

コンタクトプロセスとその応用

独立行政法人科学技術振興機構 ERATO 合原複雑数理モデルプロジェクト

杉峰 伸明 (Nobuaki Sugimine)

Aihara Complexity Modelling Project, ERATO, JST

本稿では、(無限粒子系における) グラフ表現を用いた解析例のひとつを紹介しつつ、コンタクトプロセス [1, 2, 3, 4, 5], 多様型コンタクトプロセス [6] について概説する. コンタクトプロセスは \mathbb{Z}^d -格子上の各頂点が $\{0, 1\}$ のどちらかの値を, 多様型コンタクトプロセスは \mathbb{Z}^d -格子上の各頂点が $\{0, 1, 2\}$ のどれかの値をとるマルコフ過程 $\{\eta_t\}_{t \geq 0}$ である. ここで, \mathbb{Z}^d -格子とは,

$$\begin{cases} \text{頂点集合: } \{(x_1, \dots, x_d) : \text{各 } x_i \text{ は整数}\} \\ \text{隣接関係: } x \sim y \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + \dots + |x_d - y_d| = 1 \end{cases}$$

をもつグラフのことである. グラフ表現は, \mathbb{Z}^d -格子に限らず一般のグラフ上で用いることが可能で, [7] ではツリー上の拡張型コンタクトプロセスに対して用いられている.

コンタクトプロセス (CP) の遷移ルールは次で与えられる: 頂点 x に隣接する状態 1 の頂点数を $n_1(x)$ で表すと, 頂点 x での状態遷移は,

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow 1 & \text{遷移率 } \lambda n_1(x) \\ 1 \rightarrow 0 & \text{遷移率 } 1 \end{cases}$$

となる. ただし, $\lambda \geq 0$ である. (1) より, 一旦全ての頂点が状態 0 になると, それ以後どの頂点も状態 1 に遷移することはなく状態遷移が起こらなくなる. 平均場近似によって $I(t) = \mathcal{P}(\eta_t(x) = 1)$ が従う方程式を導出すると (現在の所, 閉じた方程式系は発見されていない),

$$(2) \quad I'(t) = -I(t) + 2d\lambda\{1 - I(t)\}I(t)$$

となる. (2) が一定人口下での SIS モデルであることより, コンタクトプロセスが, 状態 0 ならば感染受容者, 状態 1 ならば感染者とした伝染病モデルとなっていることが覗える.

多様型コンタクトプロセス (MCP) の遷移ルールは次で与えられる: 頂点 x に隣接する状態 1 の頂点数を $n_1(x)$ で, 状態 2 の頂点数を $n_2(x)$ で表すと, 頂点 x での状態遷移は,

$$(3) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow 1 & \text{at rate } \lambda_1 n_1(x) \\ 1 \rightarrow 0 & \text{at rate } 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \rightarrow 2 & \text{at rate } \lambda_2 n_2(x) \\ 2 \rightarrow 0 & \text{at rate } 1 \end{cases}$$

となる. ただし, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ である.

$$(4) \quad \begin{cases} I_1'(t) = -I_1(t) + 2d\lambda_1\{1 - I_1(t) - I_2(t)\}I_1(t) \\ I_2'(t) = -I_2(t) + 2d\lambda_2\{1 - I_1(t) - I_2(t)\}I_2(t) \end{cases}$$

は, $I_i(t) = \mathcal{P}(\eta_t(x) = i)$ が従う方程式を平均場近似によって導出したものである.

目標. $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_c(\text{CP})$ とすると, (4) は共存可能であるのに対して, (3) は $d \geq 3$ ならば共存可能だが $d = 1, 2$ では共存不可能となる. このことは, グラフ表現を介した解析がランダム・ウォークの再帰性に帰着されることに依るが [6], それを概説することが本稿の目標である. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは, (4) と同様に (3) でも次元によらず共存不可能である.

まず, コンタクトプロセスについて説明する.

グラフ表現 (CP). 各頂点 x に, 事象が起こる時刻を知らせる鐘の役割をもつ独立なポアソン過程 $\{D^x; E^{xy}, y \sim x\}$ をおく. ここで, D^x は割合 1 の, E^{xy} は割合 λ のポアソン過程である. 時刻 t において D^x が鳴ると, $\eta_t(x) = 0$ となる. 時刻 t において E^{xy} が鳴ると, $\eta_{t-}(x) = 1$ ならば $\eta_{t-}(y)$ に依らず $\eta_t(x) = \eta_t(y) = 1$ となる. $\eta_{t-}(x) = 0$ ならば何も変化しない. $(x, t) \in \mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ に, 時刻 t で D^x が鳴れば recovery symbol (\times) を, E^{xy} が鳴れば x から y への infection arrow (\rightarrow) をおく. 時間列 $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ を, $t_0 = s, t_{n+1} = s'$ であつて, 各 i に対して $t_i < t_{i+1}$ となるようにとる. 時刻と頂点が交互に現れる列 $(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n, t_{n+1})$ が以下の条件をみたすとき, この列を (x_0, s) から (x_n, s') への active path と呼ぶ (図 1):

- (i) 全ての i に対して, $\{x_i\} \times [t_i, t_{i+1}]$ 内に recovery symbol が現れない.
- (ii) 全ての i に対して, 時刻 t_i に x_{i-1} から x_i への infection arrow が現れる.
- (iii) 全ての i に対して, $\eta_{t_i-}(x_{i-1}) = 1$ である.

時刻 t で状態 1 である頂点の集合を Λ_t とする. すなわち, $\Lambda_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta_t(x) = 1\}$ である. 初期条件をもつときには, Λ_t^A と書く ($A = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi(x) = 1\}$, $\mathcal{P}(\eta_0 \equiv \xi) = 1$). λ を明示するときには, $\Lambda_{\lambda, t}$ などと書く. このとき,

$$\{y \in \mathbb{Z}^d : \text{ある } x \in A \text{ に対して, } (x, 0) \text{ から } (y, t) \text{ への active path がある}\}$$

は $\{\Lambda_t^A\}_{t \geq 0}$ と同分布である. グラフ表現の利点に, A, λ に関する単調性が自明に従うことがある:

$$(5) \quad A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_t^A \subset \Lambda_t^B, \forall t > 0) = 1, \quad \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_{\lambda, t} \subset \Lambda_{\lambda', t}, \forall t > 0) = 1.$$

自己双対性 (CP). 時刻 t までのグラフ表現において, infection arrow を逆向きにして時刻 t から時刻 0 まで (逆向き) active path を辿っても得られる分布は同じである. つまり,

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \text{ある } y \in B \text{ に対して, } (y, t) \text{ から } (x, 0) \text{ への (逆向き) active path がある}\}$$

も $\{\Lambda_t^B\}_{t \geq 0}$ と同分布である. さらに, 時刻 0 に A のどれかの頂点から active path を辿り時刻 t に B のどこかの頂点に辿りつけば, 時刻 t に B のどれかの頂点から (逆向き) active path を辿り時刻 0 に A のどこかの頂点に辿りつくので, 自己双対性と呼ばれる以下の性質が成り立つ:

$$(6) \quad \mathcal{P}(\Lambda_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathcal{P}(\Lambda_t^B \cap A \neq \emptyset) \quad (\forall A, B \subset \mathbb{Z}^d).$$

$\Lambda_s = \emptyset$ ならば $\Lambda_t = \emptyset$ ($\forall t \geq s$) に注意して, (6) において $B = \mathbb{Z}^d$ とすると,

$$(7) \quad \mathcal{P}(\Lambda_t^A \neq \emptyset, \forall t \geq 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Lambda_t^A \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Lambda_t^{\mathbb{Z}^d} \cap A \neq \emptyset) = \bar{\nu}(\{B : B \cap A \neq \emptyset\})$$

を得る. ここで, $\Lambda_t^{\mathbb{Z}^d}$ がある定常分布 $\bar{\nu}$ に収束することは, (5) の単調性とマルコフ性より従う.

臨界値 (CP). 臨界値と呼ばれる以下をみたす値 λ_c ($\lambda_c^{(d)}, \lambda_c(\text{CP})$ と書く) が存在する:

$$\lambda \leq \lambda_c \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_{\lambda, t}^{\{O\}} \neq \emptyset, \forall t \geq 0) = 0, \quad \lambda > \lambda_c \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_{\lambda, t}^{\{O\}} \neq \emptyset, \forall t \geq 0) > 0.$$

伝染病モデルとしては, $\lambda \leq \lambda_c$ ならば伝染病が撲滅され, $\lambda > \lambda_c$ ならば伝染病が持続する可能性があることを意味している. (2) の閾値が $1/(2d)$ である一方,

$$\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c^{(d)} \leq \frac{2}{d} \quad (\forall d \geq 1), \quad \lim_{d \rightarrow \infty} 2d\lambda_c^{(d)} = 1$$

などが知られている。

完全収束定理 (CP). δ_\emptyset を $\delta_\emptyset(\emptyset) = 1$ である分布とする。また $\alpha_A = \mathcal{P}(\Lambda_t^A \neq \emptyset, \forall t \geq 0)$ と書く。このとき、任意の $A \subset \mathbb{Z}^d$ に対して、

$$\Lambda_t^A \Rightarrow \alpha_A \bar{\nu} + (1 - \alpha_A) \delta_\emptyset \quad (\text{分布の弱収束})$$

となる。ただし、 $\lambda \leq \lambda_c$ ならば $\bar{\nu} = \delta_\emptyset$ であって、 $\lambda > \lambda_c$ ならば $\bar{\nu} \neq \delta_\emptyset$ (特に、 $\bar{\nu}(\emptyset) = 0$) である。

(無限系) 絶滅時刻 (CP). $\lambda > \lambda_c$ とする。 $A \subset \mathbb{Z}^d$ 上の頂点では状態 1, その他では状態 0 を初期状態として、全ての頂点が状態 0 になる最初の時刻を

$$\tau^A = \inf\{t > 0 : \Lambda_t^A = \emptyset\}$$

とすると、

$$(8) \quad \mathcal{P}(t < \tau^A < \infty) \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad \mathcal{P}(\tau^A < \infty) \leq C e^{-\varepsilon |A|}$$

である。ただし、 C と ε は A と t に無関係な正の定数である。

(有限系) 絶滅時刻 (CP). $\{1, \dots, N\}^d$ 上に制限したコンタクトプロセス $\Lambda_{N,t}$ を考え、全ての頂点が状態 1 を初期状態として、全ての頂点が状態 0 になる最初の時刻を

$$\tau_N = \inf\{t > 0 : \Lambda_{N,t}^{\{1, \dots, N\}^d} = \emptyset\}$$

とする。このとき、

$$(9) \quad \lambda < \lambda_c \Rightarrow \tau_N \approx \log N, \quad \lambda > \lambda_c \Rightarrow \tau_N \approx \exp(N^d)$$

である (正確で詳しいことは [5] を参照して頂きたい)。

次に、多様型コンタクトプロセスについて説明する。

グラフ表現 (MCP). 各頂点 x に、独立なポアソン過程 $\{D^x; E_1^{xy}, E_2^{xy}, y \sim x\}$ をおく。ただし、 D^x は割合 1 の、 E_i^{xy} は割合 λ_i のポアソン過程である。時刻 t において D^x が鳴ると、 $\eta_t(x) = 0$ となる。時刻 t において E_i^{xy} が鳴ると、 $\eta_{t-}(x) = i$, $\eta_{t-}(y) = 0$ ならば $\eta_t(x) = \eta_t(y) = i$ となる。それ以外ならば何も変化しない。

以後、 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ とする。コンタクトプロセスとの比較から、 $\lambda \leq \lambda_c(\text{CP})$ ならば初期状態に依らず、全ての頂点が状態 0 という状態に収束することが分かるので、 $\lambda > \lambda_c(\text{CP})$ とする。

第一祖先 (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). E^{xy} は割合 λ のポアソン過程とする。 E_1^{xy} と E_2^{xy} は同分布なので、(強マルコフ性より) $\{D^x; E^{xy}, y \sim x\}$ だけを用意し、時刻 t において E^{xy} が鳴ると、 $\eta_{t-}(x) = i$, $\eta_{t-}(y) = 0$ ならば $\eta_t(x) = \eta_t(y) = i$ となるとしてもよい。状態 1 も 2 もコンタクトプロセスと同様に振る舞うが、 E^{xy} が鳴ったとしても、例えば、 $\eta_{t-}(x) = 1$, $\eta_{t-}(y) = 2$ ならば $\eta_t(x) = 1$, $\eta_t(y) = 2$ のままなので、active path の扱いに注意が必要である。なぜなら、 $\eta_0(x) = i$ であって $(x, 0)$ から (y, t) に active path があつたととしても、 $\eta_t(y) = i$ とは限らないからである。問題となるのは、 $\eta_0(x) = 1$, $\eta_0(x') = 2$ であって、 $(x, 0)$ と $(x', 0)$ の両方から (y, t) に active path があるときに、 $\eta_t(y) = 1$ か $\eta_t(y) = 2$ のどちらになるのか? である。

(y, t) から $\text{symbol}(x)$ を避けて (逆向き) active path を辿る。このとき、 (y, t) から辿りつける $(x, 0)$ に対して、(逆向き) arrow に遭遇する度にそれを優先的に通って辿りつける頂点の順に、 $\{x_k\}_{k=1}^K$

と大きい番号を付ける. この頂点 x_1, \dots, x_K を祖先と呼ぶ (図 2). 特に, x_1 を第一祖先と呼び, $f_y(t)$ と書く (y を省略することもある). $i_k \in \{1, 2\}$ とする. $\eta_0(x_1) = i_1$ ならば $\eta_t(y) = i_1$ で, $\eta_0(x_1) = 0, \eta_0(x_2) = i_2$ ならば $\eta_t(y) = i_2$ で, $\eta_0(x_1) = \eta_0(x_2) = 0, \eta_0(x_3) = i_3$ ならば $\eta_t(y) = i_3$ で, $\dots, \eta_0(x_1) = \dots = \eta_0(x_K) = 0$ ならば $\eta_t(y) = 0$ である. 従って特に, y と y' の第一祖先が共通に $f(t) = x$ であって $\eta_0(x) \neq 0$ であれば, $\eta_t(y) = \eta_t(y')$ である. コンタクトプロセスと同様に自己双対的であるので, $(y, 0)$ から辿りつける (x, t) に対して第一祖先 $f_y(t)$ を定めても, その分布は等しい. そこで順時間方向に追いながら, $f(t)$ の時間発展を調べてみよう. そのとき鍵になるのが, 次に述べる更新点である.

更新点 (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). ちょうど時刻 s から s' で x が y の第一祖先とする:

$$f_y(s-) \neq x, \quad f_y(t) = x \quad (\forall t \in [s, s']), \quad f_y(s') = x' \neq x.$$

このとき, 時刻 s 以降で初めて時刻 s' で鐘 D^x が鳴った (symbol \times に遭遇した) ことになる. では, x' とはどのような頂点であろうか. (s, s') に頂点 x から出た arrow を通って枝分かれした active path で時刻 s' まで伸びるものがあるならば, 常に一番遅くに枝分かれするものを通ると x' に辿りつくことになる. なければ, $(y, 0)$ から (x, s) までの active path の途中で枝分かれした時刻 s' まで辿れる active path の中で, 常に一番遅くに枝分かれするものを通ると x' に辿りつくことになる.

$(y, 0)$ から時刻 ∞ までの active path があるとする. $T_0 = 0$ とする. 時刻 T_0 以降で初めて $D^{f(T_0)}$ が鳴った時刻を T'_0 とする ($y = f(T_0) \neq f(T'_0)$). そして, 時刻 T'_0 以降で初めて, 第一祖先が時刻 ∞ までの active path 上にジャンプする時刻を T_1 とする. このとき, $T_1 = T'_0$ となることもある. 再び, 時刻 T_1 以降で初めて $D^{f(T_1)}$ が鳴った時刻を T'_1 とし, 時刻 T'_1 以降で初めて第一祖先が時刻 ∞ までの active path 上にジャンプする時刻を T_2 とする. 以下同様に T'_2, T_3, T'_3, \dots と定め, $f(T_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) を更新点と呼ぶ (図 3).

ランダム・ウォーク (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). $\Omega_{(y,t)} = \{(y, t) \text{ から時刻 } \infty \text{ までの active path がある}\}$ として, (y, t) を明記しないときには Ω_∞ と書き, $\mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\cdot) = \mathcal{P}(\cdot \mid \Omega_\infty)$ とする. $\lambda > \lambda_c$ より $\mathcal{P}(\Omega_\infty) > 0$ である. $r(t)$ を

$$r(t) = f(T_{i-1}), \quad \forall t \in [T_{i-1}, T_i) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

と定めると, (グラフ表現に用いる) ポアソン過程の強マルコフ性より $r(t)$ は $\mathcal{P}_{\Omega_\infty}$ の下で (連続時間) ランダム・ウォークとなる. さらに, 以下の性質をもっていることが分かる: ある正定数 C と γ に対して,

$$(10) \quad \mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\|f(T_i) - f(T_{i-1})\| > u) \leq Ce^{-\gamma u}, \quad \mathcal{P}_{\Omega_\infty}(T_i - T_{i-1} > t) \leq Ce^{-\gamma t} \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

以下これを概説しよう. $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ とおくと, $\mathcal{P}_{\Omega_\infty}$ の下で $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は独立同分布となるので, τ_1 についてだけ説明する. $(T_0, T_1]$ に, 第一祖先自体は何回かジャンプしている可能性があるが, そのときは有限時刻までしか続かない active path を辿っていることになる. 特に最初のジャンプは時刻 T'_0 に起こり,

$$(11) \quad \mathcal{P}(T'_0 - T_0 > t; \Omega_\infty) \leq e^{-t}$$

である. $T'_0 < T_1$ ならば, その後何回かのジャンプを経て $(f(T'_0), T'_0)$ からの active path では辿りつけない頂点にジャンプするので, その時刻を σ_1 とする. 同様にして, $\sigma_k < T_1$ ($k \geq 1$) なら

ば, $(f(\sigma_k), \sigma_k)$ からの active path では辿りつけない頂点にジャンプする時刻を σ_{k+1} とする. いま $(T_0, T_1]$ に第一祖先がそのようなジャンプを K 回している ($\sigma_K = T_1$) とすると, (8) より

$$(12) \quad \mathcal{P}(t < \sigma_k - \sigma_{k-1} < \infty) \leq C e^{-\gamma t} \quad (1 \leq \forall k \leq K)$$

である. ただし, $\sigma_0 = T'_0$ と定める. また, K は幾何分布に従う. $\psi(\kappa) = \mathbb{E}\kappa^K$ と $\phi(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta(\sigma_1 - \sigma_0)} | K \neq 0]$ とすると, (11) と (12) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\theta\tau_1}; \tau_1 < \infty] &= \mathbb{E}[e^{\theta(\sigma_0 - T_0)}; K = 0, \tau_1 < \infty] + \mathbb{E}[e^{\theta(\sigma_0 - T_0)} e^{\theta \sum_{k=1}^K (\sigma_k - \sigma_{k-1})}; K \neq 0] \\ &\leq \frac{1}{1 - \theta} (1 + \psi(\phi(\theta))) < \infty \end{aligned}$$

となるので, $e^{\theta t} \mathcal{P}(\Omega_\infty) \mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\tau_1 > t) \leq \mathbb{E}[e^{\theta\tau_1}; \tau_1 < \infty]$ と合わせて, (10) の第二式を得る. 第一式は, グラフ表現と第二式を用いた議論により証明される.

目標の証明の戦略 (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)).

$\tilde{r}_x(t), \tilde{r}_y(t)$ ($x \neq y$) を, 独立でそれぞれ $r_x(t), r_y(t)$ と同分布とする. (10) より $\tilde{r}_x(t)$ と $\tilde{r}_y(t)$ ($x \neq y$) については, $d = 1, 2$ ならば確率 1 で (無限回) ぶつかり, $d \geq 3$ ならば確率正でぶつからない. 相関がある $r_x(t)$ と $r_y(t)$ ではさらに議論が必要であるが, $r_x(t)$ と $r_y(t)$ についても同様のことが成り立つ.

$d = 1, 2$ とする. いま時刻 t で $r_x(t)$ がジャンプし $r_y(t)$ にぶつかったとして, $f_x(t) = r_x(t) = r_y(t) = x'$ とする. このとき, $f_y(t) = r_y(t)$ ならば, (x', t) から ∞ までの active path があることより, $f_x(s) = f_y(s)$ ($\forall s \geq t$) である. しかし一般には, $f_y(t) = r_y(t)$ とはならない. しかるに (10) などより, $[t, t+1]$ の間 $D^{x'}, E^{x'z}$ ($\forall z$ は x の近傍) が鳴らず, ある時刻 $t' \in (t, t+1]$ において $f_y(t') = x'$ となる確率は, (x', t) などに依らず一様に正であることが示される. この事象が起こると $f_x(s) = f_y(s)$ ($\forall s \geq t'$) となることに注意すると, $r_x(t)$ と $r_y(t)$ が確率 1 で無限回ぶつかることと合わせて, ある時刻以降 $f_x = f_y$ を得る (図 4). 従って, x と y の状態は確率 1 で同じである.

$d \geq 3$ とする. $r_x(t)$ と $r_y(t)$ がぶつからない確率が正であるので, $f_x \neq f_y$ となる確率も正である. 従って, x と y は異なる状態をとることがある.

参考文献

- [1] R. Durrett, Lecture Notes on Particle Systems and Percolation, Wadsworth, Inc., California, 1988.
- [2] T.E. Harris, Ann. Probab., 2 (1974) 969-988.
- [3] 今野紀雄, コンタクト・プロセスの相転移現象-相関不等式法とハリスの補題法-, 横浜図書, 2002.
- [4] T.M. Liggett, Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.
- [5] T.M. Liggett, Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [6] C. Neuhauser, Probab. Theory Related Fields, 91 (1992) 467-506.
- [7] N. Sugimine, N. Masuda, N. Konno, K. Aihara, On global and local critical points of extended contact processes on homogeneous trees.

全ての図において、横軸は頂点集合 (Z^1) を表し、縦軸は時間軸である。

図 1: ●が状態1の頂点

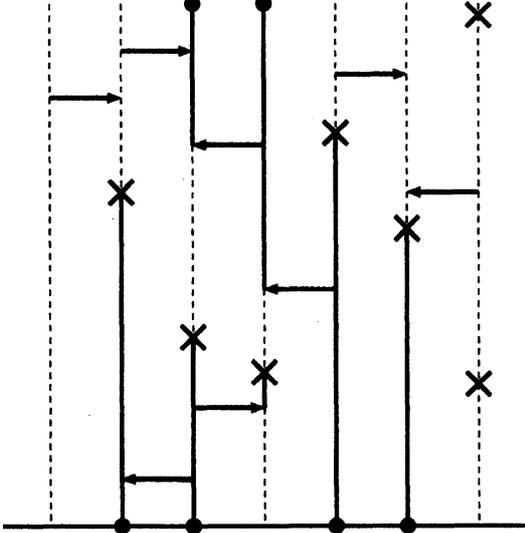


図 2: I~IVの頂点が祖先

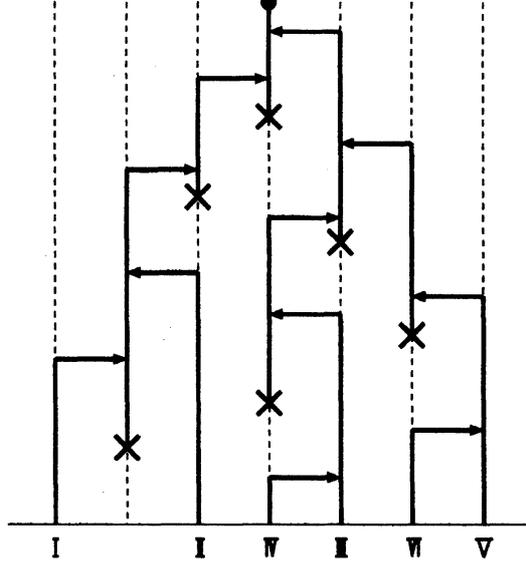


図 3: 太線が第一祖先の経路で、○が更新点

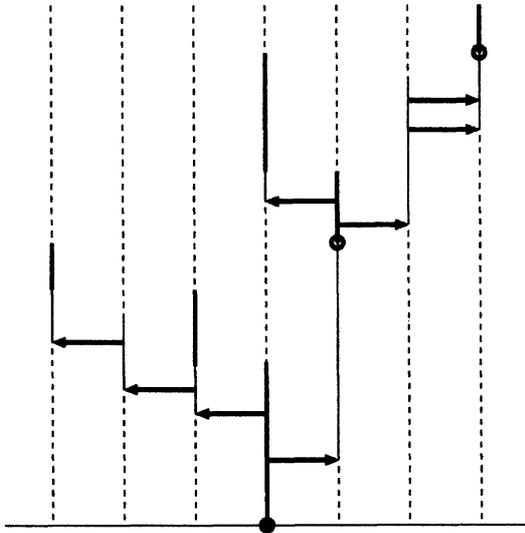


図 4: 更新点が一致し、同一経路を辿る

