数理解析研究所講究録
1486 巻 2006 年 14-26

Grothendieck 不等式

京都大学大学院理学研究科 太田 崇啓 (Takahiro Ohta)
Graduate School of Science,
Kyoto University

1 準備

今回は主に G. Pisier [2] で示された作用素空間版の Grothendieck 不等式について述べる. C^*-環のカテゴリーにおける Grothendieck 不等式とは以下のものであった; 定数 $K>0$ で, A, B を C^*-環, $u\colon A\times B\to\mathbb{C}$ を有界双線型形式とすると, 任意の有限列 $(a_i,b_i)\subseteq A\times B$ に対し

$$\left|\sum_i u(a_i,b_i)\right|\leq K\|u\|\left[\left\|\sum_i a_i^*a_i\right\|+\left\|\sum_i a_ia_i^*\right\|\right]^{1/2}\left[\left\|\sum_i b_i^*b_i\right\|+\left\|\sum_i b_ib_i^*\right\|\right]^{1/2}$$

が成り立つ [1]. この不等式を作用素空間のカテゴリーに適応するには作用素空間の完全性が重要な役割を果たす.

まず作用素空間の言葉に直すために双線型形式の完全有界性について述べる. E, F, G を作用素空間, $u\colon E\times F\to G$ を双線型形式とする. u の完全有界性には一般に 2 つの定義がある.

定義 1.1. $u\colon E\times F\to G$ が連結的完全有界であるとは, C^*-環 B_1, B_2 に対し, 双線型写像

$$(u)_{B_1,B_2}\colon E\otimes_{\min}B_1\times F\otimes_{\min}B_2\to G\otimes_{\min}B_1$$

を $(u)_{B_1,B_2}(e\otimes b_1,f\otimes b_2)=u(e,f)\otimes b_1\otimes b_2,\ e\in E,\ f\in F,\ b_1\in B_1,\ b_2\in B_2$ で定めたとき, 任意の C^*-環 B_1, B_2 に対する上限

$$\sup_{B_1,B_2}\|(u)_{B_1,B_2}\|$$

が有限なときをいい, このときこの値を u の連結的完全有界ノルムとし

$$\|u\|_{jcb}=\sup_{B_1,B_2}\|(u)_{B_1,B_2}\|$$

とかく. 近似により

$$\|u\|_{jcb} = \sup_{n\geq 1} \|(u)_{M_n, M_n}\|$$

であり, また $G = \mathbb{C}$ のときは $\tilde{u}\colon E \to F^*$ を $\langle \tilde{u}(e), f\rangle = u(e, f)$ $(e \in E,\ f \in F)$ で定めたとき

$$\|u\|_{jcb} = \|\tilde{u}\|_{cb(E,F^*)}$$

が成り立つ.

定義 1.2. $u\colon E \times F \to G$ が完全有界であるとは, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 双線型写像

$$u_n\colon M_n(E) \times M_n(F) \to M_n(G)$$

を

$$u_n((e_{ij}), (f_{ij})) = \left(\sum_{k=1}^{n} u(e_{ik}, f_{kj})\right)_{ij}, \quad (e_{ij}) \in M_n(E),\ (f_{ij}) \in M_n(F)$$

で定めたとき, 上限

$$\sup_{n\geq 1} \|u_n\|$$

が有限なときをいい, このとき u の完全有界ノルムを

$$\|u\|_{cb} = \sup_{n\geq 1} \|u_n\|$$

で定義する.

命題 1.1. $u\colon E \times F \to G$ が完全有界であるための必要十分条件は, C^*-環 A に対し 双線型写像

$$u_A\colon E \otimes_{\min} A \times F \otimes_{\min} A \to G \otimes_{\min} A$$

を $u_A(e \otimes a_1, f \otimes a_2) = u(e, f) \otimes a_1 a_2,\ \ e \in E,\ f \in F,\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2$ で定めたとき, 任意の C^*-環 A に対する上限

$$\sup_{A} \|u_A\|$$

が有限なときをいい, このとき

$$\|u\|_{cb} = \sup_{A} \|u_A\|$$

が成り立つ.

双線型形式 $u\colon E\times F\to G$ に対し, その転置を ${}^tu\colon F\times E\to G$ とする. 上の定義から, 一般に $\|u\|_{jcb}\le\|u\|_{cb}$ であり, また $\|u\|_{jcb}=\|{}^tu\|_{jcb}$ であるが $\|u\|_{cb}=\|{}^tu\|_{cb}$ は一般には成り立たない.

次に上の Grothendieck 不等式と C^*-環上の状態との関係を述べる命題を証明する. この証明の中で使う最大最小原理は後にもしばしば出てくる.

命題 1.2. A, B を C^*-環, $E\subseteq A$, $F\subseteq B$ を部分空間, $u\colon E\times F\to\mathbb{C}$ を双線型形式, $\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\ge 0$ とする. このとき, 以下は同値である.

(i) A 上の状態 f_1,f_2 と B 上の状態 g_1,g_2 で任意の $a\in E$, $b\in F$ に対し

$$|u(a,b)|\le[\alpha_1f_1(a^*a)+\alpha_2f_2(aa^*)]^{1/2}[\theta_1g_1(b^*b)+\theta_2g_2(bb^*)]^{1/2}$$

を満たすものが存在する.

(ii) 任意の有限列 $(a_i)\subseteq E$, $(b_i)\subseteq F$ に対し,

$$\left|\sum_i u(a_i,b_i)\right|\le\left[\alpha_1\left\|\sum_i a_i^*a_i\right\|+\alpha_2\left\|\sum_i a_ia_i^*\right\|\right]^{1/2}\left[\theta_1\left\|\sum_i b_i^*b_i\right\|+\theta_2\left\|\sum_i b_ib_i^*\right\|\right]^{1/2}$$

が成り立つ.

証明. (i)$\Rightarrow$(ii) は Cauchy-Schwarz の不等式から簡単に出る. 逆を示すには, まず相加相乗平均不等式から有限列 $(a_i)\subseteq E$, $(b_i)\subseteq F$ に対し

$$2\sum_i|u(a_i,b_i)|\le\sup\left\{\alpha_1f_1(\sum_i a_i^*a_i)+\alpha_2f_2(\sum_i a_ia_i^*)+\theta_1g_1(\sum_i b_i^*b_i)+\theta_2g_2(\sum_i b_ib_i^*)\right\}\tag{1}$$

が従う. ここで上限は各状態 f_1,f_2 と g_1,g_2 をわたったものである. ここで最大最小原理と呼ばれるものを使う. S_1, S_2 をそれぞれ A^*, B^* の閉単位球に $*$-弱位相をいれたものとし, $S=S_1\times S_1\times S_2\times S_2$ 上の関数 $\varphi_{((a_i),(b_i))}$ を

$$\varphi_{((a_i),(b_i))}(s)=\alpha_1s_1^1(\sum_i a_i^*a_i)+\alpha_2s_1^2(\sum_i a_ia_i^*)+\theta_1s_2^1(\sum_i b_i^*b_i)+\theta_2s_2^2(\sum_i b_ib_i^*)-2\sum_i|u(a_i,b_i)|,\quad s=(s_1^1,s_1^2,s_2^1,s_2^2)\in S$$

で定義する. 式 (1) から, この関数の S 上での最大値は非負である. K_+ を $\varphi_{((a_i),(b_i))}$ たちの $C(S)$ での閉包とすると, これは $C(S)$ の閉凸錐である. 一方, K_- を $C(S)$ の元のうち強負関数たちからなる開集合とすると, K_+ と

K_- は交わらないから, Hahn-Banach 分離定理から S 上の確率測度 μ で任意の $a \in E,\ b \in F$ に対し

$$\int_S (\alpha_1 s_1^1(a^*a) + \alpha_2 s_1^2(aa^*) + \theta_1 s_2^1(b^*b) \\ + \theta_2 s_2^2(bb^*) - 2|u(a,b)|)d\mu(s) \geq 0$$

を満たすものが存在する. ここで $i = 1, 2$ に対し状態を

$$f_i(a) = \int_S s_1^i(a)d\mu(s),\ a \in A$$
$$g_i(b) = \int_S s_2^i(b)d\mu(s),\ b \in B$$

で定義すると,

$$2|u(a,b)| \leq \alpha_1 f_1(a^*a) + \alpha_2 f_2(aa^*) + \theta_1 g_1(b^*b) + \theta_2 g_2(bb^*)$$

が成り立つ. 上式で各 $\lambda > 0$ に対し a, b をそれぞれ $\lambda a, \lambda^{-1}b$ で置き換えたものを考え, $\lambda > 0$ での下限をとると, 相加相乗平均不等式から (i) が出る. □

作用素空間の間の双線型形式の完全有界性は作用素空間の Haagerup テンソル積を使って言いかえることができる. 作用素空間 E, F の Haagerup テンソル積を $(E \otimes_h F, \|\cdot\|_h)$ とかく. 定義から双線型形式 $u\colon E \times F \to G$ が完全有界であるための必要十分条件は u から写像 $U\colon E \otimes_h F \to G$ が定義され完全有界であることである. さらにこのとき

$$\|u\|_{cb} = \|U\|_{cb}$$

が成り立つ. $G = \mathbb{C}$ のときに分解定理を用いると Hilbert 空間 H と完全有界写像 $\sigma_1\colon E \to B(H, \mathbb{C}) = \bar{H}_r$, $\sigma_2\colon F \to B(\mathbb{C}, H) = H_c$ で $u(a,b) = \sigma_1(a)\sigma_2(b)$ かつ $\|u\|_{cb} = \|\sigma_1\|_{cb}\|\sigma_2\|_{cb}$ なるものが存在することがわかる. この場合 $\tilde{u}\colon E \to F^*$ に対しては $\tilde{u} = \sigma_2^*\sigma_1$ なる関係がある.

命題 1.3. E, F を作用素空間とし, $w \in E \otimes F$ とする. このとき $E \times F$ の有限列 (a_i, b_i) と $\lambda_i > 0$ で

$$\left\|\sum_i a_i a_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum_i b_i^* b_i\right\|^{1/2} = \|w\|_h \tag{2}$$

と

$$\left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} b_i b_i^*\right\|^{1/2} = \|{}^t w\|_h \tag{3}$$

を満たすものが存在する.

証明. 作用素空間の Haagerup テンソル積は単射的なので, E と F は有限次元としてよい. 写像 $u\colon E^* \otimes F^* \to \mathbb{C}$ を w から導かれるものとすると, $E \otimes_h F = (E^* \otimes_h F^*)^*$ から $\|u\|_{cb} = \|w\|_h$ である. 分解定理から, Hilbert 空間 H と完全有界写像の組

$$
\begin{aligned}
\psi_1\colon &\quad E^* \to B(H, \mathbb{C}) = \bar{H}^r \\
\psi_2\colon &\quad F^* \to B(\mathbb{C}, H) = H^c
\end{aligned}
$$

で $\|u\|_{cb} = \|\psi_1\|_{cb}\|\psi_2\|_{cb}$ を満たすものが存在する. H は有限次元としてよいから,

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_i e_{1i} \otimes a_i \in B(H, \mathbb{C}) \otimes E \\
z &= \sum_i e_{i1} \otimes b_i \in B(\mathbb{C}, H) \otimes F
\end{aligned}
$$

をそれぞれ ψ_1 と ψ_2 から出る元とすると

$$w = \sum_i a_i \otimes b_i$$

であり,

$$\|w\| = \left\|\sum_i a_i a_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum_i b_i^* b_i\right\|^{1/2}$$

から (2) を満たす (a_i, b_i) が見つかる. r を $\tilde{w}\colon E^* \to F$ の階数とし, この (a_i, b_i) に対し $\alpha\colon E^* \to \ell_2^r$ と $\beta\colon \ell_2^r \to F$ を

$$\alpha(\xi) = \sum_i \xi(a_i) e_i, \ \beta(e_i) = b_i$$

で定義される写像とすると, $\tilde{w} = \beta\alpha$ である. 簡単のために上のような形の写像に対し

$$
\begin{aligned}
|\alpha|_C &= \left\|\sum_i a_i^* a_i\right\|^{1/2}, &\qquad |\alpha|_R &= \left\|\sum_i a_i a_i^*\right\|^{1/2}, \\
|\beta|_C &= \left\|\sum_i b_i^* b_i\right\|^{1/2}, &\qquad |\beta|_R &= \left\|\sum_i b_i b_i^*\right\|^{1/2}
\end{aligned}
$$

と書く. すると任意の縮小写像 $\gamma\colon \ell_2^r \to \ell_2^r$ に対し

$$
\begin{aligned}
|\gamma\alpha|_C &\le |\alpha|_C, &\qquad |\gamma\alpha|_R &\le |\alpha|_R, \\
|\beta\gamma|_C &\le |\beta|_C, &\qquad |\beta\gamma|_R &\le |\beta|_R
\end{aligned}
$$

が言える. とくに $(a_i)_{i\le r}$ と $(b_i)_{i\le r}$ が一次独立としてよい. $\|\cdot\|_h$ の定義から写像 $\alpha_1\colon E^* \to \ell_2^r$ と $\beta_1\colon \ell_2^r \to F$ で $\tilde{w} = \beta_1\alpha_1$ かつ $|\alpha_1|_C|\beta_1|_R = \|^t w\|_h$ を

満たすものがとれる. (a_i, b_i) は一次独立であるから, ℓ_2^n 上の線形写像 γ と δ で

$$\alpha_1 = \gamma\alpha,\ \beta_1 = \beta\delta$$

を満たすものがある. $\beta_1\alpha_1 = \beta\alpha$ だから $\gamma\delta = I$ である. γ を分解してユニタリ γ_1, γ_2 と正の対角行列 $D = \mathrm{diag}(D_i)$ によって

$$\gamma = \gamma_1 D \gamma_2$$

と表すと,

$$\tilde{w} = \beta_1\alpha_1 = (\beta\gamma_2^{-1}D^{-1})(D\gamma_2\alpha)$$

である. $\hat{\alpha} = \gamma_2\alpha$, $\hat{\beta} = \beta\gamma_2^{-1}$ とおき, $(\hat{a}_i)$ と $(\hat{b}_i)$ をそれぞれ $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ から出てくる E と F の有限列とすると,

$$\left\|\sum_i \hat{a}_i\hat{a}_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum_i \hat{b}_i^*\hat{b}_i\right\|^{1/2} = |\hat{\alpha}|_R|\hat{\beta}|_C = \|w\|_h$$

である. また,

$$\left\|\sum_i D_i^2\hat{a}_i^*\hat{a}_i\right\|^{1/2}\left\|\sum_i D_i^{-2}\hat{b}_i\hat{b}_i^*\right\|^{1/2} = |\hat{\alpha}_1|_C|\hat{\beta}_1|_R = \|{}^t w\|_h$$

でもあるから, $\lambda_i = \sqrt{D_i}$ とすればよい. □

作用素空間版の Grothendieck 不等式を証明するときには C^*-環の WEP 性と作用素空間の完全性の 2 つが重要な役割を果たす.

定義 1.3. C^*-環 A が WEP (weak expectation property) であるとは, ある Hilbert 空間 H が存在して包含写像 $A \to A^{**}$ が $B(H)$ を通るように完全縮小写像の積に分解されるときをいう. Kirchberg により C^*-環 A が WEP であることと同値な条件として以下の条件が知られている;

$$A \otimes_{\min} C^*(\mathbb{F}_\infty) = A \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}_\infty).$$

また, C^*-環 A が QWEP であるとは, A がある WEP C^*-環 の商空間になっているときをいう.

定義 1.4. X を作用素空間とする. X が 完全であるとは, 任意の C^*-環 B とその閉イデアル I に対し, 自然な写像

$$T\colon (X \otimes_{\min} B)/(X \otimes_{\min} I) \to X \otimes_{\min} (B/I)$$

が同型なときをいう. このとき, X の完全性を表す定数 $ex(X)$ を

$$ex(X) = \sup \|T^{-1}\|$$

で定義する. ここで, 上限は全ての C^*-環 B とその閉イデアル I に対してとる. この上限は $B = B(\ell_2)$, $I = K(\ell_2)$ で達成されることが知られているので, X が完全なら $ex(X)$ は有限の値をとる.

作用素空間 E が完全ならば, 任意の ε と $t \in E \otimes (B/I)$ に対し, t の引き戻し $\hat{t} \in E \otimes B$ で $\|\hat{t}\|_{\min} \leq (1+\varepsilon) ex(E) \|t\|_{\min}$ を満たすものがとれる. 実際,

$$t = \sum_i e_i \otimes (b_i + I)$$

とおくと

$$T^{-1}(t) = \sum_i e_i \otimes b_i + E \otimes I$$

であり, これの $E \otimes B$ での適当な引き戻しを $\hat{t}$ とすればよい.

2 Grothendieck 不等式の証明

補題 2.1. E, F を完全作用素空間とし, $C = ex(E)ex(F)$ とする. A_1, A_2 を C^*-環 でどちらか一方が QWEP であるとする. $u\colon E \times F \to B(H)$ を連結的完全有界双線型写像とすると, 任意の有限列 $(a_i, x_i) \subseteq E \times A_1$ と $(b_j, y_j) \subseteq F \times A_2$ に対し,

$$\left\| \sum_{i,j} u(a_i, b_j) \otimes x_i \otimes y_j \right\|_{B(H) \otimes_{\min} (A_1 \otimes_{\max} A_2)}$$
$$\leq C \|u\|_{jcb} \left\| \sum_i a_i \otimes x_i \right\|_{E \otimes_{\min} A_1} \left\| \sum_j b_j \otimes y_j \right\|_{F \otimes_{\min} A_2} \tag{4}$$

が成り立つ.

証明. A_1 が QWEP であるとし, WEP C^*-環 B_1 とその閉イデアル I_1 によって $A_1 = B_1/I_1$ とかけたとする. また, max テンソルの定義から A_2 は可分としてよい. すると $B_2 = C^*(\mathbb{F}_\infty)$ の適当なイデアル I_2 をとって $A_2 = B_2/I_2$ とできる. $q_i\colon B_i \to A_i$ $(i = 1, 2)$ を自然な商写像とする. B_1 が WEP であるから

$$B_1 \otimes_{\min} B_2 = B_1 \otimes_{\max} B_2$$

であり, ゆえに

$$\|q_1 \otimes q_2\colon B_1 \otimes_{\min} B_2 \to A_1 \otimes_{\max} A_2\|_{cb} \leq 1$$

が成り立つ. これより,

$$\|I_{B(H)} \otimes q_1 \otimes q_2\colon B(H) \otimes_{\min} B_1 \otimes_{\min} B_2 \to B(H) \otimes_{\min} (A_1 \otimes_{\max} A_2)\| \leq 1$$

がいえる. 今

$$\left\|\sum_i a_i \otimes x_i\right\|_{\min} \leq 1, \quad \left\|\sum_j b_j \otimes y_j\right\|_{\min} \leq 1$$

を仮定する. すると $t_1 \in E \otimes B_1$, $t_2 \in F \otimes B_2$ で

$$(I \otimes q_1)(t_1) = \sum_i a_i \otimes x_i, \ (I \otimes q_2)(t_2) = \sum_j b_j \otimes y_j$$

かつ $\|t_1\|_{\min} \leq ex(E)$, $\|t_2\|_{\min} \leq ex(F)$ を満たすものがとれる.

$$\|(u)_{B_1,B_2}(t_1,t_2)\| \leq \|u\|_{jcb}\|t_1\|_{\min}\|t_2\|_{\min}$$

であり, また

$$(I_{B(H)} \otimes q_1 \otimes q_2) \circ (u)_{B_1,B_2}(t_1,t_2) = (u)_{A_1,A_2} \circ (I \otimes q_1, I \otimes q_2)(t_1,t_2)$$

から

$$\left\|\sum_{i,j} u(a_i,b_j) \otimes x_i \otimes y_j\right\|_{B(H)\otimes_{\min}(A_1\otimes_{\max}A_2)} \leq C\|u\|_{jcb}$$

がいえる. □

上の補題を適用するための von Neumann 環として Fock 空間上の生成作用素からなる von Neumann 環を考える. H を Hilbert 空間でその正規直行基底が $\{e_i\} \cup \{e'_i\}$, $i \in I$ で表されているとする. このとき

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$$

を完全 Fock 空間という. $\mathcal{F}(H)$ の真空ベクトルを Ω とし, 真空状態 φ を

$$\varphi(x) = \langle x\Omega, \Omega\rangle, \ x \in B(\mathcal{F}(H))$$

で定義する. $\xi \in \mathcal{F}(H)$ に対し, $\mathcal{F}(H)$ 上の生成作用素を以下のようにかく.

$$\ell(\xi)(\eta) = \xi \otimes \eta, \ r(\xi)(\eta) = \eta \otimes \xi.$$

$\lambda > 0$ に対し作用素 $c_i(\lambda)$, $d_i(\lambda)$ を以下で定義する.

$$c_i(\lambda) = \lambda^{1/2}\ell(e_i) + \lambda^{-1/2}\ell(e'_i)^*, \ d_i(\lambda) = \lambda^{1/2}r(e'_i) + \lambda^{-1/2}r(e_i)^*$$

補題 2.2. $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$ に対し $x_i = c_i(\lambda_i)$, $y_i = d_i(\lambda_i)$ とすると, 以下が成り立つ.

(i) 任意の作用素空間 E とその有限列 $(a_i) \subseteq E$ に対し

$$\left\|\sum_i a_i \otimes x_i\right\|_{\min} \leq \left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} a_i a_i^*\right\|^{1/2}$$

$$\left\|\sum_i a_i \otimes y_i\right\|_{\min} \leq \left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} a_i a_i^*\right\|^{1/2},$$

(ii) $x_i y_j = y_j x_i$ かつ $x_i^* y_j = y_j x_i^*$,

(iii) $\langle x_i y_j \Omega, \Omega\rangle = \delta_{ij}$.

証明. (i) 生成作用素は等長でしかも

$$\sum_i \ell(e_i)\ell(e_i)^* \leq I$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_i a_i \otimes x_i\right\|_{\min} &\leq \left\|\sum_i \lambda_i^{1/2} a_i \otimes \ell(e_i)\right\| + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1/2} a_i \otimes \ell(e_i')^*\right\| \\ &\leq \left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} a_i a_i^*\right\|^{1/2}.\end{aligned}$$

r_i に対しても同様である.

(ii) (iii) は定義に従って計算すればよい. □

補題 2.3. $\{x_i\}_{i\in I}$ によって生成される von Neumann 環 $W^*(x_i : i \in I)$ は QWEP である.

作用素空間版の Grothendieck 不等式は以下のものである.

定理 2.4. A, B を C^*-環で, $E \subseteq A$ と $F \subseteq B$ を完全作用素空間とする. $C = ex(E)ex(F)$ とすると, 任意の連結的完全有界双線型形式 $U : E \times F \to \mathbb{C}$ と有限列 $(a_i, b_i) \subseteq E \times F$ と $\lambda > 0$ に対し

$$\begin{aligned}\left|\sum_i U(a_i, b_i)\right| \leq C\|U\|_{jcb} &\left[\left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} a_i a_i^*\right\|^{1/2}\right] \\ &\left[\left\|\sum_i \lambda_i b_i^* b_i\right\|^{1/2} + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} b_i b_i^*\right\|^{1/2}\right] \qquad (5)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\left|\sum_i U(a_i, b_i)\right| \leq 2C\|U\|_{jcb} &\left[\left\|\sum_i a_i a_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum_i b_i^* b_i\right\|^{1/2}\right. \\ &\left. + \left\|\sum_i a_i^* a_i\right\|^{1/2} \left\|\sum_i b_i b_i^*\right\|^{1/2}\right] \qquad (6)\end{aligned}$$

もいえる.

証明. A_1, A_2 をそれぞれ $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ で生成される von Neumann 環とする. すると,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_i U(a_i,b_i)\right| &= \left|\sum_{i,j} U(a_i,b_j)\langle x_iy_j\Omega,\Omega\rangle\right| \\
&\leq \left\|\sum_{i,j} U(a_i,b_j)x_i\otimes y_j\right\|_{A_1\otimes_{\max}A_2} \\
&\leq C\|U\|_{jcb}\left\|\sum_i a_i\otimes x_i\right\|_{\min}\left\|\sum_i b_i\otimes y_i\right\|_{\min}
\end{aligned}$$

である. ここで, 1 行目では Lemma 2.2 (iii) を, 2 行目では Lemma 2.2 (ii) を, 3 行目では Lemma 2.1 を使った. ゆえに Lemma 2.2 (i) から (5) がいえる. 任意の $j\in I$ に対し

$$\lambda_j = \left\|\sum_i b_ib_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum_i b_i^*b_i\right\|^{-1/2}$$

とおけば (6) もいえる. □

定理 2.5. $K = 2^{3/2}C$ とおく. 任意の連結的完全縮小双線型形式 $U\colon E\times F\to\mathbb{C}$ に対し, A 上の状態 f_1, f_2 と B 上の状態 g_1, g_2 が存在して, 任意の $(a,b)\in E\times F$ に対し

$$|U(a,b)| \leq K[(f_1(aa^*)g_1(b^*b))^{1/2} + (f_2(a^*a)g_2(bb^*))^{1/2}] \tag{7}$$

が成立する. さらに, 任意の有限列 $(a_i,b_i)\subseteq E\times F$ と $\lambda_i > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\left|\sum_i U(a_i,b_i)\right| \leq K\Bigg[&\left\|\sum_i a_ia_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum_i b_i^*b_i\right\|^{1/2} \\
&+ \left\|\sum_i \lambda_i a_i^*a_i\right\|^{1/2}\left\|\sum_i \lambda_i^{-1}b_ib_i^*\right\|^{1/2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{8}$$

がいえる. その上, ある K に対し (7) を満たす双線型形式 U は双線型形式 u, v で

$$\max\{\|u\|_h, \|{}^tv\|_h\} \leq K$$

を満たすものによって $U = u + v$ と分解される.

証明. 定理 2.4 から

$$\sum_i |U(a_i,b_i)| \le C\left[\left\|\sum_i \lambda_i a_i^* a_i\right\| + \left\|\sum_i \lambda_i^{-1} b_i b_i^*\right\|\right.$$
$$\left.\left\|\sum_i \lambda_i^{-1} a_i a_i^*\right\| + \left\|\sum_i \lambda_i b_i^* b_i\right\|\right]$$

であり, 最大最小原理から状態 f_1, f_2 と状態 g_1, g_2 で, 任意の $\lambda > 0$ に対し

$$\sum_i |U(a_i,b_i)| \le C[\lambda f_1(a^*a) + \lambda^{-1} g_1(bb^*) + \lambda^{-1} f_2(aa^*) + \lambda g_2(b^*b)]$$

が成り立つものが存在する. 相加相乗平均不等式より

$$\begin{aligned} |U(a,b)| &\le 2C(\lambda f_1(a^*a) + \lambda^{-1} f_2(aa^*))^{1/2} + (\lambda^{-1} g_1(bb^*) + \lambda g_2(b^*b))^{1/2} \\ &\le 2C(f_1(a^*a)g_1(bb^*) + f_2(aa^*)g_2(b^*b) + R_\lambda \end{aligned}$$

がいえる. ここで,

$$R_\lambda = \lambda^2 f_1(a^*a)g_2(b^*b) + \lambda^{-2} f_2(aa^*)g_1(bb^*)$$

である. しかし,

$$\inf_{\lambda>0} R_\lambda = 2(f_1(a^*a)g_2(b^*b)f_2(aa^*)g_1(bb^*))^{1/2}$$

であるからなので, (7) が出る. Cauchy-Schwarz 不等式から (8) もわかる. これより, 任意の $w \in E \otimes F$ に対し,

$$|\langle U, w\rangle| \le K[\|w\|_h + \|{}^t w\|_h]$$

なので, U から空間

$$\{(w, {}^t w) \colon w \in E \otimes F\} \subseteq (E \otimes_h F) \oplus_1 (F \otimes_h E)$$

上の連続汎関数が定義される. ここで, 空間 $(E \otimes_h F) \oplus_1 (F \otimes_h E)$ は

$$(E \otimes_h F)^* \oplus_\infty (F \otimes_h E)^*$$

の双対空間の部分空間としてみた作用素空間である. よって連続汎関数 $\varphi_1 \in (E \otimes_h F)^*$ と $\varphi_2 \in (F \otimes_h E)^*$ でそれぞれノルムが K 以下かつ任意の $w \in E \otimes F$ に対し

$$\langle U, w\rangle = \varphi_1(w) + \varphi_2({}^t w)$$

なものが存在する. u, v をそれぞれ φ_1, φ_2 から導かれる双線型形式とすると, $\|u\|_{cb}$ と $\|{}^t v\|_{cb}$ はともに K 以下で $U = u + v$ である. □

系 2.6. A, B は C^*-環で, $E \subseteq A$, $F \subseteq B$ を完全作用素空間, $K = 2^{3/2}ex(E)ex(F)$ とする. 任意の双線型形式 $U\colon E \times F \to \mathbb{C}$ は拡張 $\hat{U}\colon A \times B \to \mathbb{C}$ で $\|\hat{U}\|_{cb} \leq 2K\|U\|_{cb}$ を満たすものをもつ.

証明. $\varphi_1 \in (E \otimes_h F)^*$, $\varphi_2 \in (F \otimes_h E)^*$ を定理 2.5 の証明で出てきたものとすると, Hahn-Banach の定理からそれぞれ拡張 $\Phi_1\colon A \otimes_h B \to \mathbb{C}$ と $\Phi_2\colon B \otimes_h A \to \mathbb{C}$ で $\|\Phi_i\| = \|\varphi_i\|$ $(i = 1, 2)$ なものが存在する. $U_i\colon A \times B \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ を Φ_i から出る双線型形式とすると,

$$\|U_1 + U_2\|_{jcb} \leq \|U_1\|_{jcb} + \|{}^tU_2\|_{jcb} \leq \|U_1\|_{cb} + \|U_2\|_{cb} = \|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|$$

なので $\hat{U} = U_1 + U_2$ とすればよい. □

系 2.7. A, B は C^*-環で, $E \subseteq A$, $F \subseteq B$ を完全作用素空間, $C = ex(E)ex(F)$ とする. そのとき任意の完全有界写像 $T\colon E \to F^*$ に対し Hilbert 空間 H, K と完全有界写像の組

$$v\colon E \to H_r \oplus K_c$$
$$w\colon H_r \oplus K_c \to F^*$$

で $T = wv$ かつ $\|w\|_{cb}\|v\|_{cb} \leq 2^{5/2}C\|T\|_{cb}$ なものが存在する.

証明. $u\colon E \times F \to \mathbb{C}$ を T から導かれる双線型形式とすると, 系 2.6 の証明から u は $u = u_1 + u_2$ で $\max\{\|u_1\|_{cb}, \|{}^tu_2\|_{cb}\} \leq 2^{3/2}C\|u\|_{jcb}$ と分解される. u_i $(i = 1, 2)$ から出る $\tilde{u}_i\colon E \to F^*$ はそれぞれ分解

$$\tilde{u}_1\colon E \xrightarrow{\alpha_1} H_r \xrightarrow{\beta_1} F^*$$
$$\tilde{u}_2\colon E \xrightarrow{\alpha_2} K_c \xrightarrow{\beta_2} F^*$$

で $\max\{\|\alpha_1\|_{cb}\|\beta_1\|_{cb}, \|\alpha_2\|_{cb}\|\beta_2\|_{cb}\} \leq 2^{3/2}C\|u\|_{jcb}$ かつ $\|\alpha_i\|_{cb} = \|\beta_i\|_{cb}$ $(i = 1, 2)$ を満たすものをもつ. $v\colon E \to H_r \oplus K_c$ と $w\colon H_r \oplus K_c \to F^*$ をそれぞれ

$$v(e) = \alpha_1(e) \oplus \alpha_2(e)$$
$$w(x \oplus y) = \beta_1(x) + \beta_2(y)$$

で定義すると $\tilde{u} = wv$ かつ

$$\|w\|_{cb}\|v\|_{cb} \leq \max\{\|\alpha_i\|_{cb}, \|\alpha_2\|_{cb}\}(\|\beta_1\|_{cb} + \|\beta_2\|_{cb}) \leq 2^{5/2}C\|u\|_{jcb}$$

を満たす. □

系 2.8. 作用素空間 E とその双対空間 E^* が共に完全であるならば, ある Hilbert 空間 H, K に対して E は $H_r \oplus K_c$ に作用素空間として同型である.

証明. 包含写像 $id_E\colon E \to (E^*)^*$ は系 2.7 より分解 $E \to H_r \oplus K_c \to (E^*)^*$ をもつ．よって完全有界直交射影 $P\colon H_r \oplus K_c \to E$ が存在する．部分空間 $X \subseteq H$, $Y \subseteq K$ をそれぞれ

$$X = \{\xi \in H \colon \xi \oplus 0 \in E\}$$
$$Y = \{\eta \in K \colon 0 \oplus \eta \in E\}$$

で定義すると E は $X_r \oplus (E \cap (X_r^{\perp} \oplus Y_c^{\perp})) \oplus Y_c$ と同型である．真ん中の空間 $E \cap (X_r^{\perp} \oplus Y_c^{\perp})$ は稠密なところで定義された閉作用素 $\Gamma\colon (E \setminus X) \to (F \setminus Y)$ のグラフに同型である．[2] よりこのグラフは $H_r \oplus K_c$ の形の空間に同型である． □

参考文献

[1] U. Haagerup, *The Grothendieck inequality for bilinear forms on C^*-algebras*, Adv. in Math., 56 (1985), 93-116

[2] G. Pisier, *Completely bounded maps into certain Hilbertian operator spaces*, Intern. Math. Research Notices, 74 (2004), 3983-4018

[3] G. Pisier, D. Shlyakhtenko, *Grothendieck's theorem for operator spaces*, Invent. Math., 150 (2002), 185-217