数理解析研究所講究録 1444巻 2005年 203-208

和算に現れた Villarceau circles

近畿数学史学会　直井　功 (Isao Naoi)
東大寺学園　小寺　裕 (Hiroshi Kotera)

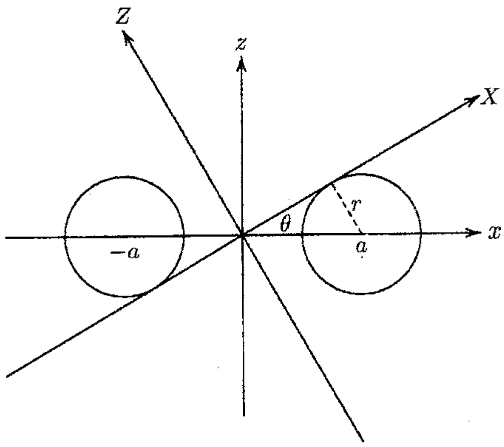
1 Villarceau circles

xyz 座標での torus T の方程式を

$$T:(a-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=r^2\cdots\cdots①$$

とかく．下図のように新たな座標系 $(X,\ Y,\ Z)$ を導入する．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\cdots②$$



② を ① に代入して

$$(a-\sqrt{(X\cos\theta-Z\sin\theta)^2+Y^2})^2+(X\sin\theta+Z\cos\theta)^2=r^2$$

$$(X^2+Y^2+Z^2+a^2-r^2)^2=4a^2\{(X\cos\theta-Z\sin\theta)^2+Y^2\}$$

この torus の XY 平面での切り口を求めるために，$Z=0$ とおくと

$$(X^2+Y^2+a^2-r^2)^2=4a^2(X^2\cos^2\theta+Y^2)$$

$\cos^2\theta=\dfrac{a^2-r^2}{a^2}$ を代入して

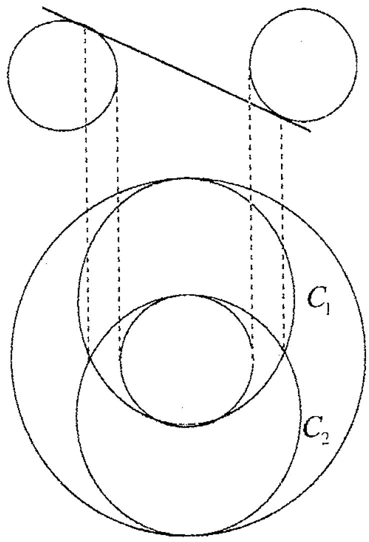
$$(X^2+Y^2+r^2-a^2)^2-4r^2Y^2=0$$

$$\{X^2+(Y-r)^2-a^2\}\{X^2+(Y+r)^2-a^2\}=0$$

よって，torus T の XY 平面での切り口は次の 2 円 C_1, C_2 となる．

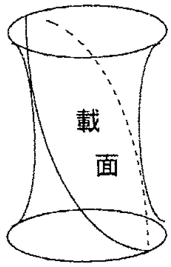
$$C_1 : X^2 + (Y - r)^2 = a^2, \quad C_2 : X^2 + (Y + r)^2 = a^2$$

この 2 円 C_1, C_2 を Villarceau[1]の円 (1848) という．



2　算法求積通考

内田久命編「算法求積通考」(1844) 巻之三第 39 問
今有減弧𣗳如圖斜截之𣗳徑若干高若干問得最少截面積及周術如何
図のような減弧柱 (円柱の側面が円弧になったものでトーラスの孔の部分．円柱の高さと直径が与えられている) を斜めに切るとき，断面積の最小値はいくらか．



一対の子午線に内側から接する平面で切断するするとき (断面積が最小で) その切り口が円になることを次のように説明している．

高さを n 等分する．中径 $= 2r$, 大径 $= 2a$, 小径 = 円柱の直径 とする．　(fig.1)

$$中^2 - \left(\frac{k}{n}高\right)^2 = (中_k)^2 \cdots\cdots ①　\quad (QR = \frac{k}{n}高で \triangle PQRに勾股弦術)$$

$$大 - 中_k = 小_k \cdots\cdots ② \quad (PS = 大径)$$

$$平_k = \frac{k}{n}小 = 天小 \cdots\cdots ③$$

[1]Antoine Joseph Francois Yvon Villarceau(1813-1889), *Comptes rendus*, 1848

とする．$\text{小}_k{}^2 - \text{平}_k{}^2 = \text{弦}_k{}^2$　(fig.2) だから これに ② ③ を代入して

$$(\text{大} - \text{中}_k)^2 - \text{天}^2\text{小}^2 = \text{弦}_k^2$$

$$\text{大}^2 - 2\,\text{大}\cdot\text{中}_k + \text{中}_k^2 - \text{天}^2\text{小}^2 = \text{弦}_k^2$$

① を代入して

$$\text{大}^2 - 2\,\text{大}\cdot\text{中}_k + \text{中}^2 - \text{天}^2\text{高}^2 - \text{天}^2\text{小}^2 = \text{弦}_k^2$$

$\text{高}^2 + \text{小}^2 = \text{弦}^2$ だから

$$\text{大}^2 - 2\,\text{大}\cdot\text{中}_k + \text{中}^2 - \text{天}^2\text{弦}^2 = \text{弦}_k^2$$

$\text{大} : \text{大}_k = \text{中} : \text{中}_k$ すなわち $\text{大}\cdot\text{中}_k = \text{中}\cdot\text{大}_k$ となるように 大_k を定義すると，

$$\text{大}^2 - 2\,\text{中}\cdot\text{大}_k + \text{中}^2 - \text{天}^2\text{弦}^2 = \text{弦}_k^2$$

また $\text{大}^2 - \text{天}^2\text{弦}^2 = \text{大}_k^2$ だから　($\because$ fig.3 で $EF = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k}{n}\text{弦} = \dfrac{1}{2}\text{天弦}$，$\triangle F'GH$ に勾股弦術)

$$\text{大}_k^2 - 2\,\text{中}\cdot\text{大}_k + \text{中}^2 = \text{弦}_k^2$$

$$\therefore\quad \text{弦}_k = \text{大}_k - \text{中}$$

これは 2 矢$_k$ と同じであるので截面半は円弧である．而してその直径は大径である．

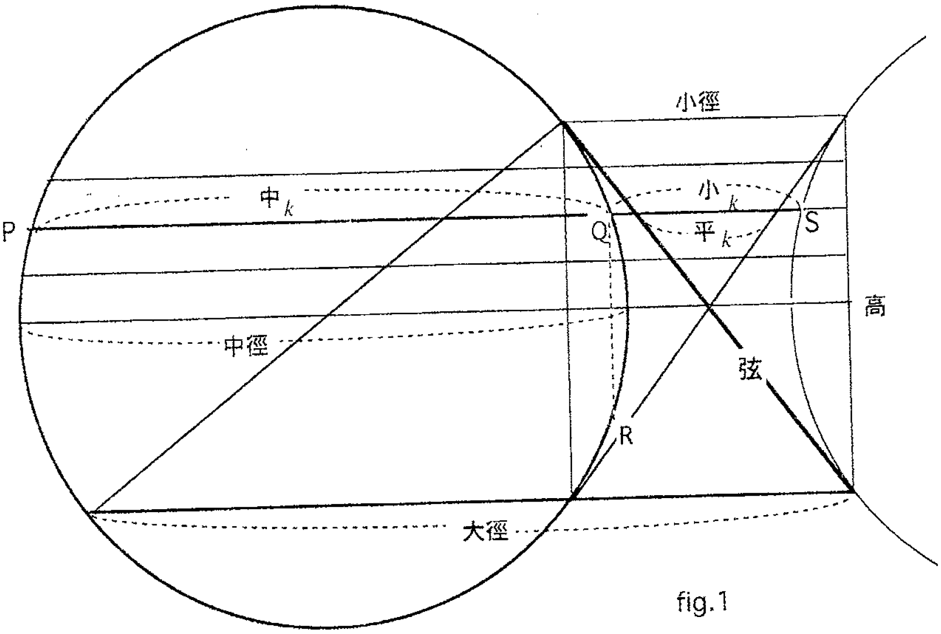


fig.1

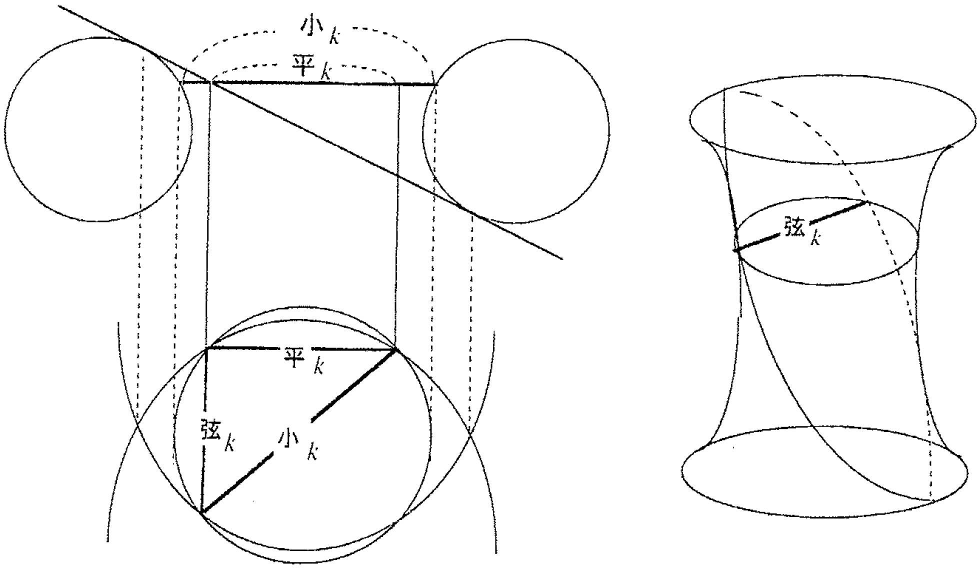


fig.2

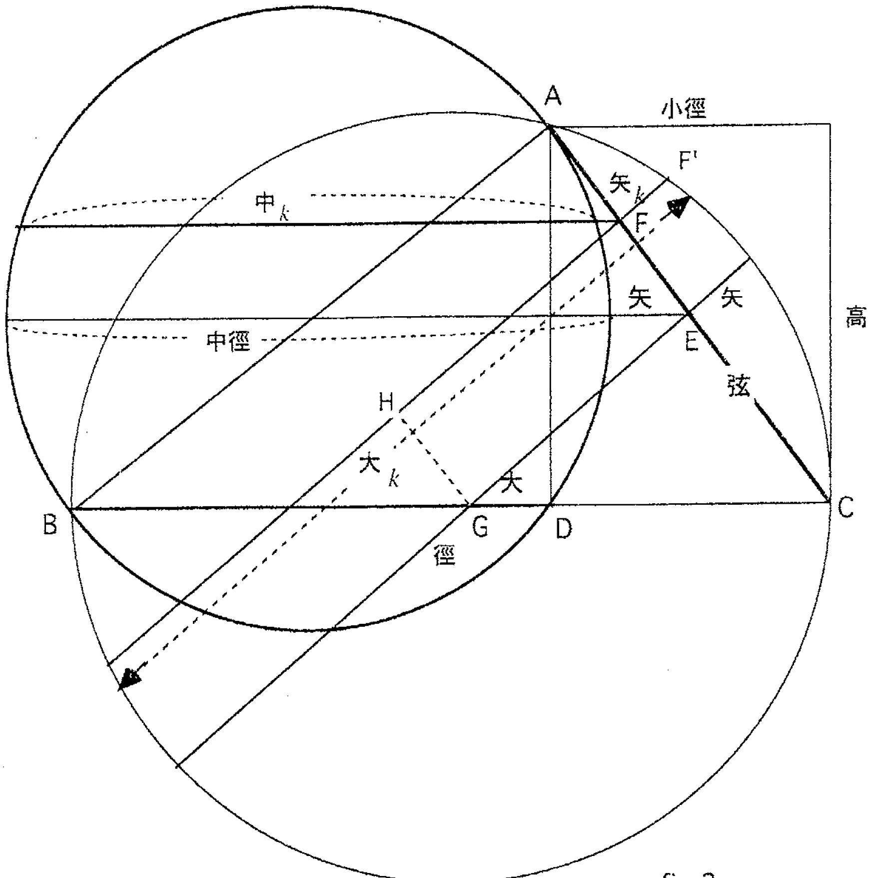


fig.3

3 ルーシェ・コンブルース

ルーシェ・コンブルース の "Traité de Géométrie" (1900) に Villarceau 円 の初等的証明がある.

今接平面 AC による切り口の曲線上の点を X とし，この点を過ぎる緯面の半径を UN とすれば $EX = EN$ となる．この接平面を AC を軸に 90° 回転して X が F' に来たとすると $EF' = EN$ である．F' から AE に下ろした垂線の足を M，WN の延長が AE と交わる点を S，E から WS に下ろした垂線の足を T とする．

$\triangle ETS \sim \triangle WAS$, $MN \parallel EW$ より

$ET : WA = SE : SW = EM : WN = EM : WA$

$$\therefore \quad ET = EM$$

従って $\triangle EF'M \equiv \triangle ENT$

そこで，$KE \perp AE$, $KE = WN = r$ となるように K をとると $\angle KEF' = \angle ENW$ だから

$$\triangle KEF' \equiv \triangle ENW$$

$$\therefore \quad KF' = EW = a$$

よって F' は K を中心に 半径 a の円を描く.

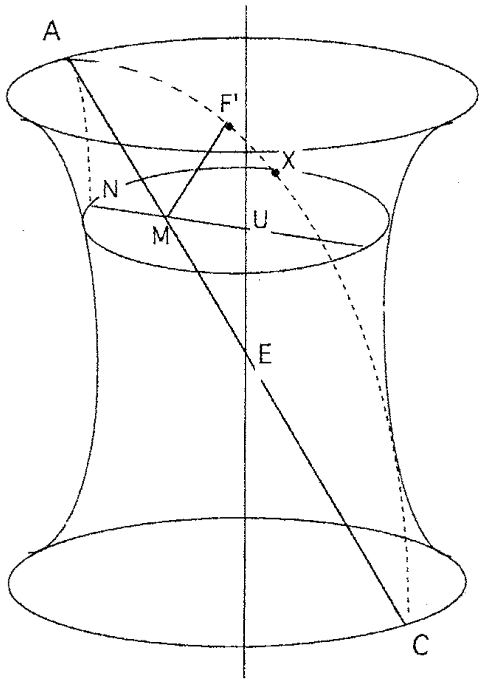


fig.4

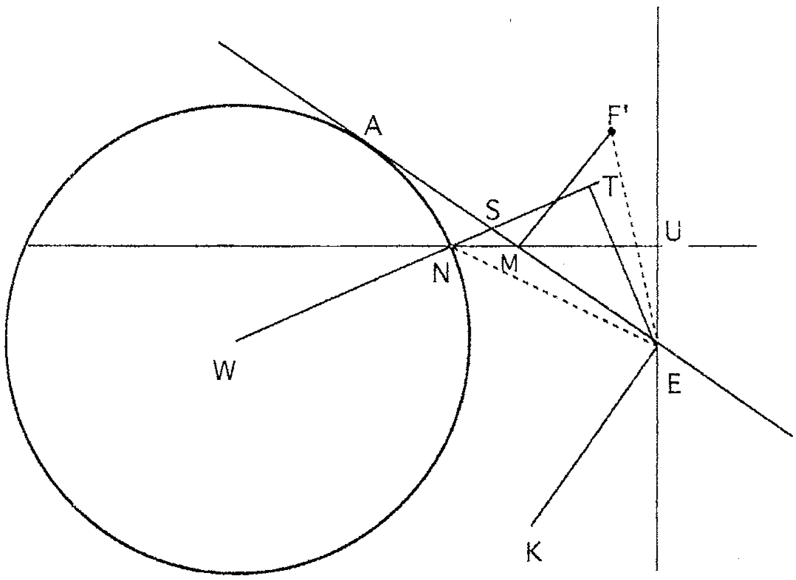


fig.5

4 Villarceau の証明[2]

xyz 座標での torus T の方程式 ① に 断面の方程式 $z = \alpha x \cdots\cdots$ ② を代入すると

$$\left\{(1+\alpha^2)x^2 + y^2 + a^2 - r^2\right\}^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

これを極座標 $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ に変換して,

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2\rho^2\cos^2\varphi - r^2 = 2a\rho$$

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2\rho^2 - 2a\rho - r^2 = \alpha^2\rho^2\sin^2\varphi$$

② が接平面のときは $\alpha = \tan\theta = \dfrac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ を代入して

$$a^2 - r^2 - \rho a = \pm r\rho\sin\varphi$$

これを直行座標に戻すと

$$a^2x^2 + (a^2 - r^2)(y \pm r)^2 = a^2(a^2 - r^2)$$

すなわち楕円

$$\frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{(y \pm r)^2}{a^2} = 1$$

となる. これは求める曲線を xy 平面に projection したものだから断面上の曲線は円である.

参考文献

[1] Z.A. Melzak *Invitation to Geometry* 1983 John Wiley & Sons

[2] M.Berger *Geometry I, II* 1987 Springer-Verlag

[3] 内田久命編 『算法求積通考』 天保 15 年 (1844) 小寺裕蔵

[4] ルーシェ・コンブルース, 小倉金之助訳 初等幾何学 1915 山海堂書店

[5] Y. Villarceau *THEOREME SUR LE TORE* Nouvelles Annales mathematiques 7 , 345-347 , 1848

[2] Y. Villarceau[5] による