数理解析研究所講究録
1484巻 2006年 150-160

バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
一橋大学経済研究所
Institute of Economic Research, Hitotsubashi University
高橋渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院情報理工学研究科
Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, C をその空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x\in H$ に対して

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|:y\in C\}$$

となるような $z\in C$ が一意に存在する. このことはよく知られた事実である. そこで, $x\in H$ に対して, このような元 z を対応させる写像を P_C で表し, P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする. この距離射影 P_C は, 次の重要な性質を持っている. すなわち, $z=P_Cx$ であることの必要十分条件は

$$\langle x-z,z-y\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると, P_C は nonexpansive 写像, すなわち

$$\|P_Cx-P_Cy\|\leq\|x-y\|,\quad \forall x,y\in H$$

であることがわかる.

Hilbert 空間上での距離射影の概念は Banach 空間の場合にも拡張される. E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x\in E$ に対して,

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|:y\in C\}$$

となるような $z\in C$ は一意に存在するが, $x\in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像をやはり, P_C で表し, P_C を E から C の上への距離射影と呼ぶのである.

Banach 空間への拡張は, 距離射影だけではなく, 他に 2 つの射影が知られている. 1 つは generalized projection と呼ばれるもので, E を滑らかで, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき,

$$V(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,J(y)\rangle+\|y\|^2,\quad \forall x,y\in E$$

で $E\times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の $x\in E$ に対して

$$V(z,x)=\min\{V(y,x):y\in C\}$$

となるような $z\in C$ が一意に存在する ([1] を参照). そこで, $x\in E$ に対して, このような C の元 z を対応させる写像を Π_C で表し, Π_C を E から C の上への generalized projection と呼ぶことにする.

もう, 一つは sunny nonexpansive retraction と呼ばれるものである. E を Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, E から C 上への写像 Q が sunny であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

が成り立つことである. 同様に, E から C 上への写像 Q が retraction であるとは, 任意の $x \in C$ に対して, $Qx = x$ が成り立つことである. E が滑らかな Banach 空間では, E から C 上への sunny nonexpansive retraction は一意に決まる ([13] を参照). そこで, E が滑らかな Banach 空間だった場合に E から C の上への sunny nonexpansive retraction を Q_C で表すことにする. C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C が nonexpansive retract (sunny nonexpansive retract) であるとは, E から C の上への nonexpansive retraction (sunny nonexpansive retraction) が存在するときをいう ([3], [4] を参照).

これら 3 つの射影には次の重要な性質を持つことが知られている. 比較しやすくするために, E を滑らかで, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, P_C, Π_C, Q_C を E から C の上への距離射影, generalized projection, sunny nonexpansive retraction とする. このとき, $x \in E$, $x_0 \in C$ に対して,

$$\begin{aligned}
x_0 = P_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle J(x - x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, \qquad &&\forall y \in C,\\
x_0 = \Pi_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle J(x) - J(x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, &&\forall y \in C,\\
x_0 = Q_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_0, J(x_0 - y)\rangle \geq 0, &&\forall y \in C
\end{aligned}$$

である. ただし, J は E 上の双対写像である. これらの考察から

$$x_0 = R_C x \ \Leftrightarrow\ \langle x - x_0, J(x_0) - J(y)\rangle \geq 0,\ \forall y \in C \tag{1.2}$$

となる R_C の存在が容易にわかるだろう. このような射影 R_C には関しては, 2004 年に高橋 [13] が問題提起を行っている. 果してこのような射影 R_C はどのようなときに表れ, どのようなものか非常に興味のあることである.

また, この 3 つの射影には, それぞれ集合列の収束と関連した同じタイプの収束定理が知られている. もし, 射影 R_C が存在するならば, R_C に対しても同様の結果が得られるかどうかも興味深い問題である.

そこで, 本論文では, 3 つの射影に関する収束定理を紹介し, その後, 4 つ目の射影 R_C の存在に関して議論をする. また, 3 つの射影に関する収束定理と同じタイプの収束定理が射影 R_C に関しても成り立つことを証明する.

2 準備

E を Banach 空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸であるとは, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ となる E の元 $x, y (x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

Banach 空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$J(x) := \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像と呼ぶ. 任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \emptyset$ である. また, E の元 x, y と $x^* \in J(x)$, $y^* \in J(y)$ に対して $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0$ となる. E が狭義凸になる必要十分条件は E の元 $x, y (x \neq y)$ と $x^* \in J(x)$, $y^* \in J(y)$ に対して $\langle x - y, x^* - y^*\rangle > 0$ が成り立つことである.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らかであるともいう. 任意の $y \in S(E)$ に対して, (2.1) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能であるという. 任意の $x \in S(E)$ に対して, (2.1) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らかであるともいう. E が滑らかであるならば, 双対写像 J は一価となり, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能なら, J は E の有界集合上で一様連続である. また, E のノルムが Fréchet 微分可能ならば, J は (norm-to-norm) 連続である ([12] を参照).

Banach 空間 E が Kadec-Klee property をもつとは, E での命題

$$x_n \rightharpoonup x \ \& \ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow \ x_n \to x$$

がつねににいえることである. ここで, $\to$ は強収束 (ノルム収束) を, $\rightharpoonup$ は弱収束を表す. E が一様凸な Banach 空間のときはこの性質が成り立つ. また, E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつための必要十分条件は, E が狭義凸で, 回帰的な Banach 空間で, さらに Kadec-Klee property をもつことである ([12] を参照).

E を滑らかな Banach 空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, J(y)\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. C を E の空でない閉凸集合とする. この関数 V は次のような性質をもつ ([8] 参照).

$$V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, J(z) - J(y)\rangle, \quad \forall x, y, z \in E \tag{2.2}$$

さらに, 次の 2 つの性質をもつことも知られている.

補題 2.1 ([8]). E を滑らかで一様凸な *Banach* 空間とする. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を E の点列とし, 少なくともどちらか一方が有界であるとする. もし, $\lim_{n \to \infty} V(x_n, y_n) = 0$ ならば $\lim_{n \to \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ が成り立つ.

補題 2.2 ([8]). E を滑らかな *Banach* 空間とする. C を E の空でない閉凸集合とし, $x \in E$, $x_0 \in C$ とする. このとき, $V(x_0, x) = \min_{y \in C} V(y, x)$ になることと,

$$\langle y - x_0, J(x_0) - J(x)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

は同値である.

3 射影に関する収束定理

Mosco[10] は, $\{C_n\}$ を Banach 空間の空でない閉凸集合の列とするとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 $\text{s-Li}_n C_n$ と弱上極限集合 $\text{w-Ls}_n C_n$ を

$$x \in \operatorname*{s-Li}_n C_n \ \Leftrightarrow \ \exists \{x_n\} \subset E : \ x_n \in C_n \ (\forall n \in \mathbb{N}), \ x_n \to x$$

および

$$x \in \text{w-}\mathop{\mathrm{Ls}}_n C_n \;\Leftrightarrow\; \exists \{C_{n_i}\} \subset \{C_n\}:\; x_{n_i} \in C_{n_i}\ (\forall i \in \mathbb{N}),\ x_{n_i} \rightharpoonup x$$

で定義し, $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ であるならば, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束するといい,

$$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$$

で表した. 狭義凸で回帰的な Banach 空間 E の閉凸集合の列 $\{C_n\}$ の Mosco 収束と Banach 空間の 3 つの射影との間に大きな関わりがある. 1984 年に塚田 [14] は, 距離射影に関して次の定理を証明した.

定理 3.1 ([14]). *E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とする. C_0 を $\{C_n\}$ の Mosco 極限とし, $C_0 \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対し,*

$$P_{C_n}x \rightharpoonup P_{C_0}x$$

である. さらに, E が Kadec-Klee property をもてば, この収束は強収束となる. すなわち, 任意の $x \in E$ に対し, $P_{C_n}x \to P_{C_0}x$ となる. ただし, P_C は E から C の上への距離射影である.

1999 年には木村-髙橋 [9] が sunny nonexpansive retraction に関して次の 2 つの定理を得た.

定理 3.2 ([9]). *E を回帰的な Banach 空間とし, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない convex nonexpansive retract の列とする. もし, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \emptyset$ とするならば, C_0 は convex nonexpansive retract である.*

定理 3.3 ([9]). *E を回帰的な Banach 空間とし, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つとする. また, E は正規構造をもつものとし, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を空でない convex sunny nonexpansive retract の列で, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在するものとする. $C_0 \neq \emptyset$ ならば, C_0 は convex sunny nonexpansive retract である. さらに, E の双対写像 J が弱点列連続であるならば, 任意の $x \in E$ に対して,*

$$Q_{C_n}x \to Q_{C_0}x$$

である.

さらに, 2003 年には茨木-木村-髙橋 [6] が generalized projection に関して次の 2 つの定理を得ている.

定理 3.4 ([6]). *E を滑らかで, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とし, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない閉凸集合の列とする. もし, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \emptyset$ とするならば, 任意の $x \in E$ に対し,*

$$\Pi_{C_n}x \rightharpoonup \Pi_{C_0}x$$

である.

定理 3.5 ([6]). *E を滑らかな Banach 空間とし, E^* が Fréchet 微分可能なノルムを持つものとする. また, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ を E の空でない閉凸集合の列とする. もし, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \emptyset$ とするならば, 任意の $x \in E$ に対し,*

$$\Pi_{C_n}x \to \Pi_{C_0}x$$

である.

4 generalized nonexpansive 写像と収束定理

E を滑らかな Banach 空間とし, D を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 写像 $R : D \to D$ が generalized nonexpansive であるとは, $F(R) \neq \emptyset$ であり, かつ

$$V(Rx, y) \leq V(x, y), \quad \forall x \in D, \ \forall y \in F(R)$$

がつねに成り立つことと定義する. この写像に関して次の性質がいえる.

命題 4.1. *E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし, C を空でない閉凸集合とする. また, R_C を E から C の上への retraction としたとき, R_C が suuny かつ generalized nonexpansive になる必要十分条件は,*

$$\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in E, \ \forall y \in C$$

となることである.

証明. (必要性) $x \in E$, $y \in C$ とする. このとき, $x_t := R_C x + t(x - R_C x)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおくと, 仮定より

$$V(R_C x, y) = V(R_C x_t, y) = V(R_C x_t, R_C y) \leq V(x_t, y)$$

を得る. よって, $V(R_C x, y) = \min\{V(z, y) : z \in [x, R_C x]\}$ となるので, 補題2.2 より $\langle x_t - R_C x, J(R_C x) - J(y) \rangle \geq 0$ $(0 \leq t \leq 1)$ を得る. $t = 1$ とすると $\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y) \rangle \geq 0$ となる.

(十分性) $x \in E$, $y \in C$ とすると, 式 (2.2) より,

$$V(x, y) = V(x, R_C x) + V(R_C x, y) + 2\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y) \rangle$$

を得る. 仮定より, $V(x, y) \geq V(x, R_C x) + V(R_C x, y) \geq V(R_C x, y)$ となる. また $R_C y = y$ であるので $V(R_C x, R_C y) \leq V(x, y)$ となり, R_C は generalized nonexpansive である.

次に, $x_t := R_C x + t(x - R_C x)$ $(t \geq 0)$ とおく. 仮定より,

$$\langle x_t - R_C x_t, J(R_C x_t) - J(R_C x) \rangle \geq 0, \ \langle x - R_C x, J(R_C x) - J(R_C x_t) \rangle \geq 0$$

となる. $x_t - R_C x = t(x - R_C x)$ から,

$$\langle x_t - R_C x, J(R_C x) - J(R_C x_t) \rangle = t\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(R_C x_t) \rangle \geq 0$$

を得る. よって, $\langle R_C x - R_C x_t, J(R_C x_t) - J(R_C x) \rangle \geq 0$ となる. E が狭義凸なので, $R_C x = R_C x_t$ となり, R_C は sunny である. □

E が滑らかで狭義凸な Banach 空間とし, C を空でない閉凸集合とする. このとき, E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction は一意に決まる. 実際, R, S を E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction とする. このとき, 命題 4.1 より, $x \in E$ とすると,

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(y) \rangle \geq 0, \ \langle x - Sx, J(Sx) - J(y) \rangle \geq 0, \ \forall y \in C$$

が成り立つ. $Rx, Sx \in C$ であることから,

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(Sx) \rangle \geq 0, \ \langle x - Sx, J(Sx) - J(Rx) \rangle \geq 0$$

が成り立つ. この 2 つの不等式から

$$\langle Sx - Rx, J(Rx) - J(Sx) \rangle \geq 0$$

が得られ, E が狭義凸であることから $Sx = Rx$ である. また, この計算から分かるように, 次の不等式を満たす $z \in E$ は一意である.

$$\langle x - z, J(z) - J(y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

ここで, 滑らかで狭義凸な Banach 空間の場合に, E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction を R_C で表すことにする. C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C が sunny generalized nonexpansive retract (generalized nonexpansive retract) であるとは, E から C の上への sunny generalized nonexpansive retraction (generalized nonexpansive retraction) が存在するときと定義する.

まず最初に, 空でない generalized nonexpansive retract の集合列の Mosco 収束に関して次の定理がいえる.

定理 4.2. *E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない generalized nonexpansive retract の列とする. もし, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在し, $C_0 \neq \emptyset$ とするならば, C_0 は generalized nonexpansive retract である.*

証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, R_{C_n} を E から C_n の上への generalized nonexpansive retraction とし, $x \in E$ とする. ここで $C_0 \neq \emptyset$ より $\{R_{C_n}x\}$ は有界となる. 実際, もし $\{R_{C_n}x\}$ が有界でないとすると, 一般性を失うことなしに $\|R_{C_n}x\| \to \infty$ と仮定できる. また, $C_0 \neq \emptyset$ より, $y \in C_0 = \text{M-lim}\, C_n$ に対して, ある点列 $\{y_n\} \subset E$ が存在して $y_n \to y$ かつ $y_n \in C_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たす. ここで $\{y_n\}$ は有界であるので,

$$V(R_{C_n}x, y_n) = V(R_{C_n}x, R_{C_n}y_n) \leq V(x, y_n) \leq \sup_m V(x, y_m) = M_0 < +\infty$$

を得る. 一方, $\sup_m \|y_m\| = M$ $(< +\infty)$ とおくと,

$$\begin{aligned} M_0 &\geq V(R_{C_n}x, y_n) \\ &= \|R_{C_n}x\|^2 - 2\langle R_{C_n}x, J(y_n)\rangle + \|y_n\|^2 \\ &\geq \|R_{C_n}x\|^2 - 2\langle R_{C_n}x, J(y_n)\rangle \\ &\geq \|R_{C_n}x\|^2 - 2M\|R_{C_n}x\| \end{aligned}$$

となり,

$$\|R_{C_n}x\|^2 \leq 2M\|R_{C_n}x\| + M_0$$

を得る. $\|R_{C_n}x\| \to \infty$ よりこれは矛盾. よって, $\{R_{C_n}x\}$ は有界となる.

$\{R_{C_n}x\}$ が有界なので, E^* 上の実数値関数 g を,

$$g(x^*) := \mu_n \langle R_{C_n}x, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in E^*$$

と定義できる. ただし, μ は Banach limit である. このとき, g が線形かつ連続となるのは明らかである. さらに, E が回帰的より $x_0 \in E$ が一意に存在して, $g(x^*) = \mu_n\langle R_{C_n}x, x^*\rangle = \langle x_0, x^* \rangle$ となる. そこで, $x \in E$ に対して, このような E の元 x_0 を対応させる写像を R_{C_0} と定義する.

次に写像 R_{C_0} が E から C_0 の上への generalized nonexpansive retraction になることを示す. $z \in C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ とすると, 定義より, ある点列 $\{z_n\} \subset E$ が存在して, $z_n \to z$ かつ $z_n \in C_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たす. これと, 式 (2.2) より,

$$\begin{aligned} V(R_{C_n}z, z) &= V(R_{C_n}z, z_n) + V(z_n, z) + 2\langle R_{C_n}z - z_n, J(z_n) - J(z)\rangle \\ &= V(R_{C_n}z, R_{C_n}z_n) + V(z_n, z) + 2\langle R_{C_n}z - z_n, J(z_n) - J(z)\rangle \\ &\leq V(z, z_n) + V(z_n, z) + 2\|R_{C_n}z - z_n\|\|J(z_n) - J(z)\| \\ &\leq V(z, z_n) + V(z_n, z) + 2K\|J(z_n) - J(z)\| \end{aligned}$$

を得る．ただし，$K := \sup_n \|R_{C_n}z - z_n\| < +\infty$．ここで，$z_n \to z$ より，$V(R_{C_n}z, z) \to 0$ となる．補題 2.1 より，$R_{C_n}z \to z$ を得る．よって，

$$\langle R_{C_0}z, x^*\rangle = \mu_n\langle R_{C_n}z, x^*\rangle = \langle z, x^*\rangle, \quad \forall x^* \in E^*$$

となるので，$R_{C_0}z = z$ $(\forall z \in C_0)$ かつ，$C_0 \subset R(R_{C_0}) := \{R_{C_0}z : z \in E\}$ となることが分かる．これより，$R(R_{C_0}) \subset C_0$ を示せば R_{C_0} が E から C_0 の上への retraction であることが示せる．$y \in R(R_{C_0})$ とすると $y = R_{C_0}x$ を満たす $x \in E$ が存在する．このとき，$y \in \cap_n\overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n\}$ となる．実際，もし $y \notin \cap_n\overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n\}$ とすると，ある整数 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $y \notin D = \overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n_0\}$．分離定理より，$x_0^* \in E^*$ が存在して，$\langle y, x_0^*\rangle > \sup_{z\in D}\langle z, x_0^*\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle y, x_0^*\rangle &> \sup_{z\in D}\langle z, x_0^*\rangle \\
&\geq \sup_{m\geq n_0}\langle R_{C_m}x, x_0^*\rangle \\
&\geq \mu_m\langle R_{C_{m+n_0}}x, x_0^*\rangle \\
&= \mu_m\langle R_{C_m}x, x_0^*\rangle = \langle R_{C_0}x, x_0^*\rangle = \langle y, x_0^*\rangle
\end{aligned}$$

となり矛盾．よって $y \in \cap_n\overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n\}$．また，ここで $\cap_n\overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n\}$ は $\{R_{C_n}x\}$ の弱収積点 (weak cluster point) の閉凸包となる ([5] を参照)．また，C_0 は閉凸集合より，

$$\cap_n\overline{co}\{R_{C_m}x : m \geq n\} = \text{w-}\operatorname*{Ls}_n C_n = C_0$$

となり，$y \in C_0$ となる．すなわち，$R(R_{C_0}) \subset C_0$ が示せたので R_{C_0} が E から C_0 の上への retraction であることが分かった．

次に，R_{C_0} が generalized nonexpansive 写像になることを示す．$x \in E$, $y \in C_0$ とする．$\|R_{C_0}x\|^2 = \langle R_{C_0}x, J(R_{C_0}x)\rangle = \mu_n\langle R_{C_n}x, J(R_{C_0}x)\rangle \leq \mu_n\|R_{C_n}x\|\|R_{C_0}x\|$ より，$\|R_{C_0}x\| \leq \mu_n\|R_{C_n}x\|$ を得る．ここで，$\alpha = \mu_n\|R_{C_n}x\|$ とおくと，

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu_n(\|R_{C_n}\| - \alpha)^2 \\
&= \mu_n\{\|R_{C_n}x\|^2 - 2\alpha\|R_{C_n}x\| + \alpha^2\} \\
&= \mu_n\|R_{C_n}x\|^2 - 2\alpha\,\mu_n\|R_{C_n}x\| + \alpha^2 \\
&= \mu_n\|R_{C_n}x\|^2 - 2(\mu_n\|R_{C_n}x\|)^2 + \alpha^2
\end{aligned}$$

となり，

$$(\mu_n\|R_{C_n}x\|)^2 \leq \mu_n\|R_{C_n}x\|^2$$

を得る．ここで，$y \in C_0 = \text{s-Li}_n C_n$ より，ある点列 $\{y_n\} \subset E$ が存在して $y_n \to y$ かつ $y_n \in C_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たす．これらより，

$$\begin{aligned}
V(R_{C_0}x, R_{C_0}y) &= V(R_{C_0}x, y) \\
&= \|R_{C_0}x\|^2 - 2\langle R_{C_0}x, J(y)\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq (\mu_n\|R_{C_n}x\|)^2 - 2\mu_n\langle R_{C_n}x, J(y)\rangle + \mu_n\|y_n\|^2 \\
&= (\mu_n\|R_{C_n}x\|)^2 - 2\mu_n\langle R_{C_n}x, J(y_n)\rangle + \mu_n\|y_n\|^2 \\
&\leq \mu_n\|R_{C_n}x\|^2 - 2\mu_n\langle R_{C_n}x, J(y_n)\rangle + \mu_n\|y_n\|^2 \\
&= \mu_n(\|R_{C_n}x\|^2 - 2\langle R_{C_n}x, J(y_n)\rangle + \|y_n\|^2) \\
&= \mu_n V(R_{C_n}x, y_n) = \mu_n V(R_{C_n}x, R_{C_n}y_n) \leq \mu_n V(x, y_n) = V(x, y)
\end{aligned}$$

となる．すなわち，R_{C_0} は generalized nonexpansive 写像になる． □

次に Mosco 収束と sunny generalized nonexpansive retraction の各点収束に関する定理を証明するが, その前に必要な補題を証明する.

補題 4.3. E を狭義凸で回帰的な *Banach* 空間とし, *Fréchet* 微分可能なノルムを持つとする. 双対写像 J が弱点列連続とする. また, $\{C_n\}$ を E の空でない *sunny generalized nonexpansive retract* の列で, $C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$ が存在するものとする. もし, $C_0 \neq \emptyset$ ならば, 任意の $x \in E$ に対して, $u \in E$ が一意に存在して, $R_{C_n}x \rightharpoonup u$ で,

$$\langle x - u, J(u) - J(y)\rangle \geq 0, \ \forall y \in C_0$$

が成り立つ. さらに, E が *Kadec-Klee property* を持てば $R_{C_n}x \to u$ となる.

証明. $x \in E$ とする. C_0 が空でないことより, 定理 4.2 の証明と同様に, $\{R_{C_n}x\}$ が有界であることがわかる. また, E が回帰的なので, 弱収束する部分列 $\{R_{C_{n_i}}x\}$ をもつ. この弱収束先を $u \in E$ とおくと, 弱上極限集合の定義より, $u \in \text{w-Ls}_n C_n$ となる.

$y \in C_0$ とすると, ある点列 $\{y_n\} \subset E$ が存在し $y_n \to y$ かつ $y_n \in C_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ となる. これらより,

$$\langle x - R_{C_{n_i}}x, J(R_{C_{n_i}}x) - J(y_{n_i})\rangle \geq 0$$

を得る. よって,

$$\langle x, J(R_{C_{n_i}}x) - J(y_{n_i})\rangle - \langle R_{C_{n_i}}x, J(R_{C_{n_i}}x)\rangle + \langle R_{C_{n_i}}x, J(y_{n_i})\rangle \geq 0$$

となり,

$$\langle x, J(R_{C_{n_i}}x) - J(y_{n_i})\rangle + \langle R_{C_{n_i}}x, J(y_{n_i})\rangle \geq \|R_{C_{n_i}}x\|^2$$

を得る. ここで, i に関して下極限をとると,

$$\langle x, J(u) - J(y)\rangle + \langle u, J(y)\rangle \geq \liminf_i \|R_{C_{n_i}}x\|^2 \geq \|u\|^2$$

となる, よって

$$\langle x, J(u) - J(y)\rangle + \langle u, J(y)\rangle \geq \langle u, J(u)\rangle$$

を得る. これから

$$\langle x, J(u) - J(y)\rangle + \langle u, J(y) - J(u)\rangle \geq 0$$

となり,

$$\langle x - u, J(u) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C_0$$

となる. このような式を満たす u は一意であったので, $R_{C_n}x \rightharpoonup u$ となる.

次に, 後半部分を証明する. E が Kadec-Klee property をもつとする. $R_{C_n} \rightharpoonup u$ であることは分かっているので, $\|R_{C_n}x\| \to \|u\|$ を示せば十分である. $u \in \text{s-Li}_n C_n = C_0 = \text{w-Ls}_n C_n$ より, ある点列 $\{u_n\} \subset E$ が存在し $u_n \to u$ かつ $u_n \in C_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ となる. 命題 4.1 より,

$$\langle x - R_{C_n}x, J(R_{C_n}x) - J(u_n)\rangle \geq 0$$

となる. よって

$$\langle x, J(R_{C_n}x) - J(u_n)\rangle - \langle R_{C_n}x, J(R_{C_n}x)\rangle + \langle R_{C_n}x, J(u_n)\rangle \geq 0$$

となり

$$\langle x, J(R_{C_n}x) - J(u_n)\rangle + \langle R_{C_n}x, J(u_n)\rangle \geq \|R_{C_n}x\|^2$$

を得る. ここで, n に関して上極限をとると,

$$\limsup_n \|R_{C_n}x\|^2 \leq \langle x, J(u)-J(u)\rangle + \langle u, J(u)\rangle = \|u\|^2$$

となる. ノルムの弱下半連続性より,

$$\|u\| \leq \liminf_n \|R_{C_n}x\| \leq \limsup_n \|R_{C_n}x\| \leq \|u\|$$

となり, $\|R_{C_n}x\| \to \|u\|$ が成り立つ. よって, E が Kadec-Klee property をもっているので, $R_{C_n}x \to u$ となる. □

最後に, この補題を利用して Mosco 収束と sunny generalized nonexpansive retraction の各点収束に関する定理がいえる.

定理 4.4. E を一様凸で *Fréchet* 微分可能なノルムを持つ *Banach* 空間とし, 双対写像 J が弱点列連続であるとする. また, $\{C_n\}$ を E の空でない *sunny generalized nonexpansive retract* の列で, $C_0 = \text{M-lim}_n C_n$ が存在するものとする. もし, $C_0 \neq \emptyset$ ならば, C_0 は *sunny generalized nonexpansive retract* である. さらに, 任意の $x \in E$ に対して, $R_{C_n}x \to R_{C_0}x$ である.

証明. まず, C_0 が sunny generalized nonexpansive retract であることを示す. 補題 4.3 より, $x \in E$ に対して, C_0 の元 u が一意に存在して, $R_{C_n}x \to u$ かつ $\langle x-u, J(u)-J(y)\rangle \geq 0$ $(\forall y \in C_0)$ を満たす. また, 定理 4.2 より, C_0 が generalized nonexpansive retract となるので, R_{C_0} を E から C_0 の上への generalized nonexpansive retraction とする. μ を Banach limit とすると, 任意の $x^* \in E^*$ に対して, $\langle R_{C_0}x, x^*\rangle = \mu_n\langle R_{C_n}x, x^*\rangle = \langle u, x^*\rangle$ となるので, $R_{C_0}x = u$ となる. 命題 4.1 より, R_{C_0} が sunny になる. よって, C_0 は sunny generalized nonexpansive retract である. いま, R_{C_0} が E から C_0 の上への sunny generalized nonexpansive retraction であることがわかったので $R_{C_n}x \to R_{C_0}x$ となることも証明された. □

5 まとめ

これまで Hilbert 空間の距離射影の Banach 空間への拡張は 3 つの射影 (距離射影, generalized projection, sunny nonexpansive retraction) が知られていた. 本論文ではこの 3 つの射影とは違う第 4 の射影に関して議論してきた. そこでこの 4 つの射影の性質を比較してみたいと思う. 比較しやすいよう E を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, P_C, Π_C, Q_C, R_C を E から C の上への 距離射影, generalized projection, sunny nonexpansive retraction, sunny generalized nonexpansive retraction とする. このとき, $x \in E$, $x_0 \in C$ に対して,

$$\begin{aligned}
x_0 = P_C x &\Leftrightarrow \langle J(x-x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, & \forall y \in C,\\
x_0 = \Pi_C x &\Leftrightarrow \langle J(x)-J(x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, & \forall y \in C,\\
x_0 = Q_C x &\Leftrightarrow \langle x-x_0, J(x_0 - y)\rangle \geq 0, & \forall y \in C,\\
x_0 = R_C x &\Leftrightarrow \langle x-x_0, J(x_0)-J(y)\rangle \geq 0, & \forall y \in C
\end{aligned}$$

である. ただし, J は E 上の双対写像である. これらの考察から本論文で導入した sunny generalized nonexpansive retraction は自然な定義であると言えよう. 実際, この 4 つの射影を Hilbert 空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる. なぜなら, Hilbert 空間では双対写像 J は恒等写像 I にとなり, この 4 つの性質は (1.1) と一致するからである.

また, Banach 空間上での閉凸集合列の Mosco 収束に関した収束定理もこの 4 つの射影に対して証明された.

1984 年	塚田 [14]	⇒	距離射影
1999 年	木村-高橋 [9]	⇒	sunny nonexpansive retraction
2003 年	茨木-木村-高橋 [6]	⇒	generalized projection
2004 年	定理 4.4	⇒	sunny generalized nonexpansive retraction

最後に, 本論文では新しい generalized nonexpansive 写像を定義した. しかし, 残念ながら有用な具体例は見つかってはいない. これは, sunny generalized nonexpansive retraction や sunny generalized nonexpansive retract に関しても同じ事がいえる. よって今後の課題としては これらの写像, 射影の有用な具体例を発見することである. また, 定理 4.4 で双対写像 J の弱点列連続性を仮定したが, この仮定は Banach 空間では強い条件となる. 木村-高橋 [9] の定理もこの条件を外して証明することは出来ていない. また, 塚田 [14], 茨木-木村-高橋 [6] のように弱収束定理, 強収束定理と 2 段階で証明しているが, sunny nonexpansive retraction と sunny generalized nonexpansive retraction に関しての定理はそれができていない. よってこの 2 つの定理から "双対写像 J の弱点列連続性" の仮定をはずすこと, また, 弱収束と強収束のように 2 段階で証明することも興味のある問題である.

追記

本原稿の校正後に本研究の課題であった generalized nonexpansive 写像, sunny generalized nonexpansive retraction 及び sunny generalized nonexpansive retract の有用な具体例が見みつかった. 詳細は [7] に記する.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] D. Butnariu and A. N. Iusem, *Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 2000.

[3] R. E. Bruck, *Nonexpansive retract of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 384–386.

[4] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mapping in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 251–262.

[5] R. E. Bruck, *On the almost-convergence of iterative of a nonexpansive mapping on Hilbert space and the structure of the weak ω-limit set*, Israel J. Math., **29** (1978), 1–16.

[6] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence Theorems for Generalized Projections and Maximal Monotone Operators in Banach Spaces*, Abstract and Applied Analysis, **2003** (2003), 621–629.

[7] T. Ibaraki, W. Takahashi, *A new projection and Convergence theorems for the projections in Banach spaces*, to appear.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[9] Y. Kimura and W. Takahashi, *Strong convergence of sunny nonexpansive retractions in Banach spaces*, PanAmer. Math. J. **9** (1999), 1–6.

[10] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[12] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[13] 高橋渉, *Convergence Theorems for Nonlinear Projections in Banach spaces*, 京都大学数理解析研究所講究録 1396, 2004, pp. 49–59.

[14] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.