数理解析研究所講究録 1439 巻 2005 年 221-224

Hypothesis testing for an entangled state produced by spontaneous parametric down conversion

Yoshiyuki Tsuda[1], Bao-Sen Shi[2], Akihisa Tomita[2],
Masahito Hayashi[2], Keiji Matsumoto[2,3] and Yun-Kun Jiang[2]

[1]COE, Chuo University, 1-13-27 Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan.
[2]Imai Quantum Computation and Information Project, ERATO, JST, 5-28-3-201 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan.
[3]National Institute of Informatics, 2-1-2 Hitotsubashi, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8430, Japan.

概要

エンタングルした2光子対を発生する実験においてエンタングルメントの強さに関する仮説検定を効果的に行う方法を考える．測定が光子の同時計数測定に限られている場合，各基底に用いる時間を最適に配分すべきであるが，それは Neyman 配分で与えられる．ただし，この最適解は未知の母数に依存するため，測定を二段階に分けて行い漸近的に Neyman 配分を実現する問題を考える．比較的単純な設定の下で2次のオーダーに注目し最適な測定方法を導出する．また，この方法を実験データへ適用した．

1 はじめに

近年，量子力学的性質を用いて情報処理の古典的限界を打破しようという量子情報の研究が盛んに行われている．特に，物理状態の非古典的相関であるエンタングルメントは量子情報で重要な役割を果たしているため，エンタングルした系の物理的生成法の開発およびその性能評価は重要である．典型的なエンタングルド状態の生成方法として SPDC(Spontaneous Parametric Down Conversion) 法が知られている．これは非線形光学結晶のレーザ励起によりモード間を電磁気的に相互作用させて，異なる方向に飛ぶ2光子をエンタングルさせる方法である．一方，生成された状態のエンタングルメントの強さの検証方法として，直感的議論から導出さ

れた物理量の EW(Entanglement Witness) を測定する方法が知られており ([2, 3]), 実際に光学実験でも光子の同時計数測定 (coincidence counting) を利用して行われている ([1]). しかしこの EW を用いた研究は, エンタングルメント生成法の能力を検証する議論として統計学的に不十分である.

そこで本稿では, SPDC で生成したエンタングルメントの強さを検証するために統計的仮説検定の枠組みを利用する. 検定は光子同時計数測定に基づいて行い, 同時計数測定の時間配分の最適化問題を考え, 最適解を導出する. 最適解は基本的には Neyman 配分によって与えられるが, その最適配分は未知母数に依存してしまうため, 2段階法で漸近的に最適な配分を達成する方法を考える. また, 導出した方法を実験データに適用する.

2節では, SPDC で生成した状態を同時計数測定する状況を古典的モデルで記述し, 仮説検定問題を明示的に与えて Neyman 配分による最適解を示す. 3節では, Neyman 配分が未知母数に依存する欠点を2段階法を用いて回避する方法を述べる. 4節では, 上記の方法を実験データに当てはめる.

2 設定

SPDC は, レーザを非線形光学結晶に照射して偏光がエンタングルした2光子の対を発生させる方法であり, 光子対の平均個数は照射時間に比例する. 測定は, 波長板 (2枚) と偏光板 (2枚) を用いて偏光方向の組を設定し, これを通過した2光子対を2器の光子検出器で検出し, 同時に検出された個数を計数して行う. 測定する偏光方向を測定基底と呼ぶ. 本稿で扱う測定基底は, [4] の結果を適用し, H(水平), V(垂直), D(右上がり斜め), X(右下がり斜め), R(右回転), L(左回転) の組み合わせを用いる.

測定基底を (x, y) とし, t 時間同時計数測定した場合のカウント数を $n_{x,y}$ で表す. $n_{x,y}$ は平均 $\mu_{x,y}t$ の Poisson 分布 $\mathrm{Poi}(\mu_{x,y}t)$ に従う. θ, σ をそれぞれ

$$\theta = \sum_{(x,y)\in A} \mu_{x,y}, \quad \sigma = \sum_{(x,y)\in B} \mu_{x,y},$$
$$\big(A = \{(H,V),(V,H),(D,X),(X,D),(R,R),(L,L)\},$$
$$B = \{(H,H),(V,V),(D,D),(X,X),(R,L),(L,R)\}\big)$$

と定義する. 生成された状態がある最大にエンタングルした状態に近ければ $\theta/(\theta+\sigma)$ は小さくなり, 一致する場合は $\theta/(\theta+\sigma) = 0$ となる. そこで, $\theta+\sigma$ が既知の場合に

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ versus } H_1 : \theta < \theta_0 \tag{1}$$

を検定する問題を考える. ただし, 各測定基底 (x, y) を測る時間 $t_{x,y}$ は自由に選べるが, その和 $t = \sum t_{x,y}$ は予め定められた値に制限する. 従って, θ を検定するための時間配分 $t_{x,y}$ を最適にすることが問題となる.

測定時間 $t_{x,y}$ で A の基底を測定し, 得られた同時計数値 $n_{x,y}$ に基づいて (1) を検定する際に用いる統計量として最も自然なものは

$$\hat{\theta} = \sum_{(x,y)\in A} n_{x,y}/t_{x,y} \tag{2}$$

であり, この場合, 検定量は

$$T = \begin{cases} 0 & \hat{\theta} \geq c \\ 1 & \hat{\theta} < c \end{cases} \tag{3}$$

となる. 検定 T の検出力を最大にするという意味で最適な時間配分は次の Neyman 配分で与えられる.

命題 1 (Neyman 配分) $\eta = \sum_{(x,y)\in A} \sqrt{\mu_{x,y}}$ とする. 測定時間 $t_{x,y}$ が

$$t_{x,y} = \sqrt{\mu_{x,y}}t/\eta$$

のとき T の検出力は最大になる.

しかし, $\mu_{x,y}$ は未知であるから Neyman 配分による最適な検定を行うことはできない. そこで次節では測定を 2 段階に分け, 予備な測定の結果に基づいて主要な測定の時間配分を決めて漸近的に最適な検定を行う方法を求める.

3　2段階法

全測定時間 t を $t = 6t_1 + t_2$ と分解する. 1 段階目は, A の各基底を時間 t_1 で測定し, 得られた測定値 (カウント数) を $m_{x,y}$ $((x,y) \in A)$ で表す. 2 段階目に $(x,y) \in A$ を測定する時間 $\tau_{x,y}$ を

$$\tau_{x,y} = \frac{\sqrt{m_{x,y}}}{\sum_{(z,w)\in A} \sqrt{m_{z,w}}}$$

で定めることにする. t_1 が十分大きい場合, $\tau_{x,y} \to \sqrt{\mu_{x,y}}/\eta$ となり, Neyman 配分に限りなく近づく. 2 段階目の測定で得られた値 $n_{x,y}$ に基づいて (2) の統計量 $\hat{\theta}$ を求め, (3) の検定 T によって仮説 (1) を検定する.

1 段階目の測定時間を $t_1 = \beta t^{\alpha}$ とするとき, α, β をどのようにとれば良いか, という問題を考えると, 次の結果を得る.

定理 1 *(1)* 最適な α と β は次の通り:

$$\alpha = 1/2, \quad \beta = \frac{\sqrt{\nu}}{4\sqrt{6}\eta}.$$

ただし,

$$\nu = \frac{\kappa\theta - 12\eta + \kappa\eta^2}{\eta}, \quad \kappa = \sum_{(x,y)\in A} \mu_{x,y}^{-1/2}.$$

(2) このときの $\hat{\theta}$ の分散は次の通り:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\eta^2}{t} + \frac{\eta\sqrt{6\nu}}{2t^{3/2}} + o(t^{-3/2}).$$

4 実験データへの適用

前節で得た方法を実験データの解析に用いた. $t = 240$ 秒のときに, (i) 時間配分を等分 (t/6 ずつ) にした場合, と, (ii) $t_1 = 1$ 秒として 2 段階法を用いた場合, の 2 通りの解析を行った. その結果, 最大にエンタングルした状態とのフィデリティと呼ばれる量 (0 から 1 までの値をとり, 一致する場合は 1 となる) が 0.75 より小さい, を帰無仮説にした場合, (i) ではこれを棄却できなかったが, (ii) では棄却することができた.

参考文献

[1] Barbieri, M., De Martini, F., Di Nepi, G., Mataloni, P., D'Ariano, G. M., and Macchiavello, C. 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 227901.

[2] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1.

[3] Terhal, B. M. 2000 *Phys. Lett. A* **271** 319.

[4] Tsuda, Y., Matsumoto, K. and Hayashi, M. 2005 quant-ph/0504203.