数理解析研究所講究録
1478巻 2006年 15-23

ある種の代数方程式が$C(X)$で可解となるコンパクトHausdorff空間Xについて

新潟大学・自然科学研究科　D1　本間　大 (Dai Honma)
Department of Mathematical Science
Graduate School of Science and Technology
Niigata University

1 背景

$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{C}$ でそれぞれ正整数, 整数, 複素数を表す. X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を sup norm $\|\cdot\|_{\infty}$ による X 上の複素数値連続関数全体が成す Banach 環とする.

定理 1.1 (Čirka [2]) 局所連結コンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の関数環 A において, 各 $f\in A$ に対し $f=g^{2}$ なる $g\in A$ が対応するとき, $A=C(X)$ である.

複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円周 S^{1} 上のいかなる連続関数の 2 乗も S^{1} 上の恒等関数とは一致しないことからわかるように定理 A の逆は必ずしも成立しない. 各 $f\in C(X)$ に対し, $f=g^{2}$ となる $g\in C(X)$ が対応するとき, $C(X)$ は平方根に関して閉じている, という. Hatori-Miura[8, Theorem 2.2] は X が局所連結であるような $C(X)$ が平方根に関して閉じているための特徴づけをした. この結果によれば $C(X)$ が平方根に関して閉じているための必要十分条件は X の被覆次元が 1 以下であり, かつ整数係数の 1 次の Čech コホモロジー群が自明となることである.

$P(x,z)$ を $C(X)$ 上の monic 多項式, すなわち正整数 n と $a_{0},a_{1},\ldots,a_{n-1}\in C(X)$ が存在し $P(x,z)=z^{n}+a_{n-1}(x)z^{n-1}+\cdots+a_{1}(x)z+a_{0}(x)$, とする. $C(X)$ 上のすべての monic 多項式 $P(x,z)$ について $P(x,f(x))=0\,(x\in X)$ なる $f\in C(X)$ が存在するとき, $C(X)$ は代数的に閉じている, という. 定義から, $C(X)$ が代数的に閉じているならば $C(X)$ は平方根に関しても閉じている. Deckard-Pearcy[4] は X が Stonian 空間, すなわち完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間, ならば $C(X)$ は代数的に閉じていることを示した. 彼らはまた X が関数 $y=\sin 1/x,(0\leq x\leq 1)$ のグラフの閉包であるとき, ある $f\in C(X)$ に対していかなる $g\in C(X)$ についても $f\neq g^{2}$ となることを示した. Countryman[3] は第 1 可算公理を満たす

X について $C(X)$ が代数的に閉じているための幾つかの必要十分条件を与えた. この結果の中で $C(X)$ は平方根に関して閉じているとき, またそのときに限り $C(X)$ は代数的に閉じており, さらにそれは X が hereditarily unicoherent かつ almost locally connected あるという条件とも同値となっている. Miura-Niijima[14] は局所連結 compact Hausdorff 空間 X について $C(X)$ が代数的に閉じているための幾つかの必要十分条件を与えた.

Gorin-Karahanjan[7] は上のČirka の結果 (定理 A) を次のように一般化した: 局所連結コンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環 A において, 各 $f \in A$ に対し $f = g^p$ なる $g \in A$ と $p \in \mathbb{N}\,(p \geq 2)$ が存在するとき, $A = C(X)$ である. さらに Karahanjan(cf. [11, Theorem 1]) は関数環に対する上の条件を次のように弱めても $A = C(X)$ が得られることを示した:

定理 1.2 (Karahanjan [11]) *局所連結コンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環 A において, A が以下の性質を有するとき, $A = C(X)$ である.*

(*) 各 $f \in A$ について $f^q = g^p$ を満たす $g \in A$ と $p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$ が存在する.

本稿では局所連結コンパクト Hausdorff 空間 X について $C(X)$ が性質 (*) を有するための必要十分条件について得られた結果を述べる. またこの結果の系として, X が局所連結であるかあるいは第 1 可算公理を満たすならば, $C(X)$ が性質 (*) を有することと $C(X)$ が代数的に閉じていることが同値であることを示す; この場合 $C(X)$ についての性質 (*) と平方根に関する閉性も同値となる.

2 準備

結果を述べる前に幾つか記号と言葉の準備をする.

定義 2.1 (hereditarily unicoherent) 位相空間 T が *hereditarily unicoherent* であるとは, T の任意の連結閉集合 M, N に対して, その共通部分 $M \cap N$ が連結になることをいう.

例 2.2 単位閉区間 $[0, 1]$ は *hereditarily unicoherent.*

例 2.3 単位円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ は *hereditarily unicoherent* でない.

定義 2.4 (被覆次元) 位相空間 T に対してその被覆次元 $\dim T$ が n 以下であるとは, T の任意の有限開被覆 $\mathfrak{A}$ に対して, ある $\mathfrak{A}$ の細分 $\mathfrak{B}$ が存在し, どの T の点 x も $\mathfrak{B}$ の高々$(n+1)$ 個の集合に含まれることをいう. $\dim T \leq n$ かつ $\dim T \not\leq n-1$ のとき $\dim T = n$ とする.

例 2.5 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Čech コホモロジーに関して. $C(X)^{-1}$ を積に関して可逆な $C(X)$ の関数全体から成る群とし, $\exp C(X) = \{e^f : f \in C(X)\}$ とする. Arens-Royden の定理 (cf.[6]) から, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ と $C(X)^{-1}/\exp C(X)$ は群として同型である. したがって, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ が自明な群であることは $C(X)^{-1} = \exp C(X)$ と同値である.

定義 2.6 (almost locally connected) 位相空間 T が *almost locally connected* であるとは, T が次の条件を満たす互いに素な連結閉集合族 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含まないことである:

(1) C_k は $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ の閉包における開集合 ($k \in \mathbb{N}$).

(2) $\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *s.t.* $x_n, y_n \in C_n (n \in \mathbb{N})$, $\{x_n\}, \{y_n\}$ は互いに異なる点に収束する.

例 2.7 T_1 を $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n\} \times [0, 1/n]$ の閉包とすると, T_1 は *almost locally connected.*

例 2.8 T_2 を $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n\} \times [0, 1]$ の閉包とすると, T_2 は *almost locally connected* でない.

3 主結果

X が局所連結であるとき, 性質 $(*)$ を持つ $C(X)$ は X により次のように特徴付けられる.

定理 3.1 X が局所連結であるとき、以下は互いに同値である.

(1) 各 $f \in C(X)$ について $f^q = g^p$ を満たす $g \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$ が存在する.

(2) X は *hereditarily unicoherent.*

(3) $\dim X \leq 1$, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明な群 .

(4) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $\{f^n : f \in C(X)\}$ は $C(X)$ で稠密.

(5) すべての $f \in C(X)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $f = g^n$ を満たす $g \in C(X)$ が存在する.

以下で定理 3.1 の証明の概要を述べるがそこで次の補題を用いる:

補題 3.2 ([9]) X を局所連結コンパクト *Hausdorff* 空間とし, $p \in \mathbb{N}\,(p \geq 2)$ とする. このとき $\{{f_n}^p\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ が $f \in C(X)$ に一様収束するならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で一様 *Cauchy* 列であるものが存在する.

定理 3.1 の証明の概要

(1) ⇒ (2): 対偶を示す. X が hereditarily unicoherent でないとすると, 定義から X の連結閉集合 M, N でその共通部分 $M \cap N$ が不連結となるものが存在する. したがって, 空でない閉集合 A, B で $M \cap N = A \cup B$, $A \cap B \neq \emptyset$ なるものがとれる. f を X から単位閉区間 $[0,1]$ への連続関数で, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$ なるものとする. このとき

$$h(x) = \begin{cases} \exp(i\pi f(x)) & x \in M \\ \exp(-i\pi f(x)) & x \in N \setminus M. \end{cases}$$

とおくと, h は $M \cup N$ 上連続となる. ここで, $\tilde{h}|_{M\cup N} = h$ なる $\tilde{h} \in C(X)$ をとる. するとこの $\tilde{h}$ に対していかなる $g \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$ についても $\tilde{h}^q \neq g^p$ なることが分かる.

(2) ⇒ (3): これは [14] において間接的に示されていた. 最近, 直接証明を与えた ([9]) ので参照のこと.

(3) ⇒ (4): $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明な群とする. $p \in \mathbb{N}$ と $f \in C(X)$ を任意にとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - g^p\|_\infty < \varepsilon$ を満たす $g \in C(X)$ がとれることを示す. $\|f\|_\infty \leq 1$ として一般性を失わないのでそうする. $k \in \mathbb{N}$ を $2^p/\varepsilon^p < k$ を満たすようにとる. このとき,

$$E_k = \left\{ x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

とおく. $\dim X \leq 1$ より, $u = f$ on E_k を満たす $u \in C(X)^{-1}$ が存在する. すると, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明な群であるから Arens-Royden の定理から, $u = v^p$ を満たす $v \in \exp C(X)$ がとれる. ここで関数 g, h を次のように定める:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt[p]{|f(x)|}\, v(x)}{|v(x)|} \qquad (x \in X), \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x)}{g(x)^{p-1}} & f(x) \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

すると $g, h \in C(X)$, $\|g\|_\infty \leq 1$ かつ $f = g^{p-1}h$. さらに $\|g - h\|_\infty < \varepsilon$ であることが容易に確かめられる. このことから

$$\|f - g^p\|_\infty = \|g^{p-1}h - g^p\|_\infty \leq \|g^{p-1}\|_\infty \|h - g\|_\infty < \varepsilon$$

となり求める結果を得る.

(4) ⇒ (5): $\{g^p : g \in C(X)\}$ はすべての $p \in \mathbb{N}$ について $C(X)$ で稠密であるとする. $f \in C(X)$ と $p \in \mathbb{N}$ を任意にとる. すると仮定から ${g_n}^p$ が f に収束する列 $\{g_n\}$ がとれる. こ

のとき補題3.2から$\{g_n\}$の部分列$\{g_{n_j}\}$でCauchy列であるものがとれる. $C(X)$は完備だから, g_{n_j}の収束先をgとすれば$f = g^p$となる.

(5) $\Rightarrow$ (1): 定義より明らか.

注意 1. 定理3.1においてXの局所連結性を用いるのは, (2) $\Rightarrow$ (3) と (4) $\Rightarrow$ (5)(補題3.2) である. (1) $\Rightarrow$ (2) はXに局所連結性を仮定せずとも成立するので, 一般のコンパクトHausdorff空間Xについて, Xがhereditarily unicoherentであることは, $C(X)$が定理3.1における性質(1)をもつための必要条件である.

注意 2. 次の2つの条件を考える.

(4') ある$p \in \mathbb{N}\,(p \geq 2)$について$\{g^p : g \in C(X)\}$は$C(X)$で稠密.

(5') 次の性質をもつ$p \in \mathbb{N}\,(p \geq 2)$が存在する: 各$f \in C(X)$に対して$f = g^p$なる$g \in C(X)$がとれる.

このとき, 定理3.1の条件(5)について(5) $\Rightarrow$ (5$'$) $\Rightarrow$ (4$'$)は明らかである. 仮にXが局所連結ならば, 補題3.2から(5')はすべての$f \in C(X)$が他のp乗で表せることを示している. したがって(4$'$) $\Rightarrow$ (5$'$)を得る. 結果的に, Xが局所連結ならば(4')と(5')は定理3.1の(1)から(5)までの条件と同値であることが分かる. Kawamura-Miura[10, Theorem 1.3]は被覆次元が1以下のコンパクトHausdorff空間Xについて, 上の条件(4')は$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$が$p$-divisibleであることと同値であることを示した.

4 系

以下ではXが局所連結であるかあるいは第1可算公理を満たすとき, 定理3.1の性質(1)と代数的閉性, 及び平方根に関する閉性との関係についての系を述べる.

系 4.1 Xが局所連結であるとき、以下は互いに同値である.

(1) 各$f \in C(X)$について$f^q = g^p$を満たす$g \in C(X)$と$p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$が存在する.

(2) Xは*hereditarily unicoherent.*

(3) $\dim X \leq 1$かつ$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$は自明.

(4) すべての$n \in \mathbb{N}$について$\{f^n : f \in C(X)\}$は$C(X)$で稠密.

(5) すべての $f \in C(X)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $f = g^n$ を満たす $g \in C(X)$ が存在する.

(6) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(7) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

系 4.2 X が第1可算公理を満たすとき、以下は互いに同値である.

(1) 各 $f \in C(X)$ について $f^q = g^p$ を満たす $g \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$ が存在する.

(2) X は *almost locally connected* かつ *hereditarily unicoherent.*

(3) X は *almost locally connected* であり, $\dim X \leq 1$, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明.

(4) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(5) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

これらの系を示すために以下の結果を必要とする.

定理 4.3 ([14]) X が局所連結であるとき以下は互いに同値である.

(1) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(2) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

(3) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明.

(4) X は *hereditarily unicoherent.*

定理 4.4 ([3], [14]) X が第1可算公理を満たすとき以下は互いに同値である.

(1) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(2) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

(3) X は *almost locally connected* かつ *hereditarily unicoherent.*

(4) X は *almost locally connected* であり, X の任意の連結成分 X_λ に対して X_λ は局所連結であり, $\dim X_\lambda \leq 1$, $\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z})$ は自明.

以下の補題4.5と補題4.6は知られた結果 (cf. [12, Chap.VIII §57, Section I Theorem 8] 及び [12, Chap.VIII §46, Section XI Theorem 2]) であるが [9] ではその別証を与えた.

補題 4.5 X を局所連結とは限らないコンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき以下は同値．

(1) $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明．

(2) X の各連結成分 X_λ について，$\check{H}^1(X_\lambda,\mathbb{Z})$ は自明．

補題 4.6 X を局所連結とは限らないコンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき以下は同値．

(1) $\dim X \leq 1$.

(2) X の各連結成分 X_λ について，$\dim X_\lambda \leq 1$.

系 4.1 の証明 定理 3.1 と 定理 4.3 から明らか．

系 4.2 の証明の概要(2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5): 定理 4.4 より明らか．

(1) $\Rightarrow$ (2): $C(X)$ は性質 (1) をもつとする．このとき**注意 1** から X は hereditarily unicoherent であることがわかる．よって $C(X)$ が性質 (1) をもつとき，X は almost locally connected であることを示せば良い．これの対偶を示す．X は almost locally connected でないとする．定義より X は以下の性質をもつ互いに素な連結閉集合族 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含む: 各 C_n は $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n}$ における開集合で，$x_n, y_n \in C_n$ を満たす列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で互いに異なる点に収束するものが存在する．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束先をそれぞれ x_0, y_0 とする．$F = \cup_{n\in\mathbb{N}}C_n$ とおく．X はコンパクト Hausdorff 空間だから，x_0, y_0 の開近傍 A, B で $\bar{A}\cap\bar{B}=\emptyset$ なるものが存在する．f を X から閉区間 $[-1,1]$ への連続関数で $f(\bar{A})=1, f(\bar{B})=-1$ をみたすものとする．このとき関数 h を次のように定める:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + \dfrac{i}{n}\left(1 - f^2(x)\right) & x \in C_n;\ n\ \text{は偶数} \\ f(x) - \dfrac{i}{n}\left(1 - f^2(x)\right) & x \in C_n;\ n\ \text{は奇数} \\ f(x) & x \in \bar{F}\setminus F. \end{cases}$$

すると，$h \in C(\bar{F})$. $\tilde{h} \in C(X)$ を $\tilde{h}|_{\bar{F}} = h$ を満たすものとする．するとこの関数 $\tilde{h}$ に対していかなる $g \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}\,(q/p \notin \mathbb{N})$ も $\tilde{h}^q \neq g^p$ なることが分かる．

(5) $\Rightarrow$ (1): 定義より明らか．

最後に系 4.2 の (3)(以下 ♣) と 定理 4.4 の (4)(以下 ♠) が同値であることを示す．

(♣) $\Rightarrow$ (♠): 補題 4.5 と補題 4.6 から直ちにわかる．

(♠) ⇒ (♣): [3, Proof of Theorem 2.5] から, X の各連結成分 X_λ は局所連結であることが分かる. このことと補題 4.5 と補題 4.6 から求める結果を得る.

注意 3. 系 4.1 と 系 4.2 から X が局所連結であるかもしくは第一可算公理を満たすとき, $C(X)$ が定理 3.1 の性質 (1) をもつことと, $C(X)$ が代数的に閉じていること, さらに $C(X)$ が平方根に関して閉じていることが互いに同値であることが分かる.

注意 4. 系 4.2 の証明 (1) ⇒ (2) において, $C(X)$ が定理 3.1 の性質 (1) をもつとき, X は almost locally connected であることを示したが, これは X に第一可算公理を仮定せずとも成立する. したがって, 一般にコンパクト Hausdorff 空間 X に対して X が almost locally connected であることは $C(X)$ が定理 3.1 の性質 (1) をもつための必要条件である.

参考文献

[1] R. B. Burckel , *Characterizations of $C(X)$ among its subalgebras*, Marcel Decker , N. Y. 1972.

[2] E. M. Čirka, *Approximation of continuous functions by functions holomorphic on Jordan arcs in $\mathbb{C}^n$*, Soviet Math. **7** (1966), 336–338.

[3] R. S. Countryman Jr., *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math. **20** (1967), 433–448.

[4] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322–328.

[5] D. Deckard and C. Pearcy, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 259–263.

[6] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, N.J.1969.

[7] E. A. Gorin and M. I. Karahanjan, *Some certain characteristic properties of the algebra of all continuous functions on a locally connected compactum*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. **11** (1976), 237–255.

[8] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1185–1189.

[9] D. Honma and T. Miura, *On a characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equations are solvable in $C(X)$*, preprint.

[10] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, preprint.

[11] M. I. Karahanjan, *On some algebraic characteristics of the algebra of all continuous functions on a locally connected compactum*, Math. USSR-Sb. **35** (1979), 681–696.

[12] K. Kuratowski, *Topology* vol.II, 1968 Academic Press, New York and London.

[13] T. Miura, *On commutative C^*-algebras in which every element is almost the square of another*, Contemp. Math., **232** (1999), 239–242.

[14] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras.*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2869–2876.

[15] K. Morita, *Dimension of general topological spaces, Surveys in general topology* (G. M. Reed ed.) Academic Press N.Y.1980.