数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 157-164

錐上に台をもつ関数のラドン変換*

(Radon transform of a function supported on a cone)

京都大学・数理解析研究所　真野元 (Gen MANO)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University
gmano@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

Let $C := \{x \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\} : Q(x) = 0\}$ be the conical subvariety in $\mathbb{R}^{p+q}$ associated to a quadratic form $Q(x) := x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$. We regard $C_0^\infty(C)$ as a subspace of distributions on $\mathbb{R}^{p+q}$ with compact support contained in C. We study the image of $C_0^\infty(C)$ under the Radon transform R, particularly, with the singularity of $(Rf)(\xi, t)$ at $t = 0$. The differentiability of $(Rf)(\xi, t)$ at $t = 0$ is closely connected to the analysis on the minimal unitary representation of the indefinite orthogonal group $O(p+1, q+1)$.

目次

---

* 京都大学数理解析研究所における研究集会「部分多様体の微分幾何学」(Differential Geometry and Submanifold Theory) 2005 年 6 月 13 日〜6 月 15 日（研究代表者：田丸博士氏）における講演記録

1 主結果

$p, q > 0$ を自然数とし、$x = (x_1, \cdots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ に対して

$$Q(x) := x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

を符号 (p, q) の $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の不定値二次形式とする。この二次形式 Q に対し、$\mathbb{R}^{p+q}$ の部分多様体 C を Q の零点集合

$$C := \{x \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\} : Q(x) = 0\}$$

として定義すると、C は錐になる。$\delta(Q)$ を二次形式 Q に付随する（C 上の台を持つ）デルタ関数とする（[1, Chap. III] 参照)。$p + q > 2$ ならば、$\delta(Q)$ は C 上に台を持つ超関数であり、写像

$$T : C_0^\infty(C) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{p+q}), \quad f \mapsto f\delta(Q)$$

は連続な埋め込み写像になる。ここで、$C_0^\infty(C)$ は C 上コンパクト台を持つ C^∞ 級関数の空間、$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{p+q})$ は、$\mathbb{R}^{p+q}$ 上コンパクト台を持つ超関数の空間を表わす。

さて、$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\}$ に対して、$\mathbb{R}^{p+q}$ 上の線型形式 $\langle \xi, x \rangle$ を

$$\langle \xi, x \rangle := \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_{p+q} x_{p+q}$$

で定め、コンパクト台を持つ超関数 Tf の**ラドン変換**（§2 例 2 参照）

$$R(Tf)(\xi, t) := \int_{\mathbb{R}^{p+q}} (Tf)(x)\delta(t - \langle \xi, x \rangle)dx, \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

を考える（超関数のラドン変換については、例えば [2, 3] を参照)。ただし、$\delta(x)$ は一変数のデルタ関数である。このとき、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ の（t に関する）偏微分可能性を考えよう。$t \neq 0$ なら、任意の $f \in C_0^\infty(C)$ に対して、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ は $(\mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ で C^∞ 級であることが容易にわかる。しかし、$t = 0$ においては、特異性が現われる。次が本稿の主結果である。

定理 A ($\min(p, q) = 1$ **の場合**). **p, q どちらか一方が 1 ならば、ラドン変換 $R(Tf)(\xi, t)$ が $t = 0$ でもはや連続でなくなるような $\xi \in C, f \in C_0^\infty(C)$ が存在する。**

定理 B ($p, q > 1$ **の場合**). **$p, q > 1$ とする。**

1) **ラドン変換** $R(Tf)(\xi, t)$ **は、すべての** $\xi \in C$ **に対して、** $t = 0$ **において** $[\frac{p+q-5}{2}]$ **回偏微分可能である。ただし、** $[\cdot]$ **はガウス記号を表わす。**

2) $t = 0$ **で** $R(Tf)(\xi, t)$ **が**（t **について**）$[\frac{p+q-3}{2}]$ **回偏微分できないような** $\xi \in C, f \in C_0^\infty(C)$ **が存在する。**

定理 A, B の意味を標語的に述べるなら、「**超関数** $\delta(Q)$ **の特異性が、ラドン変換の正則性（微分可能性）に反映する**」と言えるだろう。

2 ラドン変換について

$\mathbb{R}^n$ 上の関数 φ のラドン変換は、$\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$(R\varphi)(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\delta(t - \langle \xi, x \rangle)dx, \tag{2.1}$$

で定義される。デルタ関数 $\delta(x)$ は、$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ で定義される $x = 0$ に台を持つような超関数であるので、式 (2.1) は、大まかに言うなら、$\varphi(x)$ を $L(\xi, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle = t\}$ なる超平面の上で積分する変換である。ω_ξ を $\mathbb{R}^n$ 上の $(n-1)$-形式で、

$$d\langle \xi, x \rangle \wedge \omega_\xi = dx$$

を満たすものとする（ω_ξ は一意には定まらないが、超平面 $L(\xi, t)$ へ制限すれば一意に定まることがわかる）。すると、φ のラドン変換は超関数を使わず微分形式を使って

$$(R\varphi)(\xi, t) = \int_{L(\xi,t)} \varphi\omega_\xi \tag{2.2}$$

と表わすことができる。

例 1（密度関数のラドン変換）

φ を $\mathbb{R}^n$ 上の体積有限の密度関数であるとしよう。$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle < t\}$ なる領域における φ の全体積を $V(\xi, t)$ とおけば、

$$V(\xi, t) = \int_{\langle \xi, x \rangle < t} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)Y(t - \langle \xi, x \rangle)dx$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial t}Y(t - \langle \xi, x \rangle)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\delta(t - \langle \xi, x \rangle)dx = (R\varphi)(\xi, t), \end{aligned}$$

つまり、φ のラドン変換は、体積 $V(\xi,t)$ の変化率に他ならない。ただし、$Y(x)$ は Heaviside 関数

$$Y(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

を表わす。

例 2（式 (1.1) のラドン変換）

超関数 $Tf(x)$ は錐 C 上に台を持つ超関数であるので、式 (1.1) の積分は、本質的に $C \cap L(\xi,t)$ なる $p+q-2$ 次元部分多様体の上での積分になる。(2.2) のように微分形式を用いて書くなら、

$$dQ \wedge d\langle \xi, x\rangle \wedge \omega = dx$$

を満たす $(p+q-2)$-形式 ω によって

$$R(Tf)(\xi,t) = \int_{C\cap L(\xi,t)} f\omega$$

と表わせる（ω は $\mathbb{R}^{p+q}$ 上では一意に決まらないが、制限 $\omega|_{C\cap L(\xi,t)}$ は一意になり、体積要素を定める）。

3 定理 A について

錐 C は、p,q によって位相的性質が異なる。p,q どちらかが 1 ならば、（いまそれを $q=1$ とすると）錐 C は、二つの連結成分

$$C_\pm := \{(x_1,\cdots,x_{p+1}) \in C : x_{p+1} \gtrless 0\}$$

の非連結和として表わせる。

定理 A の ξ, f は、C の非連結性を用いて構成できる。すなわち、$\xi = (1,0,\cdots,0,1)$ とすると、(1.1) の被積分関数の台は、

$$\operatorname{supp}\Big((Tf)(x)\delta(t-\langle\xi,x\rangle)\Big) \subset C_+ \quad t>0 \text{ のとき}$$
$$\operatorname{supp}\Big((Tf)(x)\delta(t-\langle\xi,x\rangle)\Big) \subset C_- \quad t<0 \text{ のとき}$$

であることがわかるので、台が C_+ に含まれるような（正値）C^∞ 級関数 f を取って、

$$\lim_{t\to+0} R(Tf)(\xi,t) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{t\to-0} R(Tf)(\xi,t) = 0$$

を満たすようにすることができる。

定理 B の場合、つまり $p,q>1$ の場合、C は非連結ではなく連結であるので、同じような位相的方法は使えず、解析的方法が必要となる（次節参照)。

4　定理 B について

定理 A の証明は、§3 で説明したように、錐 C の位相的条件を用いることによって行うことができるが、定理 B の証明は、同様の手法が使えない。そこで、特殊関数（**Appell の二変数超幾何関数**）を用いて実際に積分 (1.1) を実行することによって証明を行う。ラドン変換 $R(Tf)(\xi,t)$ の t に関する j 回偏微分 $\frac{\partial^j}{\partial t^j}R(Tf)(\xi,t)$ の $t=0$ における振る舞いは、

$$(1-|t|)^{\frac{p+q-2}{2}-j}F_3\Big(\frac{p-1}{2},\frac{q-1}{2},-\frac{p-3}{2},-\frac{q-3}{2},\frac{p+q-2}{2}-j;1-|t|,1-|t|\Big)$$

と本質的に同じであることがわかるので、$t=0$ におけるラドン変換 $R(Tf)(\xi,t)$ の漸近挙動は、特殊関数の漸近展開によって精密に調べることができる。

この計算によって、p,q の偶奇にしたがって、ラドン変換の振る舞いが異なることがわかる。すなわち、$j=0,1,\cdots,[\frac{p+q-5}{2}]$ なら $t=0$ で連続であるが、$j=[\frac{p+q-3}{2}]$ なら、

p,q **どちらか偶数のとき**：$t\to 0$ で発散するので、$t=0$ で不連続、

p,q **どちらも奇数のとき**：

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial^{[\frac{p+q-3}{2}]}}{\partial t^{[\frac{p+q-3}{2}]}}R(Tf)(\xi,t),\quad \lim_{t\to-0}\frac{\partial^{[\frac{p+q-3}{2}]}}{\partial t^{[\frac{p+q-3}{2}]}}R(Tf)(\xi,t)$$

は存在するが、

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial^{[\frac{p+q-3}{2}]}}{\partial t^{[\frac{p+q-3}{2}]}}R(Tf)(\xi,t)=-\lim_{t\to-0}\frac{\partial^{[\frac{p+q-3}{2}]}}{\partial t^{[\frac{p+q-3}{2}]}}R(Tf)(\xi,t)\neq 0$$

であるので、$t=0$ では不連続であることが明らかになる。

5　表現論的背景

定理の表現論的背景について触れておこう。§1 の自然数の組 p,q について、$p+q$ が 6 以上の偶数であるとする。

$$w_0:=\begin{pmatrix} I_{p+1} & 0 \\ 0 & -I_{q+1}\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

として、不定値直交群を

$$G := O(p+1, q+1) = \{g \in GL(p+q+2, \mathbb{R}) : {}^t g w_0 g = w_0\}.$$

として定義される行列群とすると、G の**極小表現**と呼ばれるユニタリ表現 π がヒルベルト空間 $L^2(C, d\mu)$ 上に実現される（ただし、$d\mu$ は、$O(p,q)$ 不変な C 上の測度である）。$O(p+1, q+1)$ の極小表現は、90 年代に Kostant, Binegar-Zierau, Huang-Zhu, Kobayashi-Ørsted になどによって研究されてきたが、[9] で $L^2(C, d\mu)$ 上への実現（L^2-**モデル**）が行われた（[4] も参照）。この L^2-モデルでは、ユニタリ内積が L^2-内積と一致する点が非常にはっきりしていてわかりやすい反面、群の作用については、極大放物型部分群 P の作用までしか具体的にわかっていなかった（作用は掛け算作用素と底空間 C への作用の引き戻しによって表わされる）。そこで、群全体の作用を書き下すことが問題として起こってくる。このとき、w_0 は P の「反転」元と呼ばれる元で、P と w_0 によって群 G が生成されることがわかるので、$\pi(w_0)$ を、積分変換

$$\pi(w_0) f(\xi) = \int_C K(\xi, x) f(x) d\mu(x) \tag{5.2}$$

で表わし、核関数 $K(\xi, x)$ を具体的に決定することを考える。

この問題の解答は [5] で述べる（[7, 8] も参照）。核関数は、

$$\Phi_{p,q}(t) := \begin{cases} t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} J_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) \quad \min(p,q) = 1 \text{ のとき} \\ t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} Y_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) + \frac{2(-1)^{\frac{p+q-2}{2}}}{\pi} t_-^{-\frac{p+q-4}{4}} K_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_-}) \\ \qquad p, q > 1 \text{ かつどちらも偶数のとき} \\ t_+^{-\frac{p+q-4}{4}} J_{\frac{p+q-4}{2}}(2\sqrt{t_+}) - \sum_{l=0}^{\frac{p+q-6}{2}} \frac{(-1)^l}{\Gamma(\frac{p+q-4}{2} - l)} \delta^{(l)}(t) \\ \qquad p, q > 1 \text{ かつどちらも奇数のとき} \end{cases} \tag{5.3}$$

を用いて、

$$K(\xi, x) \equiv K(p, q; \xi, x) := c_{p,q} \Phi_{p,q}(\langle \xi, x \rangle) \quad (\xi, x \in C) \tag{5.4}$$

$$c_{p,q} := \frac{(-1)^{\frac{p(p+3)}{2}}}{2^{\frac{p+q}{4}} \pi^{\frac{p+q-2}{2}}}$$

と表わすことができる。ただし、$J_\nu(z)$ はベッセル関数、$Y_\nu(z), K_\nu(z)$ は変形ベッセル関数である。

6 ラドン変換と表現論の関係

核関数が内積を変数とする一変数関数で表わせることから、(5.2) の右辺の積分は、ラドン変換を使って、

$$
\begin{aligned}
c_{p,q}\int_C \Phi_{p,q}(\langle \xi, x\rangle) f(x)d\mu(x) =& c_{p,q}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \Phi_{p,q}(t)R(Tf)(\xi,t)dt \\
=& c_{p,q}\langle \Phi_{p,q}, R(Tf)(\xi,\cdot)\rangle
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

と表わすことができる。ここで、$\Phi_{p,q}(t)$ は、定義式 (5.3) より、特異点を原点で持つ超関数である。$O(p+1,q+1)$ の極小表現 π の理論から、(6.1) のペアリングは well-defined であることがわかるので、$R(Tf)(\xi,t)$ は $t=0$ において少なくとも $\frac{p+q-6}{2}$ 回微分可能であることがわかる。しかし、定理 B(2) は、**実は** $[\frac{p+q-5}{2}] = \frac{p+q-6}{2}$ **回が、偏微分可能なぎりぎりの回数である**ことを主張している。なお、定理 B (1), (2) 両方とも、**表現論を全く用いずに**証明することができる。

式 (6.1) は、積分微分変換 (5.2) を平面波分解した式とみなすことができる（下記の注意参照)。

注意 G の極小表現の L^2-モデルに関して、古くから研究されている場合であるメタプレクティック群 $G' := \widetilde{Sp}(n,\mathbb{R})$（シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ の二重被覆群）の Segal-Shale-Weil 表現の Schrödinger モデル $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^n))$ において、式 (6.1) に相当するものを付記しておく。G' は Siegel 放物型部分群 P_{Siegel} と「反転」元

$$
w_0' := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}
$$

によって生成されるが、P_{Siegel} の作用は掛け算作用素と底空間 $\mathbb{R}^n$ への作用によって表わされ、$\varpi(w_0')$ はフーリエ変換、すなわち

$$
\varpi(w_0')f(\xi) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, x\rangle} f(x)dx \tag{6.2}
$$

として $L^2(\mathbb{R}^n)$ に作用している。よって、(6.2) の右辺の積分は、ラドン変換を用いて、

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)Rf(\xi,t)dt = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\langle \Phi, (Rf)(\xi,\cdot)\rangle \\
&\Phi(t) := e^{\sqrt{-1}t}
\end{aligned}
$$

と表わされる。これは、フーリエ変換の**平面波分解**と呼ばれるものである。この意味で、式 (6.1) は、積分微分変換 (5.2) を平面波分解した式とみなせる。

参考文献

[1] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized Functions*, **I**, Academic Press, New York and London, 1964.

[2] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, **V**, Academic Press, New York and London, 1966.

[3] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, New York and London, 1984.

[4] 小林俊行, $O(p,q)$ の極小ユニタリ表現のシュレディンガーモデル, 数理解析研究所講究録 1342（短期共同研究　「IV 型対称空間上の保型形式の研究」(ed. 織田孝幸氏)）(2003), 107–116.

[5] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formula of the inversion for the minimal representation of $O(p,q)$, *in preparation*

[6] T. Kobayashi and G. Mano, Radon transform of a function supported on a cone, *in preparation*

[7] 小林俊行・真野元, $O(p,2)$ の極小表現と反転の積分表示, 数理解析研究所講究録 1410（「表現論および等質空間上の調和解析」(ed. 井上順子氏)）(2005), 173–187.

[8] 小林俊行・真野元, $O(p,q)$ の極小表現の反転を与える積分作用素（京都大学数理解析研究所における研究集会「群の表現と調和解析の広がり」(ed. 河添健氏) の講究録に収録予定)

[9] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$ III. Ultrahyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, *Adv. Math.* **180** (2003), 551–595