数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 154-162



# Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Finite Quantum Algebras

星野 歩 (Hoshino Ayumu)
上智大学理工学部数学科
(Sophia University)

## 1 Introduction

量子群 $U_q(\mathfrak{g}) := \langle e_i, f_i, h_i \rangle_{i\in I}$ の結晶基底を具体的に記述する方法の一つとして、中島と Zelevinsky によって導入された多面体表示による記述方法がある。この手法は結晶基底を無限階 $\mathbb{Z}$-格子内の凸多面体内部の格子点として実現するものであるが、彼らによって $U_q^-(\mathfrak{g}) := \langle f_i \rangle_{i\in I}$ の結晶基底 $B(\infty)$ については、付随する Kac-Moody 代数が rank 2 一般、古典 $A_n$ 型、アフィン $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合 ([NZ])、また、可積分最高ウェイト表現の結晶基底 $B(\lambda)$ $(\lambda \in P_+)$ についても同様の場合に中島 [N] により多面体表示は得られている。ここでは、すべての有限型 (古典型、例外型) 量子群の結晶基底とそれらの可積分最高ウェイト表現の結晶基底を多面体表示を用いて記述する。

## 2 Construction of polyhedral realization of $B(\infty)$

ここでは、$B(\infty)$ の多面体表示の一般論と、その具体形を求める。$\mathfrak{g}$ を対称化可能 Kac-Moody 代数とし $B(\infty)$ の単位元を $u_\infty$ とする。

### • Kashiwara embedding

ここでは、多面体表示の構成に必要な「柏原の埋めこみ」([K2] 参照) を紹介する。クリスタル $B_i := \{ (x)_i \mid x \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$ $(i \in I)$ ($B_i$ のクリスタルの構造は略) に対して、以下の埋めこみを得る：

$$\Psi_i \,:\, B(\infty) \hookrightarrow B(\infty)\otimes B_i \quad (\, u_\infty \mapsto u_\infty \otimes (0)_i \,).$$

インデックスの無限列 $\iota = (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ $(i_k \in I)$ は、以下の条件を満たすとする：

$$(A) \quad i_k \neq i_{k+1}, \quad \sharp\{\, k \mid i_k = i \,\} = \infty \ \text{ for any } i \in I.$$

ここで、$\Psi_i$ を $\iota$ に沿って繰り返し作用させると以下の埋めこみを得る (柏原の埋めこみ)：

$$\begin{array}{rcccccccc} \Psi_\iota \,:\, B(\infty) & \hookrightarrow & B(\infty)\otimes B_{i_1} & \hookrightarrow & B(\infty)\otimes B_{i_2}\otimes B_{i_1} & \hookrightarrow & \cdots & \cong & \mathbb{Z}^\infty \\ u_\infty & \mapsto & u_\infty \otimes (0)_{i_1} & \mapsto & u_\infty \otimes (0)_{i_2} \otimes (0)_{i_1} & \mapsto & \cdots & \mapsto & (\cdots, 0, 0) \end{array}$$

ただし、 $\mathbb{Z}^\infty := \{\, (\cdots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Z},\ x_k = 0\ (k \gg 0) \,\}$.

**• Crystal structure of $\mathbb{Z}_\iota$**

ここでは、$\mathbb{Z}^\infty$ 上にクリスタルの構造を構成する ([NZ] 参照、クリスタルの構造が入った $\mathbb{Z}^\infty$ を $\mathbb{Z}_\iota$ とかく)。条件 $(A)$ を満たすインデックスの無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定する。$\vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty$ に対し

$$\sigma_k(\vec{x}) \ := \ x_k + \Sigma_{j>k}\langle h_{i_k}, a_{i_j}\rangle x_j$$

と定める ($j \gg 0$ に対し $x_j = 0$ なので $\sigma_k(\vec{x})$ は well-defined)。また、$i \in I$, $k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} \sigma^{(i)}(\vec{x}) \ &:= \ max\ \{\ \sigma_k(\vec{x}) \mid \text{ for } k \text{ s.t } i_k = i\ \}, \\ M^{(i)} \ &:= \ \{\ k \mid i_k = i,\ \sigma_k(\vec{x}) = \sigma^{(i)}(\vec{x})\ \} \end{aligned}$$

と定める。このとき $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ の $\vec{x} = (\cdots, x_k, \cdots, x_2,\ x_1) \in \mathbb{Z}^\infty$ への作用を以下で定める：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\cdots, x_k, \cdots, x_2,\ x_1) &= (\cdots, x_k + 1, \cdots, x_2,\ x_1) \ \text{ where } k = min\ M^{(i)}, \\ \tilde{e}_i(\cdots, x_k, \cdots, x_2,\ x_1) &= (\cdots, x_k - 1, \cdots, x_2,\ x_1) \ \text{ where } k = max\ M^{(i)} \ \text{ if } \ \sigma^{(i)}(\vec{x}) > 0, \\ & \qquad \text{o.w.} \ \ \tilde{e}_i(\vec{x}) = 0. \end{aligned}$$

また

$$wt(\vec{x}) := -\Sigma_{j=1}^{\infty} x_j \alpha_{i_j},\ \varepsilon_i(\vec{x}) := \sigma^{(i)}(\vec{x}),\ \varphi_i(\vec{x}) := \langle h_i, wt(\vec{x})\rangle + \varepsilon_i(\vec{x})$$

と定めると、$\mathbb{Z}^\infty$ は $\iota$ に付随したクリスタルの構造をもつことが分かる。

**• Polyhedral realization of $B(\infty)$**

ここでは、柏原の埋めこみの像 $Im\Psi_\iota$ ($\cong B(\infty)$) を記述するために $B(\infty)$ の多面体表示を構成する ([NZ] 参照)。条件 $(A)$ を満たすインデックスの無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定し、$k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} k^{(+)} \ &:= \ min\ \{\ j \mid i_k = i_j\ (k < j)\ \}, \\ k^{(-)} \ &:= \ max\ \{\ j \mid i_k = i_j\ (k > j)\ \}\ (\text{ ただし } k^{(-)} \text{ が存在しない場合は } k^{(-)} = 0\ ) \end{aligned}$$

とおく。

**Example 2.1** ($A_3$**-case**) $\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$ とすると、

$$4^{(+)} = 7,\ 4^{(-)} = 1,\ 2^{(+)} = 5,\ 2^{(-)} = 0.$$

$\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathbb{Q}^\infty$ を以下で定める：

$$\mathbb{Q}^\infty := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^\infty = \{\ \vec{x} = (\cdots, x_2,\ x_1) \mid x_j \in \mathbb{Q},\ x_k = 0\ (k \gg 0)\ \}.$$

また、$\mathbb{Q}^\infty$ 上の一次形式 $\beta_k(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty$) を以下で定める：

$$\beta_k(\vec{x}) \ = \ x_k + \sum_{k<j<k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j}\rangle x_j + x_{k^{(+)}}.$$

**Example 2.2** ($A_3$**-case**)
$\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$ とすると

$$\beta_1 = x_1 - x_2 + x_4 \quad (1^{(+)} = 4), \quad \beta_2 = x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \quad (2^{(+)} = 5),$$
$$\beta_3 = x_3 - x_5 + x_6 \quad (3^{(+)} = 6), \quad \beta_4 = \quad \cdots \qquad \cdots$$

となる。

この $\beta_k(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = \sum_{k\geq 1}\varphi_k x_k$ $(\varphi_k \in \mathbb{Q})$ に対する区分線型作用素 $S_k$ を以下で定める：

$$S_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k\beta_k & \text{if } \varphi_k > 0, \\ \varphi - \varphi_k\beta_{k^{(-)}} & \text{if } \varphi_k \leq 0. \end{cases}$$

**Example 2.3** ($A_3$**-case**)
$\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$, $\varphi = x_1$ とすると

$$\begin{aligned} S_1(x_1) &= x_1 - \beta_1(\vec{x}) = x_1 - (x_1 - x_2 + x_4) = x_2 - x_4, \\ S_2S_1(x_1) &= x_2 - x_4 - \beta_2(\vec{x}) = x_2 - x_4 - (x_2 - x_3 - x_4 + x_5) = x_3 - x_5, \\ S_3S_2S_1(x_1) &= x_3 - x_5 - \beta_3(\vec{x}) = x_3 - x_5 - (x_3 - x_5 + x_6) = -x_6. \end{aligned}$$

ここで

$$\Xi_\iota := \{\, S_{j_l}\cdots S_{j_1}(x_{j_0}) \mid l \geq 0,\ j_0, \cdots, j_l \geq 1 \,\},$$
$$\Sigma_\iota := \{\, \vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota (\subset \mathbb{Q}^\infty) \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota \,\}$$

と定める。またインデックスの無限列 $\iota$ に対し

$$\iota^{(j)} := min\{\, k \mid i_k = j \,\} \quad (j \in I)$$

と定め、$\iota$ に対し以下のような仮定 $(P)$ を課す：

$$(P) \quad \varphi_{\iota^{(j)}} \geq 0 \text{ for any } \varphi(\vec{x}) \in \Xi_\iota.$$

このとき、以下の定理が成立する：

**Theorem 2.4 ([NZ])** $\iota$ は条件 $(A)$, $(P)$ を満たすとする。このとき

$$Im\,(\Psi_\iota)\,(\cong B(\infty)) = \Sigma_\iota.$$

この $\Sigma_\iota$ を $\iota$ に付随する $B(\infty)$ の多面体表示と呼ぶ。

**Remark.** この Theorem 2.4 より、$B(\infty)$ の具体形を求めるには $\Xi_\iota$, $\Sigma_\iota$ の具体形を求めればよいことが分かる。

**Example 2.5** **($A_3$-case)** $\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$ とすると

$$Im\,(\Psi_\iota) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq x_4 \geq 0, \\ x_3 \geq x_5 \geq x_7 \geq 0,\ \text{その他の}\ x_j \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

**Remark.** 多面体表示において恒等的に 0 でない $x_j$ の個数、つまり $B(\infty)$ を記述するために必要な、柏原の埋めこみで用いたクリスタル $B_i$ のテンソル積の個数は、付随する Weyl 群の最長元の長さに等しいことが分かっている。アフィン型や一般の Kac-Moody 型の場合、無限個のテンソル積が必要になる。

**• Main result I**

Rank 2 一般、古典 $A_n$ 型 、アフィン $A^{(1)}_{n-1}$ 型に対する $B(\infty)$ の多面体表示は [NZ] で得られている。ここでは、その他の有限型の場合の $\Xi_\iota, \Sigma_\iota$ の具体形を求めるために Theorem 2.4 を以下のように修正する：

**Theorem 2.6** $(\mathbb{Q}^\infty)^*$ における一次形式の集合 $\Xi'_\iota$ と

$$\Sigma'_\iota := \{\, \vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota \subset \mathbb{Q}^\infty \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \ \textit{for any}\ \varphi \in \Xi'_\iota \,\}$$

は、以下の条件を満たすとする：
(*i*) インデックスの無限列 $\iota$ は条件 $(P)$ を満たす,
(*ii*) $\Xi'_\iota$ は $S_k$ の作用で閉じている,
(*iii*) $\vec{x} \in \Sigma'_\iota$ のすべての成分は非負,
このとき

$$Im\,(\Psi_\iota)\,(\cong B(\infty)) = \Sigma'_\iota.$$

つまり、「すべての $x_j$ に対する $S_k$ たちの作用で閉じている線型関数の集合ではなく、(*iii*) を満たす $x_j$ に対する $S_k$ たちの作用で閉じている線型関数の集合を見つければよい」ということである。

以下 $\mathfrak{g}$ を有限型とし $\Xi_\iota, \Sigma_\iota$ の具体形を求める。インデックスの無限列 $\iota$ を以下のように固定する：

$$\iota := (\cdots, n, \cdots, 2, 1, \cdots, n, \cdots, 2, 1)$$

ただし、$n$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン行列のサイズとする。簡単のため、$x_{j;i} := x_{(j-1)n+i}$ と定め、$\vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota$ のインデックスを以下のように付け変える：

$$\vec{x} = (\cdots, x_{j;i}, \cdots, x_{2;2},\ x_{2;1},\ x_{1;n}, \cdots, x_{1;2},\ x_{1;1})$$

ただし $i \notin [1,n]$ のときは $x_{j;i}=0$ とする。ここで

$$\Xi_\iota := \{\, S_{j_l}\cdots S_{j_2}S_{j_1}(x_{k;1}) \mid k\geq 1,\ j_1,\cdots,j_l\geq 1\,\},$$
$$\Sigma_\iota := \{\, \vec{x}\in\Sigma_\iota \mid \varphi(\vec{x})\geq 0 \text{ for any } \varphi\in\Xi_\iota\,\}$$

と定めると、$\iota, \Xi_\iota, \Sigma_\iota$ は Theorem 2.6 の 3 条件を満たすことが分かり、$\Sigma_\iota$ は $B(\infty)$ の多面体表示となる。

**Remark.** $\iota$ を上記のように固定すると、有限型の場合、$x_{k;1}$ に $S_j$ たちを作用させて閉じている線型関数の集合は比較的容易に求められる。

- $C_n$**-cass**

ここでは、$C_n$ 型の場合の結果を紹介する。

**Theorem 2.7** ($C_n$**-case**) $B(\infty)$ の多面体表示は以下である：

$$\begin{aligned}
&x_{j;i}=0 \quad \mathit{for}\ \ j,i\notin[1,n],\\
&x_{1;i}\geq x_{2;i-1}\geq\cdots\geq x_{i;1}\geq 0 \quad \mathit{for}\ \ 1\leq i\leq n-1,\\
&2x_{j;n}\geq x_{j+1;n-1}\geq\cdots\geq x_{n;j}\geq 0 \quad \mathit{for}\ \ 1\leq j\leq n,\\
&x_{j;n-j+1}\geq x_{j;n-j+2}\geq\cdots\geq 2x_{j;n}\geq 0 \ \ \mathit{for}\ \ 2\leq j\leq n.
\end{aligned}$$

**Example 2.8** ($C_5$**-case**)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & x_1 & \geq & 0,\\
 & & & & & & x_2 & \geq & x_6 & \geq & 0,\\
 & & & & x_3 & \geq & x_7 & \geq & x_{11} & \geq & 0,\\
 & & x_4 & \geq & x_8 & \geq & x_{12} & \geq & x_{16} & \geq & 0,\\
2x_5 \geq & & x_9 & \geq & x_{13} & \geq & x_{17} & \geq & x_{21} & \geq & 0\\
 & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \\
 & & 2x_{10} & \geq & x_{14} & \geq & x_{18} & \geq & x_{22} & \geq & 0\\
 & & & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \\
 & & & & 2x_{15} & \geq & x_{19} & \geq & x_{23} & \geq & 0\\
 & & & & & & \mathrel{|\!\vee} & & \mathrel{|\!\vee} & & \\
 & & & & & & 2x_{20} & \geq & x_{24} & \geq & 0\\
 & & & & & & & & \mathrel{|\!\vee} & & \\
 & & & & & & & & 2x_{25} & \geq & 0
\end{array}$$

(その他の $x_j \equiv 0$, $x_j \not\equiv 0$ である $x_j$ の個数は 25).

同様に $B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ についても $B(\infty)$ の多面体表示は得られている。

# 3 Construction of polyhedral realization of $B(\lambda)$

ここでは $B(\lambda)$ の多面体表示の一般論と、その具体形を求める。$\mathfrak{g}$ を対称化可能 Kac-Moody 代数とし $B(\lambda)$ の単位元を $u_\lambda$ とする。

**• Morphism of crystals**

ここでは、$B(\lambda)$ の多面体表示の構成に必要なクリスタルの埋めこみを紹介する ([N] 参照)。一元からなるクリスタル $R_\lambda := \{r_\lambda\}$ ($R_\lambda$ のクリスタルの構造は略) に対して以下の埋めこみを得る：

$$\Omega_\lambda : B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes R_\lambda \quad ( u_\lambda \mapsto u_\infty \otimes r_\lambda ).$$

この埋めこみ $\Omega_\lambda$ と柏原の埋めこみ $\Psi_\iota$ を合成し、以下の unique な埋めこみを得る：

$$\begin{array}{ccccc} \Psi_\iota^\lambda : B(\lambda) & \hookrightarrow & B(\infty) \otimes R_\lambda & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda \\ u_\lambda & \mapsto & u_\infty \otimes r_\lambda & \mapsto & (\cdots, 0, 0) \otimes r_\lambda. \end{array}$$

ここで、$\mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda =: \mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ と定める。

**• Crystal structure of $\mathbb{Z}_\iota[\lambda]$**

ここでは、$\mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ 上にクリスタルの構造を構成する ([N] 参照、クリスタルの構造が入った $\mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ を $\mathbb{Z}_\iota[\lambda]$ とかく)。条件 $(A)$ を満たすインデックスの無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定する。$\vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ に対し

$$\begin{aligned} \sigma_k(\vec{x}) &:= x_k + \Sigma_{j>k} \langle h_{i_k}, a_{i_j} \rangle x_j, \\ \sigma_0^{(i)}(\vec{x}) &:= -\langle h_i, \lambda \rangle + \Sigma_{j \geq 1} \langle h_{i_k}, a_{i_j} \rangle x_j \quad (i \in I) \end{aligned}$$

と定める。また、$i \in I$, $k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} \sigma^{(i)}(\vec{x}) &:= max \{ \sigma_k(\vec{x}) \mid \text{ for } k \text{ s.t } i_k = i \}, \\ M^{(i)} &:= \{ k \mid i_k = i, \ \sigma_k(\vec{x}) = \sigma^{(i)}(\vec{x}) \} \end{aligned}$$

と定める。このとき $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の $\vec{x} = (\cdots, x_k, \cdots, x_2, \ x_1) \in \mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ への作用を以下で定める：

$$\tilde{f}_i(\cdots, x_k, \cdots, x_2, \ x_1) = (\cdots, x_k + 1, \cdots, x_2, \ x_1) \text{ where } k = min\ M^{(i)} \text{ if } \sigma^{(i)}(\vec{x}) > \sigma_0^{(i)}(\vec{x}),$$
$$\text{o.w. } \tilde{f}_i(\vec{x}) = 0,$$

$$\tilde{e}_i(\cdots, x_k, \cdots, x_2, \ x_1) = (\cdots, x_k - 1, \cdots, x_2, \ x_1) \text{ where } k = max\ M^{(i)} \text{ if } \sigma^{(i)}(\vec{x}) > 0$$
$$\text{and } \sigma^{(i)}(\vec{x}) \geq \sigma_0^{(i)}(\vec{x}),$$
$$\text{o.w. } \tilde{e}_i(\vec{x}) = 0.$$

また

$$wt(\vec{x}) := \lambda - \Sigma_{j=1}^\infty x_j \alpha_{i_j}, \ \varepsilon_i(\vec{x}) := max\{ \sigma^{(i)}(\vec{x}), \ \sigma_0^{(i)}(\vec{x}) \}, \ \varphi_i(\vec{x}) := \langle h_i, wt(\vec{x}) \rangle + \varepsilon_i(\vec{x})$$

と定めると、$\mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ は $\iota$ に付随したクリスタルの構造をもつことが分かる。
**Remark.** 集合として $\mathbb{Z}_\iota[\lambda]$ と $\mathbb{Z}_\iota$ は等しいが、クリスタルの構造は異なる。

**• Polyhedral realization of $B(\lambda)$**

ここでは、クリスタルの埋めこみの像 $Im\Psi_\iota^\lambda$ ($\cong B(\lambda)$) を記述するために $B(\lambda)$ の多面体表示を構成する ([N] 参照)。条件 $(A)$ を満たすインデックスの無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定し

$$
\begin{aligned}
k^{(+)} &:= min\,\{\, j \mid i_k = i_j \ (k < j)\,\},\\
k^{(-)} &:= max\,\{\, j \mid i_k = i_j \ (k > j)\,\}\ (\text{ただし } k^{(-)} \text{ が存在しない場合は } k^{(-)} = 0\,),\\
\mathbb{Q}^\infty &:= \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^\infty = \{\, \vec{x} = (\cdots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Q},\ x_k = 0\ (k \gg 0)\,\}
\end{aligned}
$$

は、Section 2 と同様のものとする。$\mathbb{Q}^\infty$ 上の線型関数 $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty$) を以下で定める：

$$
\begin{aligned}
\beta_k^{(+)}(\vec{x}) &= x_k + \sum_{k<j<k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j}\rangle x_j + x_{k^{(+)}},\\
\beta_k^{(-)}(\vec{x}) &= \begin{cases} x_{k^{(-)}} + \sum_{k^{(-)}<j<k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j}\rangle x_j + x_k & \text{if } k^{(-)} > 0,\\ -\langle h_{i_k}, \lambda\rangle + \sum_{1\le j<k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j}\rangle x_j + x_k & \text{if } k^{(-)} = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\beta_k^{(+)} = \beta_k,\ \ \beta_k^{(-)} = \beta_{k^{(-)}} \ \text{ if } \ k^{(-)} > 0 \tag{3.1}
$$

に注意する。

この $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = c + \sum_{k\ge1} \varphi_k x_k$ ($c, \varphi_k \in \mathbb{Q}$) に対する区分線型作用素 $S'_k$ を以下で定める：

$$
S'_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k \beta_k^{(+)} & \text{if } \varphi_k > 0,\\ \varphi - \varphi_k \beta_k^{(-)} & \text{if } \varphi_k \le 0. \end{cases} \tag{3.2}
$$

ここで、インデックスの無限列 $\iota$ に対し

$$
\begin{aligned}
\iota^{(j)} &:= min\,\{\, k \mid i_k = j \ (j \in I)\,\},\\
\lambda^{(j)}(\vec{x}) &:= \langle h_{i_k}, \lambda\rangle - \sum_{1\le l<\iota^{(j)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_l}\rangle x_l + x_{\iota^{(j)}}
\end{aligned}
$$

と定め

$$
\begin{aligned}
\Xi'_\iota &:= \{S'_{j_k}\cdots S'_{j_1}\lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I,\ j_1, \cdots, j_k \ge 1\},\\
\Xi_\iota[\lambda] &:= \Xi_\iota \,\cup\, \Xi'_\iota\\
&= \{S'_{j_l}\cdots S'_{j_1}(x_{j_0}) \mid l \ge 0,\ j_0, \cdots, j_l \ge 1\} \cup \{S'_{j_k}\cdots S'_{j_1}\lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I,\ j_1, \cdots, j_k \ge 1\},\\
\Sigma_\iota[\lambda] &:= \{\vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda] \mid \varphi(\vec{x}) \ge 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda]\}
\end{aligned}
$$

と定める。ここで (3.1), (3.2) により条件 $(P)$ を満たす $\iota$ に対しては $\Xi_\iota$ は $B(\infty)$ の多面体表示で定めたものと等しいことに注意する。このとき、以下の定理が成立する：

**Theorem 3.1** **([N])** $(\cdots,0,0)\in\Sigma_\iota[\lambda]$ であるとする。このとき

$$Im\,(\Psi_\iota^\lambda)\,(\cong B(\lambda))=\Sigma_\iota[\lambda].$$

この $\Sigma_\iota[\lambda]$ を $\iota$ に付随する $B(\lambda)$ の多面体表示と呼ぶ。

**Remark.** この Theorem 3.1 より、$B(\lambda)$ の具体形を求めるには $\Xi_\iota[\lambda]$, $\Sigma_\iota[\lambda]$ の具体形を求めればよいことが分かる。

**• <u>Main result II</u>**

Rank 2 一般、古典 $A_n$ 型、アフィン $A_{n-1}^{(1)}$ 型に対する $B(\lambda)$ の多面体表示は [N] で得られている。ここでは、その他の有限型の場合の $\Xi_\iota[\lambda]$, $\Sigma_\iota[\lambda]$ の具体形を求める。

以下 $\mathfrak{g}$ を有限型とする。

$$\begin{aligned}&\iota:=(\cdots,n,\cdots,2,1,\cdots,n,\cdots,2,1),\\&\vec{x}:=(\cdots,x_{j;i},\cdots,x_{2;2},\ x_{2;1},\ x_{1;n},\cdots,x_{1;2},\ x_{1;1})\in\mathbb{Z}_\iota[\lambda]\\&\qquad(\text{ただし }x_{j;i}:=x_{(j-1)n+i},\ \text{また }i\notin[1,n]\text{ のときは }x_{j;i}=0)\end{aligned}$$

は、Section 2 と同様のものとする。ここで

$$\begin{aligned}\Xi_\iota'&:=\{S_{j_k}'\cdots S_{j_1}'\lambda^{(m)}(\vec{x})\mid m\in I,\ j_1,\cdots,j_k\geq 1\},\\\Xi_\iota[\lambda]&:=\Xi_\iota\cup\Xi_\iota'\\&=\{S_{j_l}'\cdots S_{j_1}'(x_{k;1})\mid k\geq 1,\ j_1,\cdots,j_l\geq 1\}\cup\{S_{j_k}'\cdots S_{j_1}'\lambda^{(m)}(\vec{x})\mid m\in I,\ j_1,\cdots,j_k\geq 1\},\\\Sigma_\iota[\lambda]&:=\{\vec{x}\in\mathbb{Z}_\iota[\lambda]\mid\varphi(\vec{x})\geq 0\text{ for any }\varphi\in\Xi_\iota[\lambda]\}\end{aligned}$$

と定めると、Theorem 2.6, Theorem 3.1 から $\Sigma_\iota[\lambda]$ は $B(\lambda)$ の多面体表示となる。

**• <u>$C_n$-case</u>**

ここでは、$C_n$ 型の場合の結果を紹介する。整数列 $\mu:=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l,0,0,\cdots)$ $(l\geq 1,\ \mu_i\in\mathbb{Z})$ に対し、$\mu$ が *admissible pattern* であるとは以下を満たすことである：

$$\mu:\ \text{admissible}\iff\begin{cases}2\ \leq\ \mu_1\ \leq\ n+1,\\1\ \leq\ \mu_k\ \leq\ \mu_{k-1}-1&\text{for }2\leq k\leq l,\\\mu_k\ \geq\ 1\ \Leftrightarrow\ \mu_{k-1}\ \geq\ 3&\text{for }2\leq k\leq l.\end{cases}$$

**Theorem 3.2** **($C_n$-case)** $B(\lambda)$ の多面体表示は以下である：

$$\begin{aligned}&x_{j;i}=0\quad\textit{for}\ \ j,i\notin[1,n],\\&x_{1;i}\geq x_{2;i-1}\geq\cdots\geq x_{i;1}\geq 0\quad\textit{for}\ \ 1\leq i\leq n-1,\\&2x_{j;n}\geq x_{j+1;n-1}\geq\cdots\geq x_{n;j}\geq 0\quad\textit{for}\ \ 1\leq j\leq n,\\&x_{j;n-j+1}\geq x_{j;n-j+2}\geq\cdots\geq 2x_{j;n}\geq 0\ \textit{for}\ \ 2\leq j\leq n\end{aligned}$$

かつ

$$\lambda_i + x_{j\,:\,i-j} - x_{j\,;\,i+1-j} \geq 0 \quad \textit{for} \ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq i,$$
$$\lambda_n + \Sigma_{k=1}^{l}\left(x_{k-2+\mu_k\,;\,n+1-\mu_k} - x_{k-2+\mu_k\,;\,n+2-\mu_k}\right) \geq 0$$

ただし、$\mu := (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, 0, 0, \cdots)$ とし、それぞれの $l = 1, 2, \cdots, n$ に対し $\mu$: *admissible.*

**Example 3.3** (**$C_5$-case**) 多面体表示の $B(\infty)$ に関する部分は Example 2.8 で得られている。その他の部分は以下で得られる：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\geq x_1, \\
\lambda_2 &\geq x_2 - x_1,\ x_6, \\
\lambda_3 &\geq x_3 - x_2,\ x_7 - x_6,\ x_{11}, \\
\lambda_4 &\geq x_4 - x_3,\ \cdots, \\
\lambda_5 &\geq x_5 - x_4,\ -x_5 - x_8 + x_9, \cdots.
\end{aligned}$$

同様に $B_n$, $D_n$, $E_6$, $F_4$ についても $B(\lambda)$ の多面体表示は得られている。今後の課題としては、アフィン型や一般の Kac-Moody 型、また変形量子群の結晶基底の多面体表示を求めることなどが挙げられる。

**Reference**


[H1] Hoshino A, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of Arbitrary Rank 2 Cases, math.QA/0403192.

[H2] Hoshino A, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Finite Quantum Algebras, preprint.

[HN] Hoshino A. and Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of type $A$, to appear in Comm. in Algebra.

[Kac] Kac, V. G., Infinite Dimensional Lie algebras, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[K1] Kashiwara M., On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J.**63** (1991), 465–516.

[K2] Kashiwara M., The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, Duke Math. J.**71** (1993), no.3, 839–858.

[N] Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Integrable Highest Weight Modules, J. Algebra **219** (1999), 571–597.

[NZ] Nakashima T. and Zelevinsky A., Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantized Kac-Moody Algebras, Adv. in Math.**131** (1997), no.1, 253–278.