

行動の言語化 (=動詞) と、時の流れについて考えよう

大森 英樹 (Hideki Omori)

東京理科大学嘱託教授 (Tokyo Univ. of Science)
慶応大学訪問教授 (Visiting Prof. Keio University)

珍妙な表題なのですが、終りまで読んでいただければその心ははっきりするものと期待しております。「時(とき)」などという言葉は文学者が口にすべき言葉で、論理関係にしか注目していない数学者がこれについて何か発言したとしても、それは「小賢(こざか)しい」論議とうけとられるのが常でありまして、まじめに扱われたことがないような気がする。たしかに、数学は論理関係でしか発言しないのだが、その数学(主に微積分)を使っている人達はほとんど因果関係を記述するのに数学を使っている。

確かに、時間の前後を意識しておれば因果関係も数学で言う論理関係のように扱って良いということは経験的に認められていることではあるのだが、これはどの辺まで認められるのだろうか。同じ微積分学を使って因果関係の記述と、論理関係の記述の両方できるわけだが、その記述には何も区別がないのだろうか。

1 非可換代数で起こる奇妙な現象

非可換代数を生成元と基本関係式を書いて一つ一つの元を扱うような考えかたで扱うと、たちまち次の問題にぶつかる。

1.1 Ordering problem

これは代数の元をどのようにして一意的に表示するかという問題である。Lie 環の普遍展開環のような非可換環の場合にはこれが線形空間としては多項式の空間と同形になることが分かっているので、この場合には多項式の空間に普通とは違う積が定義されたものとして扱えばよいことがわかっている。しかしこの線形同形は無数にあるので積の公式も色々なものが無数に出てきて、同じものを計算しているはずなのに一見違った積の公式が沢山できることになる。

従ってこれはどの表示が良いかといった問題ではなく、むしろどの表示も同等な権利を持っているが、表示は多様体上の関数の局所座標系による表示のようなもので、多様体上の関数の本当の姿は coordinate free な考え方で理解すべきだということと同様に ordering free な考え方で理解すべきものと考えるのが良いと思われる。

1.1.1 表示の問題は可換代数でも考えられる

表示の問題は、生成元の固定された多項式の空間に、積の公式を定義しなおしてもとの代数と同形なものを構成せよという問題だから、非可換代数に限らず可換代数でも同様のことは考えられる。ここで少し一般論を考えよう:

任意に固定した $n \times n$ 複素定数行列 Λ に対して, 多項式の空間 $\mathcal{A}[\mathbf{u}]$ に $*_{\Lambda}$ -積を

$$f *_{\Lambda} g = f e^{\frac{i\hbar}{2} (\sum \overline{\partial_{u_i} \Lambda^{ij} \partial_{u_j}})} g = \sum_k \frac{(i\hbar)^k}{k! 2^k} \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_k j_k} \partial_{u_{i_1}} \dots \partial_{u_{i_k}} f \partial_{u_{j_1}} \dots \partial_{u_{j_k}} g \quad (1)$$

で定義すれば, これで結合代数 $(\mathcal{A}[\mathbf{u}], *_{\Lambda})$ が得られる.

a) $(\mathcal{A}[\mathbf{u}], *_{\Lambda})$ の代数構造は Λ の歪対称部分 (実際はその共役類) できまる.

b) 特に Λ が対称行列ならば得られる代数は普通の多項式環と同形.

$\Lambda = K + J$, $K =$ 対称, $J =$ 歪対称 として, J を変えずに K だけを変更することを代数表示の変更とよぶ. 同形類は変えないが積の計算のしかたが変更されている.

計算例: $u_i *_{\Lambda} u_j = u_i u_j + \frac{i\hbar}{2} \Lambda^{ij}$, $u_i *_{\Lambda} u_j *_{\Lambda} u_k = \frac{i\hbar}{2} (\Lambda^{ij} u_k + \Lambda^{ik} u_j + \Lambda^{jk} u_i)$.

このように, 計算公式にしたがって計算してしまえば, 代数の元はすべて多項式として表示されてしまうから積公式を与えるということは生成元を固定している限り代数の元の (普通の多項式としても) 表示を一意的に与えることになる. これを局所座標表示のように思えば, K をとりかえるということは元の表示を変更していることになるから局所座標変換に対応している.

K -表示と K' -表示の間の intertwiner (座標変換にあたる) は具体的に次式で与えられる:

Proposition 1 任意の $K, K' \in \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(n)$ に対して intertwiner

$$I_K^{K'}(f) = \exp\left(\frac{i\hbar}{4} \sum_{i,j} (K'^{ij} - K^{ij}) \partial_{u_i} \partial_{u_j}\right) f (= I_0^{K'} (I_0^K)^{-1}(f)), \quad (2)$$

は代数の同型 $I_K^{K'} : (\mathbb{C}[\mathbf{u}]; *_{K+J}) \rightarrow (\mathbb{C}[\mathbf{u}]; *_{K'+J})$ を与える. つまり, 次のような等式が成立する $f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{u}]$:

$$I_K^{K'}(f *_{K+J} g) = I_K^{K'}(f) *_{K'+J} I_K^{K'}(g), \quad (3)$$

Intertwiners は $*$ 積の代数構造は変えないが, 可換積による表示を変える. 多様体上の関数を考えるときと同じで, 基本的考え方は「表示に依存しないものが本質だ」と考えるのであるが, 多様体上の関数の場合には underlying topological space X が考えられ表示に依存しないものとして X から \mathbb{C} への写像が考えられるのに対し, この場合, 特に代数が非可換の場合には X にあたるものが何であるかを言うことはできない. (多分 point set, topological space としてはとらえられない. この意味で pointless manifolds 等と呼んでいたこともある.)

しかし, いろんな表示と intertwiners の集まりとかがえてしまえば X にあたるものがなくても幾何学は考えられる.

1.1.2 表示と積公式があると超越的元が考えられる

積公式があれば $\frac{d}{dt} f_t(\mathbf{u}) = p_*(\mathbf{u}) *_{\Lambda} f_t(\mathbf{u})$ のような微分方程式を書くことはできる. しかし, 超越的元がないと解が作れない. 最低限, 指数関数 $e_*^{t_1 u_1 + \dots + t_n u_n}$, $e_*^{t u_i * u_j}$, $e_*^{t(u_i^2 + u_j^2)}$ 等がないと困る. Intertwiner でうつりあっているものは同じ物の違う表示と思えるので, 以下ではあまりどの表示か気にしないで述べる.

1.2 奇妙な現象

超越的な元達は微分方程式の解を書くために使いたいのだが、これらは「線形微分方程式の実解析解は存在すれば初期値に関して一意的である」を基本にして扱うことができる。しかし、2次式の指数関数のあたりでかなり奇妙な現象に遭遇する。

以下では生成元は $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$, 基本交換関係が $[u_i, v_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ のワイル代数で考える。これは Λ の skew part J を

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

に固定して話をするという意味である。この代数は微積分学を代数的に見たときの代数と言って良いもので、

$$u_i = x_i, \quad v_i = \frac{1}{i\hbar} \partial_{x_i}$$

と考えていて良い物だから、以下で色々奇妙な現象を言うが、これらは本質的に微積分の世界で起こっている奇妙な現象と考えて良い。

以下では次の記号を使う: まず、ワイル代数 W での積を $*$ と書く。 W の元は

$$A = 5 + 2u_i - u_i * v_j = 5 - i\hbar + 2u_i - v_j * u_i$$

のようにいろいろに書かれるが、積を $*$ 積公式で計算すれば一意的な表示になるから、これを

$$:A:_{K} = 5 + 2u_i - u_i v_j - \frac{i\hbar}{2} \Lambda^{ij}$$

のように書く。 ($:A:_{K+J}$ は記号が長すぎるので $:A:_{K}$ と書く)。これを元 A の K -ordering 表示と呼ぶ。 $:1:_{K} = 1$, $:u_i:_{K} = u_i$ である。

$e_*^{tu_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (u_k *)^n$ と定義しておけば $:e_*^{tu_k}:_{K} = e^{\frac{i\hbar}{2} K^{kk}} e^{tu_k}$ である。しかもこれは微分方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = \frac{1}{i\hbar} u_k * f_t, \quad f_0 = 1$$

の解である。

良く考えてみれば $e_*^{tu_k}$ は指数関数そのもので、我々が指数関数として知っている性質は表示に依存しない指数関数の本質的性質である。その性質はどの表示 $:e_*^{tu_k}:_{K}$ に於ても確かめられる。

1.2.1 生成元に逆元が沢山あること

しかし、多様体上の関数の局所座標表示の場合と同様に、ある種の表示に於ては $:e_*^{tu_k}:_{K}$ は極めて奇妙にふるまうのである。

$K = \tau I$ とすると $:e_*^{tu_k}:_{K} = e^{\frac{i\hbar}{2} \tau} e^{tu_k}$ である。すると $\text{Re} \tau < 0$ の場合には $\int_{\mathbb{R}} e_*^{tu_k} dt < \infty$ となる。この公式だけで次のような奇妙な現象が見つかる:

(1) $\int_{-\infty}^0 e_*^{tu_k} dt$, $-\int_0^{\infty} e_*^{tu_k} dt$ とともに収束。(逆元が二つみつかる。)

これは結合律をこわすし、二つある逆元の積は発散して計算できないから、なにかの制約をもうけて一方の逆元の使用を禁止したいところである。

このような形で述べたが、これは少し形を変えて定数変化法のような微分方程式の解法にも現れているもので、めずらしいものではない。(ことさらおおげさに言うこともないこと.)

(2) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} :e_*^{ni \frac{1}{h} u_k} :_{\tau I}$ も $\operatorname{Re} \tau > 0$ の所で収束. しかもこれは擬周期 τ の Jacobi の楕円テータ関数. (もっと詳しく言えば $\sum_{n \in \mathbb{Z}} :e_*^{2ni \frac{1}{h} u_k} :_{\tau I} = \theta_3(\frac{1}{h} u_k, \tau)$.)

(1) と同じで、これは $1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k}$ が二つの逆元

$$(1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_+^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_*^{2ni \frac{1}{h} u_k}, \quad (1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_-^{-1} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} e_*^{2ni \frac{1}{h} u_k}$$

を持っていることを意味する。(これはあまり微積の計算ではおめにかかれぬ.)

$(1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_+^{-1} * (1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_-^{-1}$ は発散するが、

$$(1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_+^{-1} * (1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_+^{-1}, \quad (1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_-^{-1} * (1 - e_*^{i \frac{1}{h} u_k})_-^{-1}$$

のようなものは計算できるので、一方の逆元だけ使うことにすれば $e_*^{i \frac{1}{h} u_k}$ を含む結合代数が得られる。(レゾルベントの公式を使う。これは、(3) で述べるような“複素回転”は $q = e^\tau$ に関する自然境界 $|q|=1$ にはばまれてできないことがわかる。つまり、代数表現の変形を複素領域まで広げて考えて、それでも結合代数を得たいときには積分でなく離散和を使わねばならない.)

対称性を犠牲にすれば結合代数が得られることが面白いのだが、では一方だけを採用する理屈はどこから得られるのだろうか?

(3) $\delta_*(\frac{1}{h} u_k) = \int_{\mathbb{R}} e_*^{it \frac{1}{h} u_k} dt$ とすると $\delta_*(\frac{1}{h} u_k) = -\delta_*(\frac{1}{h} u_k)$. (2 価の元に見える.)

(3) の説明. いろんな所で話したが、この部分については十分な納得が得られていない印象なので、詳しい証明を記しておく:

$$:\delta_*(\frac{1}{h} u_k) :_{\tau I} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}\tau} e^{it \frac{1}{h} u_k} dt$$

であるが、積分路を $\operatorname{Re} e^{2i\theta} \tau > 0$ が壊れない程度に $e^{i\theta}$ 回転して

$$e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{e^{2i\theta} t^2}{4}\tau} e^{ie^{i\theta} t \frac{1}{h} u_k} dt$$

を考えてみる. すると θ で微分して部分積分を使えばこの積分は $\operatorname{Re} e^{2i\theta} \tau > 0$ であるかぎり θ によらないことがわかる (Cauchy の積分定理からもわかる). そこで今度は積分路の回転と表示 τI の回転も考えて $:\delta_*(u_k) :_{e^{i\theta} \tau I}$ を計算すると

$$e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} :e_*^{ie^{i\theta} t \frac{1}{h} u_k} :_{e^{i\theta} \tau I} dt = e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{e^{i(2\theta+\theta')}}{4}\tau} e^{ie^{i\theta} t \frac{1}{h} u_k} dt$$

となる. これは始めの τ を > 0 とすると、 $|2\theta + \theta'| < \frac{1}{2}\pi$ であれば収束し、しかも θ によらない. そこで $\theta' = -2\theta$ として θ を 0 から π に動かす (積分路を半周させる) と、表示の方は一回転してもともにもどっているのに積分は符号を変えていることがわかる.

ちなみに、Fourier 変換の公式を使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}\tau} e^{it \frac{1}{h} u_k} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{h} u_k)^2}$$

である。普通 Fourier 変換の公式のときは $\tau > 0$ の所でしか計算しないのだが、上のように考えれば $\tau \neq 0$ であれば計算できる。そのかわり 2 価性をひろってしまうのである。これを、逆元のレベルで考えると、(1) で述べた二つの逆元が積分路と表示の複素回転で入れ替わることがわかる。つまり、逆元的一方だけを使用禁止にすることは複素数の中で考えていると許されないのである。

このような現象は $\delta_*(u_k)$ がすべての $K+J$ で表示をもつのではなく、ある表示では発散している (特異点がある) ことに起因している。

1.3 2 次の *-指数関数が動く分岐特異点を持った関数として表示されること

記号の約束として、 $\mathbf{u}=(u_1, \dots, u_n)$, ${}^t\mathbf{u}$ はその転置 (縦ベクトル) とする。A は対称行列とする。

*-積の斉次 2 次式を $\mathbf{u}A{}^t\mathbf{u}$ ($uv=\frac{1}{2}(u*v+v*u$ のように対称化している) と書いて、微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t=(\mathbf{u}v)*f_t$ の解として 2 次の *-指数関数を定義し、これの K -表示をみると

$$:e_*^{\frac{1}{i\hbar}\mathbf{u}A{}^t\mathbf{u}}:K = \frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}} \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\mathbf{u}\frac{1}{I-AK}A\right){}^t\mathbf{u} \quad (4)$$

となる。 $\frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}}$ の項があるので、 $\det(I-AK)=0$ は表示のパラメータ K に依存する分岐特異点である。これを $(\frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}}, \frac{1}{I-AK}A)$ のように略記する。

さらに、intertwiner も K の代わりに tK を考え t に関する時間発展の方程式を微分方程式を解いて求めてみると

$$I_0^K(g; A) = (g \det(I-AK))^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{I-AK}A$$

となり、 $\det(I-AK)=0$ となる K の所に (A に依存する) 分岐特異点が出る。これをリーマン面を作って処理しようとする $(g; A)$ の入っている source space の方にスリットを入れて考えることになるが、 I_0^K は変換として考えたいものであるから、source space の方にスリットを入れて 2 重被覆を考えたら target space も 2 重被覆を作らないと逆変換が作れないことになる。

一般の intertwiner $I_K^{K'}$ は多項式レベルでは $I_K^{K'} = I_0^{K'} (I_K^0)^{-1}$ のように作られるべきだから、逆変換まで許すような考え方をすると、 $I_K^{K'}$ は次のような 2 対 2 の写像として扱う以外手段がないことになる:

$$I_K^{K'} \left(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK)}}; \frac{1}{I-AK}A \right) = \left(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK')}}; \frac{1}{I-AK'}A \right)$$

この平方根 $\sqrt{\det(I-AK)}$ は covering map で処理することはできないのである。

局所座標表示と同じことだから、ordering free のものが本質だと述べたが、ある種の元は表示によっては発散しているし、表示を、その特異点のまわりを一周させると符号が変わるといふ 2 価性が現れる。ここにきて表示の問題を多様体上の関数の局所座標表示と同じようには扱えない現象にぶつかるのである。(このようなことがおこるのは 2 次式の指数関数のところからで、それ以下の増大度の関数ではこのようなことは起きないことがわかっている。) つまり、ordering free なものが論理関係としては本質的なものだと考える限り、上のようなものは 2 価の元として扱うべき対象だということになるのである。

1.3.1 座標変換

対称部分は代数構造には影響をあたえないが、他にも、行列 $S \in M_{\mathbb{C}}(n)$ と平行移動による座標系の affine 変換を使って生成元の変更を考える必要がある。 $\forall S \in M_{\mathbb{C}}(n)$ と n -複素 vector \mathbf{a} を使って、新しい生成系 $\mathbf{u}' = \mathbf{u}S^{-1} + \mathbf{a}$ を考えよう。

* Γ -積の積公式 (1) は \mathbf{u}' を使えば次のように書かれる

$$f(\mathbf{u}') *_{\Lambda} g(\mathbf{u}') = f \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \overline{\partial_{u'_i}} \Gamma^{ij} \overrightarrow{\partial_{u'_j}}\right)\right\} g, \quad (5)$$

但し $\Gamma = (\Gamma^{ij}) = (K^{ij} + J^{ij})$ であり、 J は歪対称行列である。

* (K, \mathbf{u}') を新しい生成元 $\mathbf{u}' = \mathbf{u}S^{-1} + \mathbf{a}$ に関する K -順序表示で作られた積とする。*積公式 (5) は \mathbf{u} を用いて次のように書き換えられる:

$$f(\mathbf{u}) *_{K, \mathbf{u}'} g(\mathbf{u}) = f \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{2m} \overline{\partial_{u'_i}} \tilde{\Gamma}^{ij} \overrightarrow{\partial_{u'_j}}\right)\right\} g, \quad (6)$$

但し $\tilde{\Gamma} = {}^t S(K+J)S = {}^t SKS + {}^t SJS$.

Theorem 1 ${}^t SJS = J$ である限り、生成元の $S \in M(n)$ と \mathbf{a} による affine 変換はもとの生成元の ordering の変更で実現される:

$$f(\mathbf{u}) *_{K+J} g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) * ({}^t SKS + J, \mathbf{u}) g(\mathbf{u}).$$

従って、代数構造は歪対称行列の共役類で決定されることがわかる。では、歪対称部分の共役類は何で定まるであろうか? 簡単の為、 $n=2m$ とし、 J は正則とすると、 J は $\begin{bmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{bmatrix}$ と共役となるから、得られる代数は全てワイル代数と同型になる。

1.3.2 変数が入れ換わると符合が変わる?

§1.2.1 の (3) が起こる理由は積分路の複素回転と連動する表示の複素回転であったが、多変数にすると実数の中の座標変換でもこのようなことが起こることを (4) 式で説明しよう。

ただし我々の立場は、変数の入れ換え等という作業ですら、人間が思考だけで行うのではなく、力学の原理、少なくとも連続追跡の原理にしたがって追跡できるべきものでなければならぬという立場をとるのである。つまり、微妙な動詞の使い分けだが、変数をいれかえるのではなく、変数が入れかわるようにしたいのである。

$m=2$ として u_1, u_2, v_1, v_2 で積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon^{\mu\nu}} d\xi_1 d\xi_2$ を考える。普通に考えれば u_1, u_2 変数で v_1, v_2 を使わなければ $[u_1, u_2] = 0$ だから、 $\delta_*(u_i) * \delta_*(u_i) = (\text{発散})$ だが、 $\delta_*(u_1) * \delta_*(u_2)$ は考えられ、 $\delta_*(u_1) * \delta_*(u_2) = \delta_*(u_2) * \delta_*(u_1)$ となるのは自然に見える。

これを累次積分にして考えると各変数のところから \pm の多価性が発生するが、積をとっているので $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} = \{\pm 1\}$ より、全体としては 2 価の元になっていると理解すべきものである。

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon^{\mu\nu}} d\xi_1 d\xi_2 = \delta_*\left(\frac{1}{\hbar} u_1\right) * \delta_*\left(\frac{1}{\hbar} u_2\right)$$

のように書いて良いであろう。この積分は変数の番号を付替ても何も変化しないように見える。ところが $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_k) = -\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_k)$ なのだから $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_i) * \delta_*(\frac{1}{\hbar}u_j) = -\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_j) * \delta_*(\frac{1}{\hbar}u_i)$ と書いても矛盾ではない。

さて我々の立場は、変数の入れ換え等という作業ですら、人間が思考だけで行うのではなく、力学の原理、少なくとも連続追跡の原理にしたがって追跡できるべきものでなければならないという立場であった。変数の入れ換えを連続的に追跡するということは、例えば (u_1, u_2, v_1, v_2) において、 u_1 と u_2 を入れ換えるのも、何か Hamiltonian を用意してそれによる運動として u_1 と u_2 が入れ替わるようにして考える。(これが、力学的に考えるということの意味である。) ここではそこまで徹底的ではないが正準共役である v_1, v_2 の入れ換えも連動させていると考えることにする。(但し、 $\delta_*(u_i) * \delta_*(v_i)$ の場合は $[u_i, v_i] \neq 0$ だから、別の問題)。

積分 $\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \xi^t u} d\xi_1 d\xi_2$ の $K = \begin{bmatrix} K_m & K_b \\ {}^t K_b & K_m'' \end{bmatrix}$ 順序表示を考える。ただし、 $\det K_m \neq 0$ とする。

$$:e^{\frac{i}{\hbar}(\xi^t u)}:_{\kappa} = e^{-\frac{1}{4\hbar^2} \xi K_m {}^t \xi + \frac{i}{\hbar} \xi^t u}$$

$$-\frac{1}{4\hbar^2} \xi K_m {}^t \xi + \frac{1}{i\hbar} \xi^t u = -\frac{1}{4\hbar^2} (\xi - 2ui\hbar K_m^{-1}) K_m {}^t (\xi - 2ui\hbar K_m^{-1}) - u K_m^{-1} {}^t u$$

だから、積分を複素数積分で計算して

$$:\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1) * \delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2):_{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^2} :e^{\frac{i}{\hbar}(\xi^t u)}:_{\kappa} = \frac{\pi}{\sqrt{\det K_m}} e^{-u K_m^{-1} {}^t u} \quad (7)$$

となる。この積分は普通 $\text{Re} K_m > 0$ (positive definite) のときにしか計算しないが、表示の複素回転と積分路の複素回転を考え、前節の(3)の説明の所でやったように計算すると、 $\det K_m \neq 0$ であれば ($\sqrt{\det K_m}$ の符号の不定性を除いて) 成立していることに注意する。

変数の入れ換えを実現するために、これとは別に行列 A を以下のように選ぶ。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad AJ = JA, \quad A^2 = I, \quad J^2 = -I$$

に注意してやると、 $(AJ)^2 = -I$ だから、

$$e^{tAJ} = \cos t + (\sin t)AJ, \quad e^{tJ} = \cos t + (\sin t)J$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} e^{t(A-I)J} &= e^{tAJ} e^{-tJ} = (\cos t I + (\sin t)AJ)(\cos t I - (\sin t)J) \\ &= \cos^2 t I + (\cos t \sin t)(AJ - J) + (\sin^2 t)A \end{aligned}$$

である。 $t = \frac{\pi}{2}$ とすると $e^{\frac{\pi}{2}(A-I)J} = A$, $e^{\pi(A-I)J} = I$ となる。 $A-I$ は対称行列だから、 $e^{\theta(A-I)J}$ は $Sp(2)$ の元になる。これによる座標変換を

$$S(\theta) = e^{\theta(A-I)J} = \begin{bmatrix} S_m(\theta) & S_b(\theta) \\ S_b'(\theta) & S_m''(\theta) \end{bmatrix}, \quad S_m(\theta) = S_m''(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix},$$

とする。複素回転でなく、 $Sp(2, \mathbb{R})$ の元で変数の入れ換えが実現できていることに注目したい。

そこで (7) 式の表示から、座標を $S(\theta)$ で回転させると、その回転は Theorem 1 より、表示を $S(\theta)K^tS(\theta)$ に変えたのと同じであるから $S(\theta)K^tS(\theta)$ -順序表示を考えると (7) 式より表示の振幅に $1/\sqrt{\det((S(\theta)K^tS(\theta))_m)}$ が現れるが、 $K=I_4$ とすると、 $\theta=\frac{\pi}{2}$ のところでは

$$1/\sqrt{\det(S_m(\frac{\pi}{2})K_m^tS_m(\frac{\pi}{2}))} = 1/\sqrt{(\det(S_m(\frac{\pi}{2})))^2}$$

となるが、 $\theta=0$ で $\det S_m(0)=1$ だから、連続につながるように計算すれば $\sqrt{(\det(S_m(\frac{\pi}{2})))^2} = \det(S_m(\frac{\pi}{2}))$ とすべきであることがわかる。ところが、 $\det(S_m(\frac{\pi}{2})) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$ だから、結局符号の逆転をあたえるのである。したがって、積分 $\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\frac{1}{\hbar}\xi^t u} d\xi_1 d\xi_2$ は変数の番号が入れ換わると符号が変わるのである。したがって、

$$\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\frac{1}{\hbar}\xi^t u} d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

のように $d\xi_1 \wedge d\xi_2$ を用いて書いたほうが良い。 $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2)$ は変数の順番が問題なのである。積分を微分形式で考えることは多変数の微積分ではすでにやられていることだが、このことは 1 変数の微積分の標準から自然に得られたものではないことに注意する必要がある。

この説明は結局 (7) 式が $\det K_m \neq 0$ であれば成立していることを使っており $\sqrt{\det K_m}$ の多価性を使って、符号が変化するように連続追跡できることを示したのである。

変数の入れ換えは論理的には不連続な移動で、この場合には積分は対称だと考えるのが自然なのだろうが、時空内の連続的運動で考えると、交代性を要求することが自然に見えるというのである。

面積、体積の概念は数学上の概念として広く認められてはいるが、それは実数の公理系とは独立のものである。純粹数論の人はこれを認めないかもしれないが、幾何学者とはこの辺までは認める立場の人を指す。物理学者は、さらに時間と、エネルギー概念も容認する立場の人である。

1.3.3 2 次の *-指数関数全体は $Sp(m, \mathbb{C})$ の non-trivial double covering に見える。

$wv = \frac{1}{2}(u*v + v*u)$ としてワイル表示で計算すると

$$:e_*^{t(au^2+bu^2+2cuv)}:_0 = \frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{D}t)} e^{(au^2+bu^2+2cuv)\frac{1}{\hbar\sqrt{D}} \tan(\hbar\sqrt{D}t)}$$

$D=c^2-ab$ が 0 の時は $\frac{1}{\hbar\sqrt{D}} \tan(\hbar\sqrt{D}t) = t$ とする。

$$:e_*^{t(au^2+bu^2+2cuv)}:_0 = \frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{-D}t)} e^{(au^2+bu^2+2cuv)\frac{1}{\hbar\sqrt{-D}} \tanh(\hbar\sqrt{-D}t)}$$

とも書かれる。 $: :_0$ はワイル表示での計算を意味する。特に

$$:e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv}:_0 = \frac{1}{\cosh t} e^{\frac{it}{\hbar}2uv \tanh t}, \quad :e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv}:_0 = \frac{1}{\cos t} e^{\frac{it}{\hbar}2uv \tan t}$$

この式で2価性は現れないのは, $t=0$ で1となるという初期条件を課しているからである。(境界条件ではないことに注目.)

一般には2次の $*$ -指数関数は(4)式で分かるように特異点と2価性を持っているのだが, 2次の $*$ -指数関数全体は2価性を持ったまま $*$ -積で閉じていて指数法則も成立する.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

などという計算をあまり気楽にやると関数論の先生にどやされるのだが, 2価関数のままの計算と思えばちゃんとした意味を持っている。(この積公式は書いているのだが, かなり複雑である.)

この場合, 注意すべきは2次式の $*$ -指数関数 e_*^Q は任意の K について K -表示を持っているわけではなく, $e_*^Q: K \rightarrow K$ は Q ごとにきまる $1/\sqrt{}$ の形の K に関する特異点を持っていて, その意味で2価の元であり, さらに2次式の $*$ -指数関数どうしの積 $e_*^Q * e_*^R$ もすべての K -表示で計算できるわけではなく, K に関して Q, R できまる $1/\sqrt{}$ の形の特異点を持って計算される.

しかし, ほとんどの表示 (open dense) で計算が (2価のまま) 実行できる. この意味で2次の $*$ -指数関数全体は全体として $*$ -積に関して閉じており, $Sp(m, \mathbb{C})$ の non-trivial double covering group のように見えるのだが, $Sp(m, \mathbb{C})$ は単連結である. この“群”を $\widetilde{Sp}(m, \mathbb{C})$ と書いておく.

物理でも群の計算はでてくるが, $Sp(m, \mathbb{R})$ の non-trivial double covering group (metaplectic group) までは出てくるが, これの複素化はでてこない, つまりなんらかの理由により, このような妙なものは自主規制されている. しかし, その数学的な理由はみあたらない.

おそらく, その理由とは「かようなことを許すと, 単連結であるはずの $Sp(m, \mathbb{C})$ の non-trivial double covering group を考えることになってしまうので, 数学論理に矛盾する」といったたぐいのものであろう. 数学の論理で言えば, これは理由にならない. 2価の元を許して考えれば, これもれっきとした数学の対象になるからである.

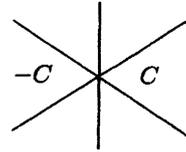
論理的思考は群論的思考であると発達心理学者ピアジェは言うのだが, それがこのような2価性を内包しているのである. これが, 因果関係を記述する場面にもそのまま現れているとは (微積分の user でこんなことを言う人はいないから) 思えないので, なんらかの無意識的制約を受けているようにみえるのである. 明らかにしたいのは, そのときの無意識的制約の実態である. それが「時間」というものを論理的に考えるヒントになると思うからである. 色々な人が論じる「時間論」を読んでみると, それぞれの価値観に応じた色々な時間論があるのだが, 論理関係の記述と因果関係の記述の差などに言及しているものは見当たらない.

極めて面白いことに, “群” $\widetilde{Sp}(m, \mathbb{C})$ は点集合 (1価の元) として扱える半群 (ほぼ半分の部分を占める) を沢山含むのである. (しかし, これだけでは何のことか分からないが....)

1.3.4 1 径数部分半群の像

このような最も簡単な例を作っておこう. C を \mathbb{C} 内の凸錐とする. 1 径数半群 $\alpha(z)$, $z \in C$ を考えよう. すると形式的逆元 $\alpha(z)^*$ も 1 径数半群である. $\alpha(z)$, $\alpha(w)^*$ を一緒にすれば可換群を生成する.

$\alpha(z)^*$ を $\alpha(-z)$ と表して $C \cup (-C)$ を定義域とする 1 径数半群の合併を自然数から整数を構成したときと同じようにして考えれば、ここでは指数法則も拡張され C 全体に定義された 1 径数群ができあがりそうに考えがちになる。



ところが実際は半群と群の間にはかなりのへだたりがあつて、上のような安易な予測は通用しないのである。半群をできそこないの群のように思うのは間違いである。

●**数学的例.** このような例を作っておこう。 κ は上の図の太線上を動くパラメーターとする。 κ を固定し、 κ 毎に半群を構成して、その 1 径数半群で例を作るのだが、実際の構成の手順は逆である。

まず、 $\sigma_\kappa : C \cup (-C) \rightarrow C$ を $\sigma_\kappa(z) = \frac{z}{1-z\kappa}$ と定義する。 κ が図の太線上だから $1-z\kappa$ は 0 とはならず、 $\sigma_\kappa(z)$ は $C \cup (-C)$ 上では定義できているが、 C 全体にはひろがらないのは明らかである。

そこで $\sigma_\kappa(z)^* = \sigma_\kappa(-z)$ と定義し、 $\sigma_\kappa : C \rightarrow C$ が 1 径数半群に見えるように半群としての積 $*_\kappa$ きめよう。これは

$$\sigma_\kappa(z) *_\kappa \sigma_\kappa(w) = \sigma_\kappa(z+w)$$

となるようにせよということだから、 $u = \frac{z}{1-z\kappa}$, $v = \frac{w}{1-w\kappa}$ とおいて $u *_\kappa v$ を求めると

$$u *_\kappa v = \frac{u+v+2uv\kappa}{1-uv\kappa^2} \quad (8)$$

と定義すれば良いことが分かる。これが κ 毎に半群しか定義しないことはもとの z, w で表示してみれば明らかなことである。

ところが、この半群の族は κ を不定元のように扱い $\{\sigma_\kappa(z)\}_\kappa$ を $(\kappa, \sigma_\kappa(z))$ という κ の関数として扱おうと群のようにもみえるのである。無論この群は加法群 C と同形で計算公式は

$$\left(\kappa, \frac{a}{1-a\kappa}\right) *_\kappa \left(\kappa, \frac{b}{1-b\kappa}\right) = \left(\kappa, \frac{a+b}{1-(a+b)\kappa}\right)$$

である。元の表示が表示の為の空間上で特異点を持つが、その特異点が元に応じて動いてしまう(動く特異点)のが特徴である。表示空間のパラメーターを不定元化して「場」として考えれば群にも見えると言っているのである。

一方、上の半群の族は (8) の積公式から明らかに $\forall \kappa$ について可換半群である。 $(C, *_\kappa)$ を $u, v \in C$ に $u *_\kappa v = \frac{u+v+2uv\kappa}{1-uv\kappa^2}$ で積の定義された半群とする。この積は

$$\frac{z}{1-z\kappa} *_\kappa \frac{w}{1-w\kappa} = \frac{z+w}{1-(z+w)\kappa}$$

と書いても良いものだから、次の切除公準が成立つことがわかる:

Lemma 1 $a *_\kappa b = a *_\kappa b'$ ならば $b = b'$ である。

1.3.5 2次式が離散集合上を動く不定元にも見えること

これは逆元が2つ出てくることに関係していて、使う逆元の種類により $\text{Spec}(\frac{1}{i\hbar}uv)$ が $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$ に見えたり $-(\mathbb{N} + \frac{1}{2})$ に見えたりするということである。

$z \in \mathbb{C}$ として Weyl 表示で計算して

$$(z + \frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1} = - \int_0^\infty e_*^{t(z + \frac{1}{i\hbar}uv)} dt, \quad (z + \frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1} = \int_{-\infty}^0 e_*^{t(z + \frac{1}{i\hbar}uv)} dt$$

はそれぞれ領域 $\{z; \text{Im}z < -\hbar/2\}$, $\{z; \text{Im}z > \hbar/2\}$ で正則であった。

注意 この事自体はほとんどの K -表示で成立するが、正規順序表示では $(uv-z)^{-1}$ が、反正規順序表示では $(uv-z)_+^{-1}$ が発散する。しかし、「どちらかの逆元がある」ということは任意の K -表示で成立する。

Theorem 2 $(z + \frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1}$ は領域 $\mathbb{C} - \{-\frac{1}{2}(2k-1); k=1, 2, \dots\}$ に解析接続され、 $(z + \frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}$ は領域 $\mathbb{C} - \{\frac{1}{2}(2k-1); k=1, 2, \dots\}$ に解析接続される。

不定元という見方をすれば、元 $\frac{1}{i\hbar}uv$ は

$$\{(k - \frac{1}{2}); k=1, 2, \dots\}, \text{ または } \{-(k - \frac{1}{2}); k=1, 2, \dots\}$$

を動く不定元と思える。すると $\epsilon_{00} = e_*^{\frac{\hbar}{2}uv}$ は $\pm i$ を動く不定元、 $e_*^{\frac{3\hbar}{2}uv}$ は -1 を動く不定元 (実は確定元) と考えられる。

逆元が二つ出てきて困ったのであるが、どちらか一方だけを採用するとそれで結合律を保った計算ができる。逆元どうしの積の公式はレゾルベントの公式がそのまま使えるからである。

二つの逆元は

$$\int_{-\infty}^0 e_*^{tQ} dt, \quad - \int_0^\infty e_*^{tQ} dt,$$

のように現れるから、これに過去を使った逆元、未来を使った逆元と名前をつけてみると、時間の向きをいつも気にしている因果関係の記述では使う逆元の種類が選ばれてしまっていると想像できる。

1.3.6 微積分学は自然に含まれている

2次の *-指数関数全体の線形包に自然な真空表現を考えると普通の微積分学が含まれていることがわかる。しかし、真空として選べるものは無数にあり、数学的には全部同等である。上の話は主に uv で話をしたが $z\bar{z} = u^2 + v^2$ で話をしても全く同様だから調和振動子を基礎にしている所には必ず現れるはずの現象である。

2 時の流れ

上で述べてきたことは面白いだろうが困ったことには違いないから何か対策を考えなければならぬ。「どちらと考えても矛盾でないが、両方選ぶと矛盾になる」こういう現象に出会ったときには両方選ぶことを禁止するルールがほしいのだが、禁則律というのは書けばそれでよいといったものではないから、神経質にならざるをえない。

上に述べたような現象はいわば微積分学という software に始めから組みこまれている bug みたいなものだから微積分学を計算手段として使っている科学(ほとんどの科学)に必ず現れるはずの不都合なのである。ところが現実はこのような不都合を言う科学者はいない。それは当然で、微積分学の bug などという否定的概念が建設的概念を産み出すはずもないのだから、こういうものは別の理解様式で理解され組織化されているはずなのである。

明らかに、上述の不都合は微積分学の user にとっては(扱っている現象が自然に要求する禁則律で)区別されているものが縮退して現れている結果だと推測される。しかし、その禁則律は現行の数学の中から理解できる種類のものではないようである。

ところで、数学と微積分の user の決定的違いは、数学では論理構造しか問題にしてこなかったが、user は論理構造より因果構造のほうが大切で、ほとんど因果関係でものごとを考えている。つまり、「時の流れ」が必ず意識されていることである。特に現実のデバイスを念頭において数学を使っている工学の分野では無意識のうちに因果関係を論理関係にすりかえて理論を組み立てているはずである。ところが、私が察知し得た数学者/user でこの違いにピントを合わせて発言している人は見当たらない。これは考えてみると非常に奇妙なことで、自分達が使っている因果関係をあたりまえの如くに論理関係にすりかえることにほとんど何の疑問も持っていなかったとも受け取れるのである。

我々は無意識のうちに因果関係も論理関係のように扱っている。相対論以前の哲学では多分これはほとんど意識にのぼらないくらい自明のことだったかもしれないのだが、相対論が広く受け入れられている現代において、この部分をもう一度深く考えてみるのは大切だと思う。

ところが、これを少し数学的に考え始めると一般論としては因果関係を論理関係にすりかえるのは、半群を群の中に埋め込む作業をしていることがわかる。しかし、この作業はいつでも可能というわけではなく、これが可能となるためにはかなりの条件がついてしまうようにみえるのである。つまり、我々は相対論以前の哲学に支配されていて、因果的記述も論理的記述もほとんど区別しない頭の使い方だ数学物理を考えてきたのである。そして、ここにはかなりのギャップがあると思われるのである。

だとすると、数学の側で論理的記述と、因果的記述を区別する方策が欲しくなるわけで、数学の中でこの違いが言えるようになれば、それだけで上のような奇妙な縮退現象をかなりほどけるのではなかろうかと考えられる。

これは高校数学で論理を教えている時に必ず出てくるものだが、

「叱られないと勉強しない」という文言を論理命題と思って「叱られないならば勉強しない」と読み、その対偶命題を考えると、「勉強すると叱られる」となることがわかる。

「叱られないと勉強しない」という命題はあきらかに因果関係または継続する状態を表す命題として、「時の流れ」を意識して述べるべき命題である。

時間の前後に注意しさえすれば、因果関係は論理関係のように扱ってよいということは経験的に認められてはいるが、

本当に、因果関係は論理関係のように扱ってよいのだろうか？

因果関係で考えるということ、もう少し狭く「時が行う行動」ととらえてみれば、これは「大自然が行う行動を言語化せよ」というのと同義となることは理解されよう。

そこで因果的に物ごとを考える最初の練習として次を試みるのである：

行動の言語化 (= 動詞) を数学的に考えること

数学論理では「 A と B とを入れ換える」のは全く仮想的行動で瞬時に実行できるものだろうが、現実には(時空のなかで)これを実行するには時間も金もエネルギーもかかる。論理構造と、因果構造は明らかに違うのである。しかも、現実の行動はそれをおこなってしまえば「全く取り返しのつかない」ものである。にもかかわらず、実験家は数学的論理の整合性の証として「同じことが何度でも繰り返せる」(実験の再現性)ということあげる。論理構造の方からいうとこれが逆元を作るということに相当している。数学論理では逆元をかけるという「行動」が「おなじものを沢山作っておいてリセットする」という行動に置き換わって、これで数学的論理性が確保されたと考えているのである。

で、これは「それで良いのだろうか？」多くの人はそれで良いのだと言うし、私自身これを疑っているわけではないが、問題はその論拠である。つまり、

我々は、これを無条件に信じるいかなる数学的理由も持ち合わせてはいない。

古典的観測論では位置と運動量は同時に無限に正確に観測できるものだったが、観測という行動さえも力学の原理に従うと考えると「不確定性原理」でものを考え始めると、非可換性を問題にしなければならない。これと同じことで、「すべての数学的行為を力学系の中で考える」(あるいは「すべての論理的行動を因果的行動に置き換えて考える」)ことを実行するのである。例えば「変数を置き換える」のではなく、「変数が置き換わる」ように考えるのである。このようにしたとき、数学論理のどの部分の縮退がほどけてくるのか、そういうことを机上にもちだそうではないか、というのが本稿のねらいである。

無論、我々はこのような物の考え方になれてはいないのだが、数学の側がこのような微妙な違いを意識的に発言すべき時期にきていると思うのである。

これまでの数学論理には時間の概念は入っていないのであるが、数学の中に「時(とき)」という notion を持ち込むべき時期にきていると思う。本当はアインシュタインが相対論を言ったときにこれは問題にされるべきだったのだとは思っているが.....

数学人はしばしば哲学的な言辭に対して嫌悪感を持つようだが、次の言葉は重く捉えて欲しい：

哲学は全ての科学に先だって人間が目覚める時に現れるものである (Jasperse).

これで何が変わるのか、それを予見できるのは、感受性豊かな若者だけかもしれないが.....自由な反論をおきかせください。

omori_hideki@ma.noda.tus.ac.jp