

温度勾配のある管の中を伝播する衝撃波に及ぼす熱音響効果

阪大院 基礎工 出口 慎 (Shin DEGUCHI)
杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

1 はじめに

温度が空間的に非一様な気体の中の衝撃波の伝播については、航空工学や宇宙物理の問題に端を発し、これまで高温気体力学やプラズマ物理学の分野で研究が行われてきた。密度が一般に非一様な気体中の弱い衝撃波の研究は、古くは Chisnell[1], Whitham[2], Sakurai[3], Bird[4] らによって解析的に行われている。こうした研究では衝撃波を最初から想定し、その伝播に及ぼす非一様性の影響が議論されている。

最近ではソノルミネッセンスのメカニズムの解明に向け、気泡そのものの内部でのエントロピーの勾配を考慮した、衝撃波の形成や伝播の問題が Lin & Szeri[5] によって研究されている。また、電離が弱いプラズマ中での衝撃波形成における定量的な予測に向け、Soukhomlinov ら [6] は中性気体における温度勾配の効果を議論している。これに対し、我々は熱音響現象の観点から温度勾配のある管の中の非線形波の伝播における衝撃波の形成に関心をもっている。固体壁との熱のやりとりにより生じる熱音響現象では、境界層が本質的な役割を演じるが、これまで実験では衝撃波の発生は報告されていない。この理由は、発生する音圧が比較的小さいからと想像されるが、果たしてそれだけであろうか？ そこで本報告では、壁面での摩擦による履歴効果が衝撃波の形成やその後の伝播にどのような影響を与えるのかを調べる。

温度の非一様性を考慮する際には、その代表長さを明確にする必要がある。ここでは、その長さは波の代表的な波長に比べれば十分長いとし、温度勾配の一階微分項は考慮するが、2階以上の微分項は無視できる場合を考える。この近似の下、杉本と辻本 [7] は管の中を一方方向に伝播する弱非線形波の遠方場の伝播を記述する方程式を導出している。なお、Soukhomlinov ら [6] の研究では、非一様性の代表長さが曖昧で、温度勾配の効果（1階微分項）は実質的には考慮されておらず、第2節で示す式 (1) の右辺に相当する項は彼らの式 (2.6) にはなく、特に管壁効果に起因しない第3項目がない。

しかし彼らの解析結果は次のことを示している。温度勾配が正である場合に衝撃波が形成されるには、勾配がないときに比べ長い距離を要し、一方負の温度勾配に対しては短い距離で形成される。この結果は既に論文 [7] で明確に示されており、圧力は温度の $1/4$ 乗に逆比例して減少する一方、流速は $1/4$ 乗に比例して増加することが分かっている。また、局所マッハ数は、音速が温度の $1/2$ 乗に比例することから、温度の $1/4$ 乗に比例して変化することになる。これらは温度の非一様性による保存的な効果であるのに対し、管壁の効果を取り入れると新たに境界層による履歴効果が現れ、この影響についてはこれまで論文 [7] 以外には研究されていない。

本報告では、壁面温度が一定の勾配を持ち、上昇する場合と下降する二つの場合を考え、十分長い管における非線形パルス波の伝播と衝撃波の形成に及ぼす熱音響効果について論文 [7] で導かれた方程式を用いて調べる。衝撃波の発生は、パルス波が運ぶエネルギー流束を減衰させるが、熱音響効果は温度勾配が正の場合エネルギー流束を増加させることが分かっている [7]。そこで両者の効果の競合についても解析を行う。散逸効果は境界層を通してのみ現れると考え、気体自身の粘性や熱伝導性による散逸効果は音響レイノルズ数が十分大きいと仮定し無視する。このため衝撃波は不連続とみなし、その内部構造は無視する。

2 非線形発展方程式

温度勾配のある管内の気体中における弱非線形圧力波の一方向への伝播を記述する方程式については、既に杉本と辻本 [7] によって導かれているので、その方程式 (5.10) を用いて議論を進める。ここでは衝撃波の発生を抑制するためにヘルムホルツ共鳴器列を取り付けないので定数 K をゼロとおき、できるだけ論文と同じ記号を用いる。詳しくは論文を参照されたい。

平衡状態で気体の温度は管壁の温度と等しいと仮定し、 $T_e(x)$ とおく。ただし、 x は軸方向の座標である。いま温度を原点 $x=0$ での値 $T_0 [=T_e(0)]$ に対する比で与え、 $H_e (=T_e/T_0)$ と定義する。温度だけに限らず、添え字 $0, e$ を付けた量は、それぞれ原点および位置 x における平衡状態の値を表すものとする。ただし、圧力の平衡値は一定値 p_0 をとる。音の拡散を無視すると、方程式は以下ようになる：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\delta_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f. \quad (1)$$

ただし、非整数 $\pm 1/2$ 階微分は次のように定義される：

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \theta^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta'}} \frac{\partial^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\partial \theta^{\alpha+\frac{1}{2}}} f(\theta', X) d\theta', \quad (\alpha = \pm 1/2). \quad (2)$$

ここで、 $f(X, \theta)$ は気体の管軸方向速度成分 u を局所線形音速 a_e で除した量、すなわち局所マッハ数に相当し、 $\varepsilon f = [(\gamma+1)/2]u/a_e \{ \approx [(\gamma+1)/2\gamma]p'/p_0 \}$ で定義されている。ただし、 γ は比熱比であり、 ε は攪乱の大きさ（非線形性）の程度を表す小さな正のパラメータである。また、 f は近似的に p_0 からの超過圧 p' でも表すことができる。

一方、独立変数 θ, X は遅延時間および遠方場座標を表し、それぞれ以下のように定義される：

$$\theta = \omega \left(t - \int_0^x \frac{dx}{a_e} \right) \quad \text{および} \quad X = \varepsilon \omega \int_0^x \frac{dx}{a_e}. \quad (3)$$

ここで、 t は時間、 ω は代表周波数である。なお、 $a_e(x)$ は温度 $T_e(x)$ の平方根に比例するので $a_e/a_0 = \sqrt{H_e}$ となることに注意する。つまり、 θ, X ともに a_e を通して温度に依存した無次元量となる。方程式 (1) の右辺の係数 δ_e, λ_e は、次のように定義される：

$$\delta_e(x) = C \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{\varepsilon R} \quad \text{および} \quad \lambda_e(x) = \left(\frac{C}{4} + C_T \right) \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{R}. \quad (4)$$

ここで、 $C = 1 + (\gamma-1)/\sqrt{\text{Pr}}$ 、 $C_T = 1/2 + 1/(\sqrt{\text{Pr}} + \text{Pr})$ (Pr : Prandtl 数) であり、 R は管の半径である。また $\nu_e(x)$ は局所的な動粘性率であり、局所音速 a_e と同様 x に依存する。ただし、比熱比、Prandtl 数、粘性率、熱伝導率の温度依存性は無いものと仮定する。係数 (4) の定義で $\sqrt{\nu_e/\omega}/R$ は管径に対する境界層の局所的な厚さを表し、この比は 1 より小さいものと仮定している。しかし、 δ_e は分母に小さなパラメータ ε があるので、両者の相対的大きさを表し、一方、 λ_e は (対数) 温度勾配 $H_e^{-1} dH_e/dX$ との積の関係において大きさが決まる。なお、 $x=0$ での値と $(\delta_e, \lambda_e) = (\delta_0, \lambda_0)\sqrt{H_e}$ で関係付けられることに注意する。

方程式 (1) の左辺は通常の慣性項を空間発展形で示したものであり、右辺第 1 項、第 2 項はそれぞれ壁面での境界層の履歴効果を表す。第 1 項目は温度勾配がなくても現れるが、第 2 項目が温度勾配下で効果を表す。最後の項は、気体が温度勾配をもつことによる非一様効果である。

3 温度分布と初期条件

管は十分な熱容量を有すると仮定し、図 1 に示すように温度が $x=0$ から $x=x_1 (>0)$ に向かって直線的に上昇する場合と、下降する場合の二つの温度分布を考える。そこで、 H_e に x の 1 次式として以下の温度分布を与える：

$$H_e \equiv \frac{T_e}{T_0} = 1 + A_n x. \quad (5)$$

ここで, x_1 で $H_e = n$ (n は正の定数) とすると, 傾きは $A_n = (n-1)/x_1$ である. これら温度分布に対して X の定義を用いると, H_e は X の2次式として以下のように表せる:

$$H_e = (1 + \kappa X)^2. \quad (6)$$

ここで, x_1 は $X_1 = 2(\sqrt{n}-1)2\varepsilon\omega/a_0 A_n$ に対応し, $\kappa = a_0 A_n / 2\varepsilon\omega$ となり, $X = X_1$ で $H_e = n$ である.

数値計算を行うに当たって, 室温 20°C における空気の物性値を用いる. 室温 $T_0 = 293\text{ K}$, 比熱比 $\gamma = 1.40$, プラントル数 $\text{Pr} = 0.710$, 平衡圧 $p_0 = 10^5\text{ N/m}^2$, 音速 $a_0 = 344\text{ m/s}$, 動粘性係数 $\nu_0 = 1.56 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ である. また, 管半径は $R = 0.04\text{ m}$ とする. 場所 $x=0$ での温度が常温のみならず十分高温の場合や低温の場合が考えられるが, いま粘性係数が温度に依存しないと仮定しているため, その違いは δ_0, λ_0 の値にのみ現れる. 常温でない場合の効果は, 定義(4)から分かるように, 分母には管の半径があるので, 場所 $x=0$ の温度が常温の n 倍 (n は正の定数) あったとしても, これは常温の場合の管の半径が $1/\sqrt{n}$ 倍違った場合に相当することになる. ちなみに, 境界層の効果を受けないほど太い管の場合には, $R \rightarrow \infty$ とおくと, $\delta_e, \lambda_e \rightarrow 0$ となり, (1) の右辺第1項, 第2項は無視できる. この場合, 方程式は平面波に対して非一様な温度分布による音速が変化する効果だけを記述することになる.

次に初期値について考える. 正の圧縮パルス波の伝播だけでなく, 負の膨張パルス波を伝播させ, その違いを調べる. そこで, 初期波形として

$$f(\theta, X=0) = F(\theta) = \pm \exp(-\theta^2) \quad (7)$$

を与える. パルスの代表時間 $\Delta_t = 0.005\text{ s}$ (t に関する初期波形の半値幅) とすると, $\omega\Delta_t/2 = 1/\sqrt{2}$ によって決定される代表周波数は $\omega = 2\sqrt{\log 2}/\Delta_t$ となり, $\omega = 333/\text{s}$ となる. このときパルスの空間的半値幅 Δ_x は約 1.7 m であり, また代表波長を a_0/ω で定義すると約 1.0 m になる.

4 数値解析

4.1 境界層の効果は無視する場合

4.1.1 方程式の特性

管半径が十分大きいとして, $\delta_e, \lambda_e \rightarrow 0$ として境界層の効果は無視すると, 方程式(1)は以下の式に帰着する:

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f. \quad (8)$$

これは温度勾配下の損失の無い伝播を表す. これは

$$\text{特性曲線 } \frac{d\theta}{dX} = -f \text{ に沿って } \frac{df}{dX} = -\frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f \quad (9)$$

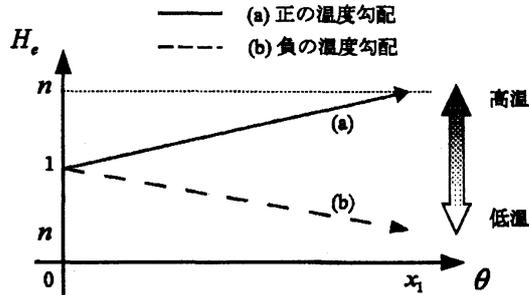


図 1: 正または負の一定勾配をもつ温度分布

と書けるので、 f は $H_e^{-1/4} F(\xi)$ で与えられる。ここで、 ξ は特性曲線を特定する引数で、 $X=0$ で $\theta=\xi$ を通る特性曲線は、

$$\theta = -F(\xi) \int_0^x H_e^{-1/4} dX + \xi \quad (10)$$

で表される。パラメータ ξ を消去すると $f(\theta, X)$ が求まる。

波形は、 $|\partial f / \partial \theta| \rightarrow \infty$ の時に多値になり始め、衝撃波が形成される。その位置 X_s は

$$\int_0^{X_s} H_e^{-1/4} dX = -\frac{1}{2\xi} \exp(\xi^2) \quad (11)$$

を満たす最小の X である。多値になり始めるといわゆるショックフィティングを行い不連続を波形に導入する。

4.1.2 保存則

いま $g(\theta, X) = H_e^{1/4} f(\theta, X)$ とすると、特性曲線 $d\theta/dX = -H_e^{-1/4} g$ に沿って $dg/dX = 0$ となり、 g は X の変化に関係なく一定の値を持つ。これから、位置 X での遅延時間 θ に関する波形の積分値は一定となり、面積保存則が常に成立する。

またその位置を通過する全エネルギー流束の積分値 I (以下、単にエネルギー流束という) は

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} p'u' dt = \frac{4\gamma\epsilon^2 p_0 a_0}{(\gamma+1)^2 \omega} \sqrt{H_e} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\theta \equiv \frac{4\gamma\epsilon^2 p_0 a_0}{(\gamma+1)^2 \omega} E \quad (12)$$

と表せるので、次に定義する定数部分を除いた量 E で全エネルギー流束を評価する：

$$E = \sqrt{H_e} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\theta. \quad (13)$$

エネルギー流束を g を用いて書き直すと、 $E = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 d\theta$ 、 $dE/dX = 0$ となり、 X に関してエネルギー流束の保存則が成立する。ただし、ショック形成後はエネルギー流束の保存則は成立しなくなり、 X とともに減少する。

4.1.3 数値計算の結果

方程式 (8) において、 $f \rightarrow -f, \theta \rightarrow -\theta$ とすると、方程式は不変に保たれることから、負のパルス波の発展は正のパルス波形の正負を逆転し、そして遅延時間も逆転させると得られることが分かる。したがってここでは正のパルス波の伝播のみ考える。温度分布に関しては $T_0 = 293$ K とし、正の温度勾配で位置 $x = x_1 = 128$ m で T_0 に比べ温度比が $n=2, n=5$ の場合および負の勾配で温度比 $n=0.5, n=0.2$ の場合を考える。温度変化の代表長さ l を対数温度勾配の逆数 $|d \log T_e / dx|^{-1}$ で定義すると、 l は $n=5$ に対して $x=0$ では 32 m となり、勾配の緩やかさを表すパラメータ $\chi [(a_0/\omega)/l]$ の値は約 1/30 である。

以下の図 2 と図 3 は横軸に遅延時間 θ 、縦軸に f を取り、 f の X に関する発展を x_1 に相当する X_1 まで示している。参考のため、温度勾配がない場合 ($n=1$) も示す。不連続の位置が最も左にある波形が $X=X_1$ での波形であり、この波形と初期波形との間の波形は、 X を $X=0$ から $X_1/10$ ごとに進んだ位置で描いたものである。また、図中の太線は衝撃波形成位置での波形である。

図 2 と図 3 より、温度勾配がない場合と比較して、正の温度勾配は局所マッハ数を減少させ、負の温度勾配は増加させる。この傾向は衝撃波が無い場合と同じである。しかし、局所音速が温度の $H_e^{1/2}$ で速くなるため、流速自体は正の温度勾配で増加し、負の勾配では減少することに注意する。また、超過圧力は流速とは逆に、正の勾配で減少、負の勾配で増加する。表 1 は、温度勾配のない場合に比べ、色々な n の値に対して、衝撃波の形成位置 X_s と実際の位置 x_s 、衝撃波面での f の最大値 f_s の値を比較したものである。

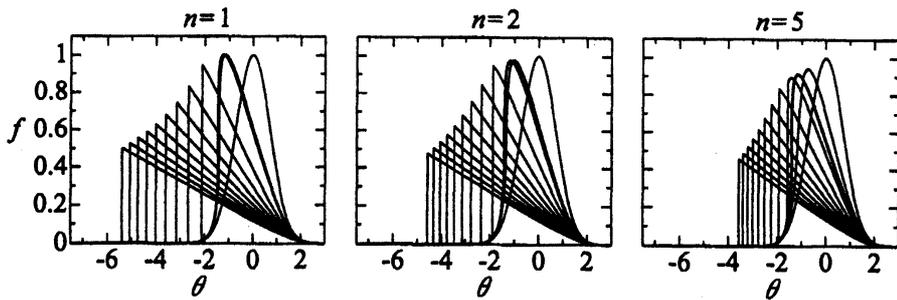


図 2: 正の温度勾配下での正のパルス波の空間発展

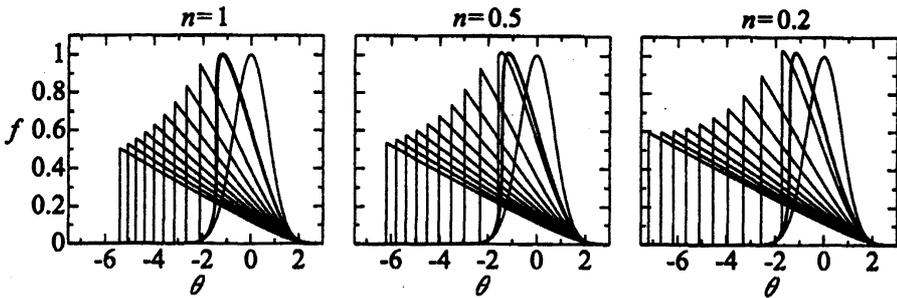


図 3: 負の温度勾配下での正のパルス波の空間発展

衝撃波は正の温度勾配では遅く、負の温度勾配では早く形成される。この違いを X 座標で見れば僅かにしか見えないが、勾配が無いときと比べて音速がかなり違うので、衝撃波形成距離は物理空間 x では大きく違うことに注意したい。

一方、図 4 は伝播した波が運ぶ全エネルギー流束が伝播に伴いどのように変化するかを示したグラフであり、縦軸に全エネルギー流束 I の初期値 I_0 に対する比、横軸に実際の距離 x を取る。衝撃波が形成されるまでは、全エネルギー流束は初期値に等しい値を維持するが、衝撃波が発生するといわゆる非線形減衰により減少する。その減少は、温度勾配がない場合と比較して、勾配が正の場合は少なく、逆に負の場合には大きくなるが見られる。したがって、衝撃波が発生すると温度勾配により全エネルギー流束の値が異なる結果を得る。

$R(m)$	n	X_s	$x_s(m)$	f_s	f_i
0.04	0.2	1.1554	11.700	0.6394	0.5935
0.04	0.5	1.1597	11.827	0.6387	0.5338
0.04	1	1.1660	12.032	0.6176	0.5015
0.04	2	1.1797	12.463	0.6031	0.4781
0.04	5	1.2212	13.843	0.5763	0.4568

表 1: 温度比 n と衝撃波形成の位置 X_s, x_s と $x = x_1$ での最大圧力振幅 f_1

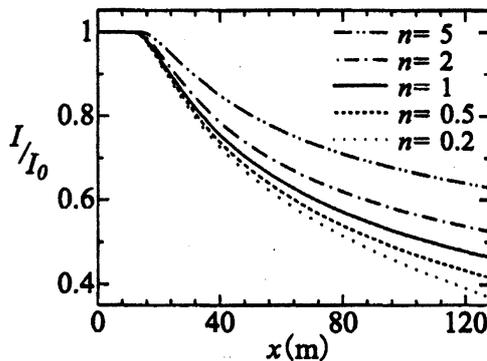


図 4: 全エネルギー流束の初期値に対する比

4.2 境界層の効果

4.2.1 方程式の特性

境界層の効果を含めた方程式(1)は解析的には解くことはできない。そこで、特性曲線に相当する $d\theta/dX = -f$ に沿って

$$\frac{df}{dX} = -\delta_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f \quad (14)$$

と書くことはできるので、右辺を数値的に評価し X に関する前進差分によって順次 f を求める。特性曲線に沿って θ は、

$$\theta = -\int_0^x f dX + \xi \quad (15)$$

で計算する。なお、境界層による項を考慮すると当然面積もエネルギー流束も保存しなくなる。

4.2.2 数値計算の結果

境界層を考慮すると、正、負のパルス波の発展の間に既に示したような簡単な関係は成立せず、両パルス波を考える。常温の空気では $\omega = 333 / \text{s}$ とすると、境界層の代表厚さ $\sqrt{\nu_0/\omega}$ は $0.2 - 0.3 \text{ mm}$ 程度であり、温度が高いとこれより厚く、低いと薄くなる。したがって半径が 0.04 m の管で、 $T_0 = 293 \text{ K}$ とし $\varepsilon = 0.1$ とすると、パラメータ $\delta_0 = 0.07979$, $\lambda_0 = 0.008185$ となる。

以下の (a), (b), (c) における図は $T_0 = 293 \text{ K}$ とし、正の温度勾配で位置 $x = x_1 = 128 \text{ m}$ で T_0 に比べ温度比が $n=2, n=5$ 倍の場合および負の勾配で温度比 $n=0.2, n=0.5$ 倍の場合と、参照のため $n=1$ とした温度勾配のない場合のパルス波形の X に関する発展を、横軸に遅延時間 θ 、縦軸に圧力振幅 f を取り示す。衝撃波が形成されると、等面積則を用いて多値になる部分にショックフィティングを行う。太い実線で示す波形は衝撃波形成時の波形である。

(a) 正の温度勾配の場合

温度勾配がない場合 ($n=1$) と、 $n=2, n=5$ を与えた場合の正、負のパルスの発展を図 5-1, 5-2 に示す。表 2 は衝撃波形成位置 X_s と物理空間での位置 x_s 、衝撃波面での f の最大値 f_s 、さらには $x = x_1$ での f の値 f_1 を示す。図 5-1, 5-2 と表 2 より、温度勾配の無い場合と比較して、境界層は衝撃波形成距離を長くさせ、また波形の後ろに緩やかに減衰する尻尾の出現や不連続の右側の波形に丸みを与えることが見られる。温度勾配の効果は定性的には、温度勾配の無い場合とさほど違う様には見えないが、定量的には大きな違いを生じさせることが分かる。

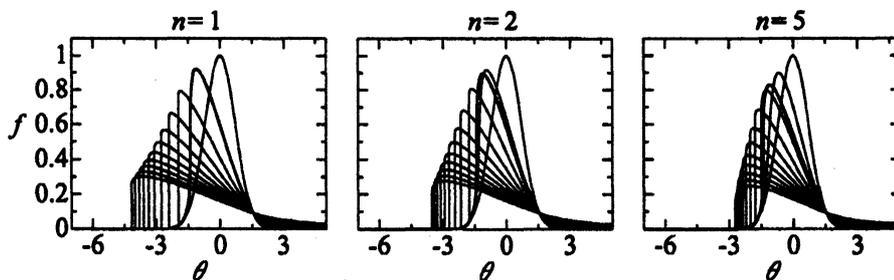


図 5-1: 正の温度勾配下での正のパルス波の空間発展

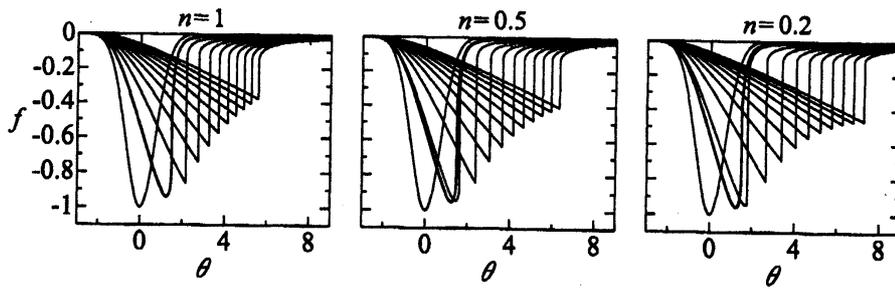


図 5-2: 正の温度勾配下での負のパルス波の空間発展

(b) 負の温度勾配の場合

次に、温度比 $n=0.5, 0.2$ の負の温度勾配を与えた場合の、正、負のパルス波の空間発展の様子を図 6-1, 6-2 に $n=1$ の場合と比較し示す。また、表 2 には衝撃波形成位置や x_1 での f の値を示す。

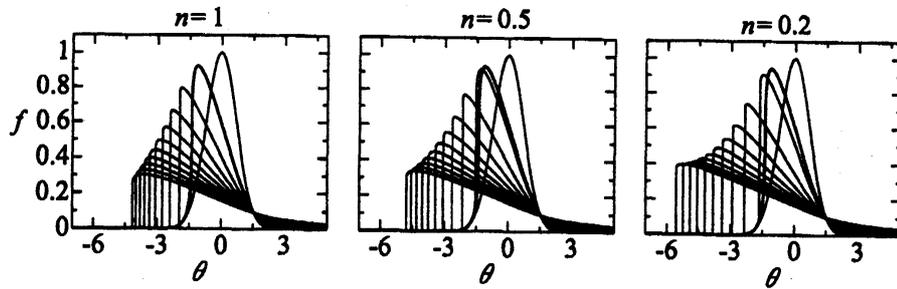


図 6-1: 負の温度勾配下での正のパルス波の空間発展

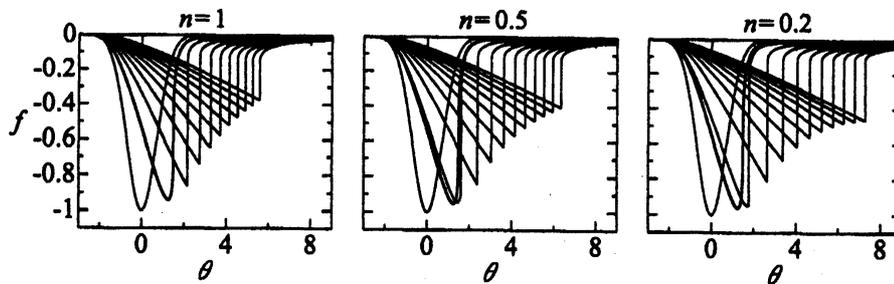


図 6-2: 負の温度勾配下での負のパルス波の空間発展

(c) 管径の違いの影響

次に管の半径の違いによる境界層の効果を示すため、管径を半分にした管と倍にした管での正のパルス波の発展を考える。この場合の結果を図 7 に示す。図 7 は場所 $x=x_1$ において、温度比 $n=2$ を与えた場合の、正のパルス波の発展の様子を示している。また、表 2 には衝撃波形成位置や x_1 での f の値を示す。

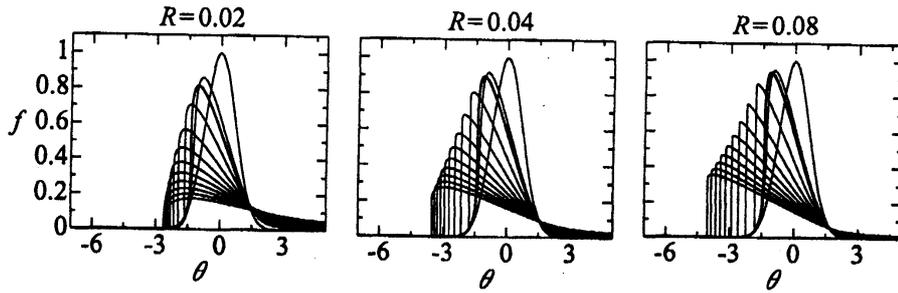


図 7: 正のパルス波の空間発展の管径の違いによる比較
($x=x_1$ において温度比 $n=2$ を与えた場合)

< 正のパルス波 >

$R(m)$	n	X_s	$x_s(m)$	f_s	f_1
0.04	0.2	1.2222	12.364	0.5613	0.3947
0.04	0.5	1.2265	12.500	0.5423	0.3375
0.04	1	1.2355	12.749	0.5385	0.3038
0.04	2	1.2526	13.252	0.5079	0.2766
0.04	5	1.3071	14.909	0.4760	0.2479
0.02	2	1.3431	14.234	0.4281	0.1747
0.08	2	1.2146	12.841	0.5625	0.3565

< 負のパルス波 >

$R(m)$	n	X_s	$x_s(m)$	f_s	f_1
0.04	0.2	1.2394	12.534	-0.6616	-0.4642
0.04	0.5	1.2440	12.676	-0.6442	-0.4091
0.04	1	1.2541	12.941	-0.6541	-0.3773
0.04	2	1.2722	13.464	-0.6232	-0.3517
0.04	5	1.3301	15.197	-0.5750	-0.3246

表 2: 温度比 n と衝撃波の形成位置 X_s, x_s と最大圧力振幅 $f_s, x=x_1$ での最大圧力振幅 f_1

5 議論

5.1 圧力振幅と衝撃波の形成位置について

境界層の効果を全て無視し局所音速の非一様性のみを考慮すると、正の温度勾配は圧力振幅を温度の $-1/4$ 乗に比例して減少させ、一方負の温度勾配は増加させることが分かった。なお、衝撃波の強さが温度の $-1/4$ 乗に比例して減衰するのではないことに注意する。しかし、境界層の効果を考慮し負の温度分布を与えると、境界層による減衰が勝り圧力振幅は減少する結果が得られた(図 6-1,6-2)。方程式 (1) の右辺第一項の速度境界層の効果は $\sqrt{H_e}/R$ に比例し、右辺第二項の温度境界層の効果は $(1/R\sqrt{H_e})dH_e/dX$ に比例する。よって、細い管で高温の領域を伝播する場合は、境界層による摩擦の効果が大きくなりすぎ振幅が大きく減少する。逆に、太い管で低温の領域を伝播する場合には、摩擦が小さくなり、境界層の効果が小さくなるため振幅が減少しにくい。

次に衝撃波の形成位置について考える。表 2 より、高温領域を伝播する場合は衝撃波の形成は遅れ、低温領域を伝播する場合は衝撃波の形成が早まっている。衝撃波の形成は、温度勾配の正、負に拘わらず、圧力振幅が大きいほど衝撃波は早く形成され、圧力振幅が小さいほど衝撃波は遅くに形成される。

また、初期波形が正と負のパルス波でどのような伝播の違いが現れるかについて考える。境界層効果を考慮しなければ、両波形は原点に関して点対称の関係にあるが、図 5-1 と図 5-2 で比較すると、どちらの波も同様の波形の変化が見られる。異なる点は、正のパルス波が丸みをやや帯びた波形になっているのに対し、負のパルス波は尖った波の形になっていることである。また、表 2 より、衝撃波の形成位置は負のパルス波の方が若干遅く形成され、 $x=x_1$ での最大圧力振幅 f_1 も負のパルス波の方が少し大きくなる。しかし、次節で示すエネルギー流束に関してはほとんど違いがない。つまり、波形は異なって伝播していくが、熱音響効果は波形の種類を問わず、一定の効果を与えることがわかる。

5.2 エネルギー流束について

次にエネルギー流束について考える。図8, 9は、伝播する波が運ぶ全エネルギー流束を比較したグラフである。図8は正と負の温度勾配を与えた場合での比較を、図9は $x=x_1$ 同じ温度比 $n=2$ を与えた場合の管径の違いでの比較を示している。縦軸に全エネルギー流束 I の初期値 I_0 に対する比 I/I_0 、横軸に実際の距離 x を取る。

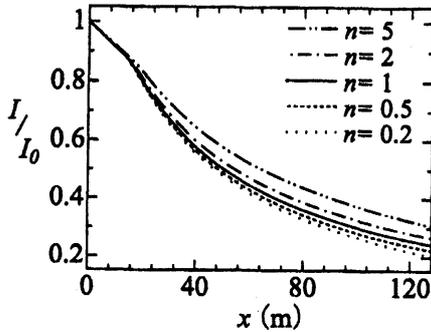


図8: 全エネルギー流束の初期値に対する比
の正と負の温度勾配の比較

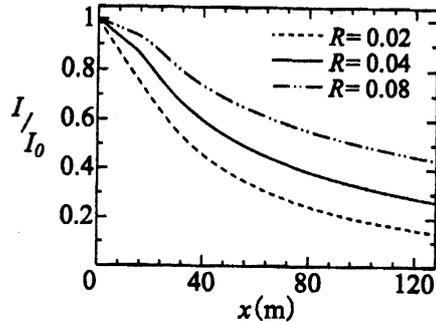


図9: 全エネルギー流束の初期値に対する比
の管径の違いによる比較

まず、温度勾配の結果について考える。図8より、境界層の効果によりエネルギー流束は常に距離と共に減少する。正の温度勾配を持つ場合は温度勾配が無い場合と比較して、最大温度比が大きいほど、エネルギー流束は減少しにくくなっていることがわかる。摩擦による減衰は大きくなるが、一方熱音響効果による増幅もあるため増幅したと考えられる。負の温度勾配を持つ場合には熱音響効果による減衰は小さく、むしろ衝撃波形成による非線形減衰が支配的であるとされる。

次に、管径の影響について考える。図9より、管径が小さい管であるほど、エネルギー流束の減少は激しくなっていることがわかる。温度勾配が正であるので熱音響効果による増幅はあるが、摩擦が大きいため、このように大きく減衰していると考えられる。逆に太い管では減衰が小さい。

6 おわりに

本報告では、正もしくは負の温度勾配を持つ管内の空気中を一方向に伝播するパルス波に対し、その発展の様子および全エネルギー流束の変化の様子を調べた。また、管半径の違いも考察した。熱音響効果によるエネルギー流束の増幅作用は正の温度勾配下で現れる一方、衝撃波の出現は非線形減衰を引き起こし常にそれを減少させるように作用する。しかし、ここでは示すことはできなかったが、衝撃波が発生しても正の温度勾配下で、熱音響効果が大きければエネルギー流束は一時的にせよ増加する可能性は否定しきれない。そのときでもやはり最終的には減衰に転じるであろう。熱音響効果を考慮しても進行波においては衝撃波は発生することがあり、また衝撃波が発生することはパルス波のエネルギー増幅にとっては好ましいものではないと結論される。

参考文献

- [1] CHISNELL, R. F. "The normal motion of a shock wave through a non-uniform one dimensional medium," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **A232**, 350-370 (1955).

- [2] WHITHAM, G. B. "On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow," *J. Fluid Mech.*, **4**, 337-360 (1958).
- [3] SAKURAI, A. "On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas," *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 353-370 (1960).
- [4] BIRD, G. A. "The motion of a shock wave through a region of non-uniform density," *J. Fluid Mech.*, **11**, 180-186 (1961).
- [5] LIN, H. & SZERI, A. J. "Shock formation in the presence of entropy gradients," *J. Fluid Mech.*, **431**, 161-188 (2001).
- [6] SOUKHOMLINOV, V. S., KOLOSOV, V. Y., SHEVEREV, V. A. & ÖTÜGEN, M. V. "Formation and propagation of a shock wave in a gas with temperature gradients," *J. Fluid Mech.*, **473**, 245-264 (2002).
- [7] Sugimoto, N. & Tsujimoto, K. "Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **456**, 377-409 (2002).