b_2,c_2]\cup\ldots\cup[b_N,c_N]$ が**連結成分への分解**とすると任意の $i=1,2,\ldots,N$ に対して列 $T(b_i,c_i)$ は *latticed* である.

Definition 10. 符号列 $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_u\}$ に対して $\mathcal{LSS}(T)$ を T に対する $[1,u]$ における *latticed subset* 全体の集合とする.

Definition 11. [Kle97, 1.9] $1\le i<j\le m$ とする. 整数 $Q_{i,j}(\lambda)$ を次のように定義する.

$$Q_{i,j}(\lambda)=\begin{cases}0 & ;\ \lambda_j-j\not\equiv\lambda_i-i+1 \bmod p\ \text{のとき},\\ \sharp\mathcal{LSS}(T_{i,j}(\lambda)) & ;\ \lambda_j-j\equiv\lambda_i-i+1 \bmod p\ \text{のとき}.\end{cases}$$

式 (1) の分割 $\lambda(i,j)$ の定義を見直してから次の Kleshchev の 2 つ目の結果をみてみよう:

Theorem 12 (Kleshchev[分解定数]). [Kle97, 1.10] $\lambda=(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_m>0)$ を n の分割とし,$1\le i<j\le m$, $\lambda_j>\lambda_{j+1}$, $(\lambda_0=+\infty,\lambda_{m+1}=0)$ とする. 分割 $\lambda(i,j)$ は *p-regular* と仮定する. このとき, 次が成り立つ:

$$[S^{\lambda}:D^{\lambda(i,j)}]=Q_{i,j}(\lambda)$$

Remark 13. ちなみに、普通こんなことを計算する術はなく A 型 *affine Weyl* の放物的 *Kazhdan-Lusztig* 多項式を使って下限を言うことが有木の **Theorem 15** [Ari96] から出来

るところまでた．[6] この下限と一致するかどうかは素数 p とランク n がどんな関係にあればよいかある程度の関係不等式が予想として提出されている．(*A* 型の **Lusztig 予想**, *Schur* 代数のときの **James 予想**)．実際、p,n に何の制限も付けなければ *Kazhdan-Lusztig* 多項式に 1 を代入したものと分解定数 $[S^\lambda : D^\mu]$ が一致しない例などいくらでも見つかる．

3. Fock 空間版

Lascoux-Leclerc-Thibon 予想 [LLT96] の有木による解決 [Ari96] から始まり、有限群のモジュラー表現論と Fock 空間の輸出入産業は９０年代後半以降大ビジネスとなった．

以下 [Lec01] を参照されたし．v を不定元とする．affine 量子群 $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の Fock 空間

$$\mathcal{F}_v := \bigoplus_\lambda \mathbb{Q}(v)|\lambda\rangle$$

を考える．λ は、すべての分割を走り、分割 $|\lambda\rangle$ たちを基底とする無限次元のベクトル空間で、$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e)$-加群として既約になっている．林氏により、$U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の作用が組合せ論的に書き表されていて、$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e)$ の作用は $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ に Heisenberg 代数の作用を足したものだと思って下さい．

Theorem 14 (Kashiwara, Leclerc-Thibon). *$\mathcal{F}_v$ の bar involution $^-$ が定義できて、次の性質をみたす基底が一意的に存在する:*

$$\overline{G(\lambda)} = G(\lambda),\ G(\lambda) \equiv |\lambda\rangle \bmod vL,$$

$$\overline{G^-(\lambda)} = G^-(\lambda),\ G^-(\lambda) \equiv |\lambda\rangle \bmod v^{-1}L^-,$$

ここで、L は、$\{|\lambda\rangle\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[v]$-加群で、L^- は、$\{|\lambda\rangle\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[v^{-1}]$-加群である．ここで $G(\lambda)$ を *canonical base* もしくは *global base* と呼び、$G^-(\lambda)$ を *dual canonical base* もしくは *dual global base* と呼ぶ．[7]

分割 λ,μ に対して多項式 $d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ を次のように定義する:

$$G(\mu) = \sum_\lambda d_{\lambda,\mu}(v)|\lambda\rangle,\ G^-(\lambda) = \sum_\mu e_{\lambda,\mu}(-v^{-1})|\mu\rangle.$$

この節の始めに述べた有木の定理の *A* 型岩堀-Hecke 環の場合の結果をおさらいしておこう．

可逆な元 $q^{1/2}$ をもつ整域 R と Weyl 群 W に対して $\mathcal{H}_{R,q}(W)$ を係数環が R の parameter q を持つ W の岩堀-Hecke 環とする．後の説明のために *A* 型の q-Schur 環 $\mathcal{S}_{R,q}(n)$ も定義し

---

[6] この場合は *A* 型の場合の Kazhdan-Lusztig,Kashiwara-Tanisaki,Andersen-Janzten-Soergel から下限が抑えられているといってもよいと思う．

[7] e-singular 分割 μ でラベルされる $G(\mu)$ は global base とは言わないかもしれないが、似た哲学で構成されているのは確かだ．G は当然 global base の G だ．

ておく, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ に対して

$$\mathcal{S}_{R,q}(n) := \mathrm{End}_{\mathcal{H}}\left(\bigoplus_P M^P\right).$$

ここで和は $\mathfrak{S}_n$ の放物的部分群全体を走り、M^P は $\mathcal{H}$ の部分代数 $\mathcal{H}_{R,q}(P)$ の index 表現を $\mathcal{H}$ へ誘導したもの.

ζ を $\mathbb{C}$ における 1 の原始 e-乗根とする. $\mathcal{H}_{\mathbb{C},\zeta}(\mathfrak{S}_n)$ の Specht 加群を S_ζ^λ, 既約加群を D_ζ^μ (但し μ は e-正則), D_ζ^μ に対応する射影的直既約加群を P^μ と書く. 有木の分解定数に関する定理は次のようになる:

Theorem 15 (有木 [A 型の場合]). $[S_\zeta^\lambda : D_\zeta^\mu] = d_{\lambda,\mu}(1)$. 但し μ は e-正則.

Varagnolo-Vasserot の LT 予想の解決 [VV99] [8] も書いておく. 標準的な記号で $\mathcal{S}_{\mathbb{C},\zeta}(n)$ の Weyl(standard) 加群を $\Delta_\zeta(\lambda)$, その top にでる既約加群を $L_\zeta(\lambda)$ とかく.

Theorem 16 (Varagnolo-Vasserot).

$$[\Delta_\zeta(\lambda') : L_\zeta(\mu')] = d_{\lambda,\mu}(1), \sigma' \text{は} \sigma \text{の共役}$$

$d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ はともに A 型 *affine Weyl* 群の放物的 *Kazhdan-Lusztig* 多項式,

LLT に従い $d_{\lambda,\mu}(v)$ を v-**分解定数**と呼ぶ. 有木の定理,Varagnolo-Vasserot の定理から確かに v-**分解定数**という感じがする. きわめて意味のある v-類似になっていて有限群のモジュラー表現論とは無関係に研究分野として確固たる地位を備えている.

ここまでで多くの読者が $d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ に興味を持って下さったと思って、ではこれらと Kleshchev の 2 定理の関係を書いていこう.

有木の定理,Varagnolo-Vasserot の定理から Fock 空間の canonical bases/global bases と Hecke 環/q-Schur 環の表現論の間に図式的には次のような対応関係 (思想, 思い方) を見出すようになった:

Fock space		表現論
canonical base $G(*)$	$\leftrightarrow$	tilting module
standard base $\|*\rangle$	$\leftrightarrow$	standard module
dual canonical base $G^-(*)$	$\leftrightarrow$	simple module
action of f_i	$\leftrightarrow$	"i-induction"
action of e_i	$\leftrightarrow$	"i-restriction"

TABLE.1

[8] Kashiwara-Tanisaki[KT95] の Kazhdan-Lusztig 予想を解決した定理に依存する. Shiffmann の結果を加えると、別の証明をあたえる.

特に TABLE.1 の上段の tilting module は canonical base $G(\mu)$ が e-正則な μ でラベルされるときは射影的加群になっている．以降，Kleshchev の定理を表の右側と思って左側がどうなるかを念頭において欲しい．

さて，この講究録で報告する主結果2つを述べよう．まず大前提として

§2にあった p を全て形式的に e に置き換えた定義をしたとして、以下を読む．

Chevalley 生成元 f_i's を $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の negative part からとってくる．

まず Kleshchev の分岐係数の v-類似とは次である．:

Theorem 17 (**Chuang-M-Tan[v-分岐係数]**)**.** *分割 λ の node(l, λ_l) の e-residue は r とする．$f_r G(\lambda(l)) = \sum_\mu b_\mu(v) G(\mu)$ と書いたとする．このとき，次が成立する:*

$$b_\lambda(v) = [\nu(T_{0;l}(\lambda))]_v.$$

ここで、$[x]_v$ は v-整数 $(v^x - v^{-x})/(v - v^{-1})$, $[0]_v = 0$. [9]

Remark 18. *Kleshchev の* **Theorem 6** *とこの* **Theorem 17** *を比較して、「おお！自然だ！」と思うには* **Remark 7** *と* TABLE.1 *を考慮にいれるとよい．ちなみに dual canonical base と e_i の action を使った Frobenius v-相互律も確かに成り立つ．*

次に Kleshchev の分解定数の v-類似を述べるために記号を準備する．

Definition 19. *$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_u\}$ を符号列とする．T に対して非負整数係数の v の多項式 $Q(T)(v)$ を次で定義する:*

$$Q(T)(v) := \sum_{J \in \mathcal{LSS}(T)} v^{c(T,J)} \in \mathbb{N}_0[v].$$

ここで

$$c(T, J) := 1 + \sharp(J) + \sum_{k \in ([1,u] \setminus J)} t_k.$$

Theorem 20 (**Chuang-M-Tan[v-分解定数]**)**.** *$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0)$ を n の分割とし,$1 \leq i < j \leq m$, $\lambda_j > \lambda_{j+1}$, $(\lambda_0 = +\infty, \lambda_{m+1} = 0)$ とする．[10] このとき，次が成り立つ :[11]*

$$d_{\lambda, \lambda(i,j)}(v) = Q(T_{i,j}(\lambda))(v).$$

Remark 21. *これは $v = 1$ と代入すれば、「おお！自然だ！」と直ぐに分かる．後に証明方針にも書く James と Donkin の行と列はずし定理の v-類似を使えば上の組 $(\lambda, \lambda(i,j))$ から量産できる分割の組がでてくる．*

---

[9] さらにいくつかの $b_\mu(v) = 0$ になるという結果も講演で話し、この結果が証明には必要になるのだが割愛する．

[10] 分割 $\lambda(i,j)$ は p-regular の仮定はない．

[11] Lascoux-Schützenberger のチャージによる Kostka-Foulkes 多項式 $e_{e\lambda, e\mu}(v^{1/2})$ の記述に似ている．

さて, 2つの定理の系をまとめると有木の **Theorem 15**, Varagnolo-Vasserot の **Theorem 16** を使い、Kleshchev の **Theorem 6,12** を使い、CMT の **Theorem 17,20** を使い、$e=p$ としてとれば、つぎが分かる:

Corollary 22. (1) $(\lambda,\lambda(i))$ の組に対する対称群の *p-modular* 分岐則は $\mathbb{C}$-係数の *1* の原始 p-乗根を *parameter* に持つ岩堀 *Hecke* 環の *modular* 分岐則と同じ.

(2) $(\lambda,\lambda(i,j))$ の組に対する分解定数は、**Lusztig 予想,James 予想にでてくる下限の条件とは無関係に一致する**. 特に彼らの予想は $(\lambda,\lambda(i,j))$ の組に対して正しい.

著者は、非等標数の有限 Chevalley 群のモジュラー表現論の出身のため、兎角次が非常に気になる:

Question 23. (q は可逆) となる所謂 *mixed case* を考えて $\mathcal{H}_{\mathbb{F}_\ell(q^{1/2}),q}(\mathfrak{S}_n)$, $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{F}_\ell}(q^{1/2}),q}(n)$ に対して **Corollary 22** が成り立つか?

他の質問として: Bernard Leclerc に公式を見せたところ, 彼はもっと一般的な枠組みで (affine 量子群の他の type や違った表現のとき)、crystal graph の言葉で v-分岐係数や v-分解定数が書けることを示唆していた. また、CMT は予想として $\lambda\to\lambda(i,j)$ なるスイッチがまたがる形で2回起こる場合の予想も持っている. 他の2人に了承を取っていないので割愛する.

4. 工具箱

証明の基本方針は、帰納法で $G(\lambda)$ に Chevalley 生成元 f_i を当ててひたすら subtracking をするだけだ. 但し、その際に subtracking する過程を組合せ論的に書く必要がある. 肝は subtract するものも帰納法の仮定が使えるようになっていることである.

つまり, $f_rG(\lambda(l))$ が $G(\lambda)$ を含んでいる設定を考えるとその係数が計算できることと、他の $|\lambda\rangle$ の係数が寄与する部分の $G(\mu)$ 達の v 分岐係数と $d_{\mu,\lambda}(v)$ が帰納法できまっていくということだ. 大雑把には $|\lambda\rangle$ の係数**全体**がわかって

(全体) =(leading v-分岐係数)(知りたい v-分解定数)+ $\sum$(他の既知の v-分岐定数)(他の既知の v-分解定数)

分岐定数を決めていくのも下から交互に2つの定理を帰納法で示す.

ただ、このままだとまずい. どうまずいのかというと例えば「2という数字がいくつかの数字の和に分解しました. どんな分かれ方ですか?」といったときに

(1) $2=1+1+0+\cdots$ と,

(2) $2=2+0+\cdots$ です.

というには各成分が $\mathbb{N}_0$ に属す必要があるからだ. これは後でもう一度ラフに述べよう.

また帰納法を使う際にフル活用するのが CMT の1作目 James/Donkin の行と列はずし定理の v-類似だ. [CMT02] § 5 に載せておく. [12] 勿論 [Lec01, Proposition 11] も使う. こ

[12] ちなみにこの定理自体は **Theorem 25** の全ての (v) を取り去ってどんな mixed case q-Schur 代数でも成り立つ original の James/Donkin の定理となる. だから Lusztig 予想や James 予想が正しいところから出

の定理から $d_{\lambda,\lambda(i,j)}(v)$ は Young 図形の最初の行と最後の行だけ見ればいいことになるし、subtract するものに必要となる情報にもこの定理が役に立つ.

投稿用の論文の証明は 62 頁の Kleshchev の論文と比べて 10 頁弱と非常に短く簡潔になっている. しかし、簡単になったかというと、洗練された道具をいくつか使っているので、Yes であり、No でもある. 組合せ論だけでいけるかと頑張ってみたがだめだった. どうやっても係数が $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への制限が出ない. 端的に言うと幾何的諸結果に非常に依存する. それを少し説明してみよう.

使う定理は 3 つ:

(1) generic Hall 代数の 2 つの canonical bases の積を再び canonical bases で展開したときの正値性. (**Lusztig**[Lus90],[Lus91], [Lus98],[VV99])
(2) **Varagnolo-Vasserot 予想** [VV99] の **O. Schiffmann** [Sch00] による解決. i.e. $\mathbf{U}_e^-$ を $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の negative part を含む generic Hall 代数とする. Schiffmann は次を示した:
$$\mathbf{B}|\emptyset\rangle = \mathbf{B}^+.$$
ここで $\mathbf{B}$ は [VV99, 3.5] で定義された $\mathbf{U}_e^-$ の canonical bases 全体の集合, $\mathbf{B}^+ = \{G(\lambda) \mid \lambda \text{は分割}\}$.
(3) $d_{\lambda,\mu}(v) \in \mathbb{N}_0[v]$ [Lec01, Corollary 14] (**Kashiwara-Tanisaki** [KT02], **Varagnolo-Vasserot**[VV99], **Schiffmann** [Sch00])

これら 3 つのうち上 2 つから次が分かる:

Proposition 24. *If we write $f_r(G(\sigma)) = \sum_\rho a_\rho(v)G(\rho)$, then $a_\rho(v) \in \mathbb{N}_0[v, v^{-1}]$ and it is easy to see that $a_\rho(v) = a_\rho(v^{-1})$.*

この **Proposition** と $d_{\lambda,\mu}(v)$ の正値性からどれだけ subtract すれば canonical base になるかが正確に測れる.

大雑把には全体は $\mathbb{N}_0[v, v^{-1}]$ にあるが bar でとまる部分と $v\mathbb{N}_0[v]$ に入る部分とに分けられることが使われる. そういった分解は一意的.

5. 付録 1

Theorem 25. [CMT02, Theorem 1] *Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ and $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ be partitions.*

(1) (*Row removal*) *Suppose that $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = \mu_1 + \cdots + \mu_r$ for some r and let*
$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \qquad \mu^{(0)} = (\mu_1, \ldots, \mu_r),$$
$$\lambda^{(1)} = (\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots), \qquad \mu^{(1)} = (\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots).$$

発して使えば、その仲間達が増えるわけで、逆に予想にあるようには一致しないところを出発点にすれば、いくらでも一致しない仲間が増えるわけだ. だから僕らみんなの希望通りの仲間がたくさん欲しい. 可算 ∞ 人全員が希望通りとなるまで.

Then $d_{\lambda\mu}(v) = d_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(v) d_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}(v)$.

(2) (*Column removal*) *Suppose that* $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_r = \mu'_1 + \cdots + \mu'_r$ *for some* r *and let*

$$\lambda^{(0)\prime} = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r), \qquad \mu^{(0)\prime} = (\mu'_1, \ldots, \mu'_r),$$
$$\lambda^{(1)\prime} = (\lambda'_{r+1}, \lambda'_{r+2}, \ldots), \qquad \mu^{(1)\prime} = (\mu'_{r+1}, \mu'_{r+2}, \ldots).$$

Then $d_{\lambda\mu}(v) = d_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(v) d_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}(v)$.

6. GAP scripts

この節は主にハッカーな大学院生に向けて書いている. 今回の報告では Kleshchev の定理の"Lift" があるはずだとまず信じてから、計算機を用いて Try&Error を繰り返して「正しいだろうと思われる公式」を探すことから始まった. GAP — Group, Algorithms, and Programming [S+95] version 3 release 4 patch level 4 [13] と A. Mathas の package SPECHT version 2.4 を用いて v-分解定数がある程度計算できる. 以下完成版の scripts を Subsection 6.1 に載せてある. どうやって探していったかを書こうと思う. 関数 QuantizedKleshchevShiftFormula 以外の定義は、誰でも Kleshchev の論文を見れば書ける内容だと思う. その関数の定義中問題となる箇所は、a が動く latticed subset の for loop のところだけだ.

最初に Try したのは次だ.

```
for a in lss do
        t:=t+v^(1+Length(a));
od;
```

何の工夫もない安直な関数 IsKleshchevOneShift で分割のうち $(\lambda, \lambda(i,j))$ の組になっているものを探す. [14] そして SPECHT の関数で CrystalDecompositionMatrix に代表される $d_{\lambda,\mu}(v)$ を計算するものを使って結果を真偽判定とともに両方出力させる. これが結構" 真" を返す. だが, ランクが大きくなると Error が出るようになる.

次に、$d_{\lambda,\lambda(i,j)}(v)$ が $v^5 + 2v^3 + v$ のように真に多項式になっている場合といままで計算した出力結果を睨み、**Definition 9** に出てきた関係ありそうな数字をあれこれと考える. このとき念頭にあったのは Lascoux-Schützenberger で positive sum でチャージを指数にして足し上げてることだった. で、格闘の末できたのが次:

```
for a in lss do
    ta:=0;
    for b in [1.. Length(lattice)] do
        if not b in a then
```

[13] 現在の GAP の version は 4 だが, こっちは僕が使いたい package CHEVIE や SPECHT が使えない. (少なくともこの TeXfile を書いているときまではの話. 未来は見えない.) GAP4 は非常によくなっていると思う. ともに freeware だ.

[14] ハッカーとは言えないような関数だ. だが、綺麗なプログラムを書くより、いち早く数学の結果が正しいことを確信できることを優先して計算機の処理速度に任せてこんな関数を使った.

```
              ta:=ta+lattice[b];
          fi;
      od;
          t:=t+v^(1+Length(a)+ta);
  od;
```

40 の分割くらいまでで、行と列はずしで reduce 出来ない場合を全部 true 確認して、後はやる気満々になった.

6.1. **gap scripts.**

```
#############################################################################
##
#A specht2c.g    SPECHT additional functions                    Hyohe MIYACHI
##
#
#Y July 2003, Nagoya university.
#
#
# These functions need Mathas' SPECHT share package. (See,
# RequierPackage ).
if not IsBound(SPECHT) then
    RequirePackage("specht");
fi;
if not IsBound(v) then
    v:=Indeterminate(Cyclotomics);
    v.name:="v";
fi;
SpechtPrettyPrint(true);
#############################################################################
##
#F  IsKleshchevOneShift(<lambda>,<mu>)
#
IsKleshchevOneShift:=function(lambda,mu)
    local i,j,lambda0,mu0,sleng,lleng,test;
    if not Sum(lambda)=Sum(mu) then
        return false;
    else
        if Length(lambda) < Length(mu) then
            lambda0:=mu;#ShallowCopy(mu);
            mu0:=ShallowCopy(lambda);
        else
            lambda0:=lambda;#ShallowCopy(lambda);
            mu0:=ShallowCopy(mu);
        fi;
        sleng:=Length(mu0);
        lleng:=Length(lambda0);

        if lleng-sleng > 1 then
```

```
            return false;
        else
            if lleng=sleng+1 then
                Add(mu0,0);
            fi;
            test:=0;
            for i in [1..lleng] do
                test:=test+AbsInt(lambda0[i]-mu0[i]);
            od;
            #They are Kleshchev one shifted pairs if and only if
            # there are only two rows, say i-th and j-th, such that
            # lambda0[i]=mu0[i]-1,lambda0[j]=mu0[j]+1,
            # lambda0[k]=mu0[k] for any k <> i,j.
            if test=2 then
                return true;
            else
                return false;
            fi;
        fi;
    fi;
end;
#############################################################################
##
#F  KleshchevT(<e>,<i>,<j>,<lambda>)
#
KleshchevT:=function(e,i,j, lambda )
    local t,k,sseq;
    if not i<j then
        Print("The second entry must be smaller than the third!","\n");
    else
        if Length(lambda)<j then
            Print("The third entry must be at most the length of",
                  lambda,"\n");
        else
            sseq:=[];
            for t in [1..j-i-1] do
                k:=j-t;
                if lambda[k] > lambda[k+1] and
                   (( lambda[k] - lambda[j] - k + j ) mod e)= 0 then
                    Add(sseq,1);
                elif
                  lambda[k] < lambda[k-1] and
                  (( lambda[k] - lambda[j] - k + j + 1) mod e)= 0 then
                    Add(sseq,-1);
                fi;
            od;
        fi;
    fi;
```

```
    return sseq;
end;
##############################################################################
##
#F  IsLatticed( <signedseq> )
#
IsLatticed:=function( sseq )
    local t,i,leng;
    if sseq=[] then
        return true;
    else
        t:=0;i:=0;leng:=Length(sseq);
        while t>=0 do
            i:=i+1;
            if i=leng+1 then
                return true;
            fi;
            t:=t+sseq[i];
        od;
        return false;
    fi;
end;
##############################################################################
##
#F  MakePowerSet( <set> )
#
MakePowerSet:=function( set )
    local power,leng,tup,i,j;
    power:=[];
    leng:=Length(set);
    tup:=Tuples([0,1],leng);

    for i in [1.. 2^leng] do
        power[i]:=[];
        for j in [1.. leng] do
            if tup[i][j]=1 then
                Add(power[i],set[j]);
            fi;
        od;
    od;
    Sort(power);
    return power;
end;
##############################################################################
##
#F  LatticedSubsets( <signedseq> )
#
LatticedSubsets:=function( sseq )
```

```
    local i,u,minuspart,powerset,seq,J,cJ,initial,t,test,lengcJ,res;
    if sseq=[] then
        return [[]];
    else
        u:=Length(sseq);
        minuspart:=[];
        for i in [1..u] do
            if sseq[i]=-1 then
                Add(minuspart,i);
            fi;
        od;

        powerset:=MakePowerSet(minuspart);
        res:=[];

        for J in powerset do
            seq:=ShallowCopy( sseq );
            cJ:=[1..u];
            SubtractSet(cJ,J);
            if cJ=[] then
                Add(res,J);
            else
                lengcJ:=Length(cJ);

                initial:=cJ[1];
                t:=[];
                i:=1;
                test:=true;

                while test and (i <= lengcJ) do
                    if not cJ[i]+1 in cJ then
                        test:=IsLatticed(Sublist(seq,[initial..cJ[i]]));
                        if i+1<= lengcJ then
                            initial:=cJ[i+1];
                        fi;
                    fi;
                    i:=i+1;
                od;

                if i > lengcJ and test then
                    Add(res,J);
                fi;
            fi;
        od;
        return res;
    fi;
end;
#############################################################################################
```

```
##
#F  KleshchevQ(<e>,<i>,<j>,<lambda>)
#
KleshchevQ:=function(e,i,j,lambda)
    return LatticedSubsets(KleshchevT(e,i,j,lambda));
end;
##############################################################################
##
#F  QuantizedKleshchevShiftFormula(<e>,<i>,<j>,<lambda>)
#   QuantizedKleshchevShiftFormula(<signedseq>)
#
QuantizedKleshchevShiftFormula:=function(arg)
    local a,b,ta,lattice,lss,t,e,i,j,lambda;
    t:=0*v;
    if Length(arg)>1 then
        e:=arg[1];
        i:=arg[2];
        j:=arg[3];
        lambda:=arg[4];
        lattice:=KleshchevT(e,i,j,lambda);
        lss:=LatticedSubsets(lattice);
    else
        lattice:=arg[1];
        lss:=LatticedSubsets(lattice);
    fi;
    for a in lss do
        ta:=0;
        for b in [1.. Length(lattice)] do
            if not b in a then
                ta:=ta+lattice[b];
            fi;
        od;
            t:=t+v^(1+Length(a)+ta);
    od;
    return t;
end;
```

7. 謝辞, お詫び, 編集後記

7.1. 「表現論における組合せ論的手法とその応用」の世話人の佐垣さんに講演の機会を頂き感謝するとともに講究録の原稿提出の締め切りを大幅に大幅に破ってしまい深くお詫びいたします. ご迷惑お掛けしました.

2001 年ころだったと思いますが東京理科大で研究生をしているころに新幹線の車両内で数時間にわたって斉藤義久さんに柏原-斉藤の研究内容、canonical bases であることの長所短所、global bases であることの長所短所, 中島啓さんと議論した内容について指南頂いたことがありました. 今回の講究録に記した結果に関してそこで教えて頂いたことが、助けに

なりました. 感謝致します. それから著者にとって timely に O. Shiffmann を京都へ招待した中島啓氏に感謝致します.

7.2. この報告での結果の計画は、随分前からもっていた. 2001 年夏ごろに学位論文に興味を持ってくれた J. Chuang と K. Tan の両氏から Singapore 大へ招待を受けた. 初御対面だ. [15] その滞在のときに、Kleshchev の定理の"Lift" が存在することを信じている旨を両氏から聞いた. そのときに、これは難しすぎると感じモジュラー表現論の"Lift" を作るなら「行と列はずし」の方が簡単そうだよということになって「v-行と列はずし」が出来た. その当時は「v-行と列はずし」が今回の証明に使われるとも思ってなかったし、証明すべき公式も見えていなかった. 初めの計画が完成し、敬愛する人々が述べていた言葉を拝借すると実りのある結果がでて良かったと思っている.

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 宮地 兵衛
miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

References

[Ari96] S. Ariki. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, 36:789–808, 1996.

[CMT02] J. Chuang, H. Miyachi, and K. M. Tan. Row and column removal in the q-deformed Fock space. *J. Algebra*, 254:84–91, 2002.

[Hay90] T. Hayashi. q-analogues of Clifford and Weyl algebras – spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras. *Comm. Math. Phys.*, 127:129–144, 1990.

[JK81] G. D. James and A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 16 (Cambrige University Press), 1981.

[Kas90] M. Kashiwara. Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras. *Commun. Math. Phys.*, 133:249–260, 1990.

[Kle97] A. Kleshchev. On the decomposition numbers and branching coefficients for symmetric and special linear groups. *Proc. London Math. Soc.*, 75(3):497–558, 1997.

[KT95] M. Kashiwara and T. Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. *Duke Math. J.*, 77:21–61, 1995.

[KT02] M. Kashiwara and T. Tanisaki. Parabolic Kazhdan-Lusztig polynomials and Schubert varieties. *J. Algebra*, 249:306–325, 2002.

[Lec01] B. Leclerc. Symmetric functions and Fock space representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Lectures at the Newton Institute. *Combridge*, pages 1–20, 2001.

[LLT96] A. Lascoux, B. Leclerc, and J. Y. Thibon. Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras. *Commun. Math. Physics*, 181:205–263, 1996.

[LT96] B. Leclerc and J. Y. Thibon. Canonical bases of q-deformed Fock space. *Int. Math. Res. Notices*, pages 447–498, 1996.

[Lus90] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 3:447–498, 1990.

[Lus91] G. Lusztig. Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 4:365–421, 1991.

[Lus98] G. Lusztig. Canonical bases and Hall algebras. In A. Broer and A. Daigneault, editors, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, volume 514 of *NATO ASI*, pages 365–399, 1998.

[15]そのときにチャンギ空港で彼らの持っていた $[\mathfrak{S}_n, GL_n(q)]$ と大きく書いたプラカードと笑顔が忘れられない.

宮地 兵衛 (HYOHE MIYACHI) 名古屋大学多元数理科学研究科

[Mat99] A. Mathas. *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric groups*, volume 15 of *University Lecture Series*. AMS, 1999.

[MM90] K.C. Misra and T. Miwa. Crystal base of the basic representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$. *Commun. Math. Phys.*, 134:79–88, 1990.

[S+95] Martin Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

[Sch00] O. Schiffmann. The Hall algebra of a cyclic quiver and canonical bases of Fock spaces. *Internat. Math. Res. Notices*, 8:413–440, 2000.

[VV99] M. Varagnolo and E. Vasserot. On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra. *Duke Math. J.*, 100(2):269–297, 1999.