数理解析研究所講究録
1508巻 2006年 1-11



# CAPELLI 恒等式をめぐる幾つかの問題

京都大学・理学部　梅田　亨 (TÔRU UMEDA)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY

## 0: はじめに

研究会は，Capelli 恒等式を巡る最近の進展について，より深い理解を得るという主目的をもって企画された．講演はそのための核であり，それを手掛かりに議論する場と時間を多めに設けた．主催者の役割として，どのようなことが「知りたい」のか，或いは，それに対して何が「問題」なのか，といったことを最初に若干呈示した．ここでは，そのようなことも含め，普段考えている事柄を，現時点での「総括」めいた形に書いてみたい．

Capelli 恒等式に関しては，幾度か「まとめ」を試みている．初期のものとして 1991 年秋の学会の特別講演 (函数解析分科会) と，それを敷衍した『数学』論説 (1994 年; 英訳は 1998 年) がある．いろいろな手法と結果がでてきたことを紹介したもので，100 年前の Capelli 恒等式がいまなお興味深く研究に値することを報告した．しかし，それは出発点であって，現在から見ると，捉え得たのは Capelli 恒等式の本質の一面であった．例えば「乗法公式」にこだわっているが，他の Capelli 型恒等式を扱ううちに，むしろ「非可換成分を要素にする表現行列のトレース」(標語としては「非可換指標公式」) という，より一般的な枠組みで捉える視点を得た (『数理科学』1999 年 3 月号)．その後，2002 年秋の学会の特別講演 (代数学分科会) で，10 年間の進歩を含めて，或る種の方向を示唆したが，実際の状況は，そのころ今回の研究会の動機となった転回点に達していた．この経緯と，研究の現状から容易に予測できることだが，今後，まだ何度かこのような「総括」をすることになるだろう．

2002 年の講演アブストラクトの最後には，Capelli 恒等式に関して「よりよい統一像と，その下でのよりよい計算方法の発展確立が，今後の課題である.」と記した．それは，まさしく今現在の課題でであって，研究会をきっかけに，この方向に向かって大きく踏み出すことができることを切に望んでいる．この「総括」が，そのための僅かにでも指針として役立てば幸せである．なお，以下に扱うのは主に複素数体上の典型群 (classical groups) と想定している．

### 1: Capelli 恒等式を構成する基本事項

問題となるのは，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ について

(A) 中心元 (或いは不変元) の構成

(B) 異なる方法で構成された中心元の間の関係

(C) 中心元の不変微分作用素による実現 (表現)

というものである．このうち本来の Capelli 型恒等式は (A) と (C) を問題にするが，(B) はそれらを扱う上でも当然深く関わってくる．いずれにしろこれらは独立した問題として分離できるものではない．ここでは，特に基本的な (A) を中心に考えるが，他の (B), (C) とも関わる事柄が多い．つぎの (1) – (3) は自然に思い浮かぶ代表的な問いである：

(1) 中心元としてどのようなものを選び，表示するか.「よい」中心元とはなにか.

(2) どうやったら透明で判りやすい証明が得られるか．証明の原理はなにか.

(3) 非可換化に伴う多項式の補正の由来はなにか.

これらについて決定的な答えが用意できているならば，研究は殆ど終わっているであろう．ここでは答えへの手掛かりを模索する．古典的な Capelli 恒等式に於いては，他の場合にが一般化されるか否かは別として，一応の答えがある．また，他のできている場合のことを考えれば，とりあえず理想的な状況を設定して回答できるが，同時に現状のもつ不完全さに伴って新たな疑問が生ずる．[1] から [3] に向かうにしたがって不透明要素が増える

[1] (**行列要素の原理**)：　中心元は (有限次元) 既約表現に対応づけて構成される．その一つの既約指標 (トレース) に $U(\mathfrak{g})$ の元を代入して得られる非可換多項式として表示されるものがあるだろう．その可換版とは，たとえば指標を基本 (ベクトル) 表現の行列要素の多項式にで書くものである (一種の fusion process)．中心元 Harish-Chandra 像は何らかの意味で，対応する既約表現の無限小指標と関係づけられるのが理想である．このような中心元は，対称式で言えば Schur 多項式に当たる．しかし，また，既約表現に対応のさせ方は unique とはいえないかもしれない．さらに「冪のトレース」(Gelfand 式構成) は，表現行列とは異なり，対称式で言えば，冪和対称式に対応するので，これらをどのようなものとして捉えるかは問題として残る．

[2] (**母函数の方法=記号的方法**)：　形式変数などを用いて，あからさまな不変元から乗法的に生成されたものの像として，中心元を構成したい．これは (1) の fusion process のうち，特別なものだけを念頭に置いている．Capelli 恒等式自体の証明については (1) のよう

になっていれば，一種の (行列版での) 乗法性から証明されることになる．ただ，常に問題となるのは，交換関係の複雑さをどう処理するかである．

[3] (**特殊函数の視点**)： 交換関係から生じる補正は，例えば Capelli の場合 $\rho$-shift のようにも見えるが，本当にそうなのかわからない．Okounkov の higher Capelli では対応する Young 図形の contents が補正の由来である．また，Howe-Umeda の Appendix にある anisotropic 実現の直交 Lie 環 (対応する対称行列が単位行列) の場合の，対角補正は，少なくとも直交 Lie 環の $\rho$-shift ではない．この補正は交換関係に由来するものであるし，生成元の並べ方にも依存する．量子群の $R$-行列による定式化等が，これに関して光を投げかけてくれれば有り難いが，最終的に簡明化されていないように思われる．Itoh-Umeda で扱った直交 Lie 環の扱いでは，ひょっとして「非可換 dual pair」なのかと思わせる $\mathfrak{sl}_2$ が登場するが，ここで見ると，古典的な超幾何多項式や，この講究録に収められた伊藤氏の「二項型」多項式などとの深い関係が示唆されるようである．

以下では，この各項について少し見ることにする．

**2: 中心元と行列要素**

まず，よく判っている典型的な場合について，Capelli 型恒等式との関係で中心元の記述について反省する．Capelli 恒等式とは表現論的には，普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の元と表現空間に働く不変微分作用素を結ぶものということであった．Howe-Umeda の Capelli 問題では，表現を与えてそれに応じて中心元を作るという観点に立った．その一つの解決は，古典的な不変式論と同様に，乗法的な生成元を利用する．つまり，低階の Capelli 恒等式が得られれば，対応する中心元が包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の生成系であるから「実質」または「原理的には」すべての中心と不変微分作用素を扱ったという形に決着する．しかしこれは，より高階の場合に具体形を書く問題には，直接は届いていない．これについてもう少しその設定を自然な形で考えておこう．

基本的な事実を確認しておく．$GL_n$ の有限次元既約表現は，本質的に多項式表現と思ってよい (正確には行列式の冪という 1 次元表現の積を考慮に入れればよい)．つまり $(\pi, V_\pi)$ を $GL_n$ の既約表現とすると，実質的には行列成分 $\pi_{\mu\nu}(g)$ は $g$ の成分 $g_{ij}$ の多項式で書けていると考えてよい．そうすると，それは行列空間上の多項式環 $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n))$ の中に現われる．

まず記号を導入する：一般に長方形の行列で考えておくと $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(m \times n))$ の座標函数を $t_{ij}$ と書き，対応する偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$ を略記して $\partial_{ij}$ と書く．この時，Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ (右) と

$\mathfrak{gl}_m$ (左) の作用は

$$\rho(E_{ij}) = \sum_{a=1}^{m} t_{ai}\partial_{aj},$$
$$\lambda(E^{\circ}_{ij}) = \sum_{b=1}^{n} t_{jb}\partial_{ib}$$

と書け，この関係は，これらの Lie 環の生成元，座標函数，偏微分作用素を行列の形にして

$$T = (t_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \qquad D = (\partial_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n},$$
$$\Pi = (\rho(E_{ij}))_{1\le i,j\le n}, \qquad \Pi^{\circ} = (\lambda(E^{\circ}_{ij}))_{1\le i,j\le m},$$

を導入すると

$$\Pi = {}^tTD, \qquad {}^t\Pi^{\circ} = T\,{}^tD$$

のようにコンパクトに書ける．但し $^t$ は行列の転置を表わす．

さて，多項式環 $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n))$ の中に実現された表現 $\pi$ に附随して

$$\mathrm{Tr}(\pi({}^tT)\pi(D)) = \sum_{\mu,\nu} \pi_{\nu\mu}({}^tT)\pi_{\mu\nu}(D)$$

という $GL_n$ 両側不変微分作用素が考えられる．これは，関係式 $\Pi = {}^tTD$ を形式的に $\pi$ に入れて行列の形で積 (正規順序積の意味で) に分け，そのトレースをとった形である．したがって可換化して第一次近似することから，もとの生成系 $E_{ij}$ を $\pi$ に代入てトレースをとったものの何らかの意味の非可換版が得られるだろうというのである．つまり，その作用素を普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元で

$$C_{\pi} = \mathrm{Tr}(\pi^{\natural}(\mathbb{E})) = \sum_{\mu} \pi^{\natural}_{\mu\mu}(\mathbb{E})$$

なるものの表現として表わす為の修正・補正 $\pi^{\natural}$ を具体的に見出すことが問題となる．もちろん $C_{\pi}$ を表わす "多項式" $\pi^{\natural}_{\mu\mu}$ は非可換なので面倒である．これに対する解答は A. Okounkov (1996) によって一応与えられている．不変環の生成系で書くという [HU] の不変式論的な見方からすると，これはむしろ表現論的な立場と言える．これが higher order Capelli の一つの考え方であるが，この $C_{\pi}$ は実際は，既約表現 $\pi$ だけから定義されているのではなく，多項式環 $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n))$ の中に実現されているということにも依っている．例えば，別の Capelli 型恒等式では，対称行列や交代行列での実現から出発した (はじめにとる multiplicity-free action が異なる) が，その場合に $C_\pi$ の対応物は表現 $\pi$ だけによるかどうか定かでない．(もちろん，ここで，表現が忠実でない時の「核」の不定性という別の問題もある.)

今は不変微分作用素から出発し，忠実な表現空間 $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n))$ が自然に現われたが，群 (Lie 環) を一般にしても，表現に「標準的」(?) に付随する中心元を独立に考えることはできる．つまり，多項式表現として得られる「行列要素」の多項式を非可換に捻る仕方を，固有値などで特定するということなどである．しかしそれと上の不変微分作用素との関係はアプリオリにわかるともいえない．少なくとも vanishing property などに密接に関係していることは確かであるが．この意味で，このような中心元の構成について，Capelli 問題とからめると，少し違った側面が見えてくるように思える．野海氏の「量子群に於ける」標準的中心元と，その古典対応物について，真剣に検討する時期にきているのであろう．

### 3: 非可換多項式のいろいろな構成

古典的な Capelli 恒等式で中心元を表わすのに使われるのは列行列式 (column determinant) で，交代和

$$\det(\Phi) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, \Phi_{\sigma(1)1}\Phi_{\sigma(2)2}\cdots\Phi_{\sigma(n)n}.$$

として定義された．これは積で左右の順を優先するが，上下を優先するもの (row determinant) もある．両者は区別しないといけないが，転置をとるというだけなので本質的には変わらない．これの「よさ」は和をとる項数のすくない点であり，また，古典的 Capelli の場合は有限次元既約表現 (一般には highest weight 表現) の上での作用が．対角成分のみを見るだけで計算されるという大きな利点がある．その一方，定義された普遍包絡環の元が中心に属することは自明でなくなる．それでも古典的 Capelli の場合は，それほど難しくない．

これらであらゆる列や行の順番を入れ替えて平均するもの (double determinant; symmetrized determinant) なども考えられる．平均化した元が中心元である証明は容易になるが，具体的な計算には項数の多い分の困難が当然加わる．行列式の定義から符号の分をのぞいたものがパーマネント (permanent) であるが，事情は全く同様である．偶数次の交代行列に対するパフィアン (Pfaffian) とその対称行列対応物であるハフニアン (Hafnian) はそれぞれ，直交 Lie 環，シンプレクティック Lie 環の中心元の構成に用いられる．他に行列の冪のトレースという形の中心元もある．Lie 環が $\mathfrak{gl}_n$ の場合は，これらの関係も比較的容易に扱える．

これらの行列函数が中心元の構成に用いられる背景は，可換変数の場合，行列の変換に対してよく振る舞うということである．より正確には，表現の行列要素が，行列式その他の行

列函数で表わされるということであり，基本にある表現に応じて中心元 (の系列) が変わるのである．行列式はベクトル表現の交代テンソル表現の系列であるし，パーマネントは対称テンソルの方の系列である．非可換成分でこれらを扱う際には，その出自を意識する必要が増してくるように思われる．

すぐ上で述べた「表現の行列要素」或いはそのトレースとしての中心元は，本筋として扱うべきもので，量子群などへの拡張を考える際にも指導原理となると思う．行列式やパーマネントなどのように，乗法的に扱いやすい系列は，丁度「古典的不変式論」に於ける「記号的方法」の非可換版である「母函数の方法」を援用しているといえる．これは Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を基礎のベクトル表現から作った交代または対称の形式変数を添加して環を拡大し，その中にあからさまな不変元 (古典的不変式論でいえば「基本形式=ground form」，また，別の見方で言えば typical invariant) を作り，そこから乗法的に生成された不変元を $\mathfrak{g}$ 共変な線型形式を通じて普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に戻すという形で中心元を構成するという手続きである．もちろん，交代や対称だけに限らず，それらが入り混じったものや，もっと一般のテンソル代数を使うこともできる．Okounkov の構成もその枠で捉えられる．その際，$\mathfrak{g}$ 共変な線型形式が，対称群の既約表現から決まる射影といった，少々「安直」(?) なものである点が，筆者には余り好ましく思えないのであるが．

同じ「記号的方法」は中心元の間の関係を導くのにも使われるし，Capelli 恒等式自体を導く手段でもある．この「記号的方法」からすると，第 1 節の (A)–(C) の問題は不可分に互いに絡み合っている．

実際の中心元の構成ではいろいろな点で困難があった．例えば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ だと行列式型でもパーマネント型でもきれいな「列」または「行」の和で中心元が書ける．それに反して，直交やシンプレクティック Lie 環では，大雑把に言うと，その片方だけがきれいになる．これと関係もありそうなのは $\mathfrak{gl}_n$ でも対称行列上の表現と交代行列上の表現という multiplicity-free action の場合は，Capelli 恒等式がきれいに書けて証明が易しいのが行列式型でもパーマネント型の片方だけになるという現象である．現象の類似だけでなく，交換関係の記述がその根拠にある．しかし，交換関係が一見簡単でなくても結果がきれいになることはしばしばあり，交換関係だけを見て諦めるのは早計なのである．ここで一番明らかにしたい問題は

**どのようにして，きれいな結果が得られるかどうか判定するのか，できるのか**

ということである．交換関係が一見簡単でないものとしては，和地氏の split 型直交 Lie 環の普遍包絡環の行列式型中心元，伊藤氏のさまざまな dual pair に関する Capelli 恒等式，また私の Wronski 関係式などの例がある．これらに関して「できてしまう」までは，それが

遂行可能かどうか判らないのが，大きな問題なのだ．ほかにもっと易しい例では，直交 Lie 環の anisotropic 型実現に関する中心元でも，証明法によって，難易さに差があるという事実もある．

このような困難について，例えば量子群がヒントになれば言うことはないのであるが，今のところ何とも言えない．しかし，形式変数の環をどのように設定するかなどは，$R$ 行列の特殊なスペクトル・パラメータの値 (対称や交代代数を与える) という「固有値」との関係が一つの鍵だから，より根源的には，そちらを真剣に考えるのがよいかもしれない．

**4: 中心元の固有値**

表現論的に異なった背景をもつ中心元がいろいろ構成されると，当然その間の関係が問題となる．上に (B) として挙げた問題である．これに関して，一般論で言えば半単純な Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し，Harish-Chandra 同型

$$ZU(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{h})^W = S(\mathfrak{h})^W$$

がある．ここに $\mathfrak{h}$ は Cartan 部分環で $W$ は Weyl 群を表わす．それが中心元を記述しているのであるから，関係もここから導ける「はず」だという原則は正しい．上の典型群では $\mathfrak{h}$ は対角行列にとることができ，Weyl 群は対称群 $\mathfrak{S}_n$ かそれと $\{\pm 1\}^n$ または $\{\pm 1\}^{n-1}$ の半直積になる．これらは鏡映群で不変式環 $S(\mathfrak{h})^W$ は対称式環やそれを少し modify したものになって，よく判る．例えば対称式環の場合，生成系として基本対称式，完全斉次対称式，冪和対称式などがとれるし，線型な基底として Schur 多項式が取れる．これらは表現論的な意味がある．一般線型群としての表現論的な意味と，対称群としての表現論的意味が対応するのは Schur-Weyl duality があるからであるが，それ以外だと対称式の方での Weyl 群としての表現論的意味は微妙である．

この Harish-Chandra 同型による像を知ることとは，別の言葉でいえば，(有限次元) 既約表現に於ける中心元の値 (Schur の補題によってそれはスカラーになる) をすべて計算することである．つまり固有値の計算である．定理の決定的に重要な点は，それが普遍包絡環の内だけで原理的に計算可能だというところにある．

さて，Harish-Chandra 同型

$$ZU(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})^W$$

の右辺はよく判ったとしても，左辺の対応物の具体的表示などはそんなによく判っていない．つまり，

(1) $ZU(\mathfrak{g})$ の元の具体的構成の問題と

(2) その Harish-Chandra 同型による像の計算

という問題は別の困難さを有する．たとえば (1) の問題だけなら対称化によって作れないわけではないが，それに対応する (2) の計算は困難である．

Harish-Chandra 同型は重要である．しかし，万能ではない．一般論に慣れた表現論研究者は，時として，常に Harish-Chandra 同型の計算に第一の優先順位を与え，中心元の間の等式の証明も，それを用いて行なうのを本筋と考えるものであるが，実際はこのような困難があることを忘れがちである．この目印は迷子になったとき重要だが，いつもいつもそこを通る必要も義理もない．柔軟に考えたい．実際，非可換な行列函数で表わされた中心元の関係は，直接で示す方が早い場合も多々ある．

とは言っても，Harish-Chandra 同型の重要性は変わらないので，上に述べたような行き来が自由になるのは望ましいことである．これも不変元同士の関係の特別なものとして考察すべきであろう．逆にまた，伊藤氏などの稿にあるように，対称式の観点を見直すきっかけにもなる場面である．

**5: 非可換版記号的方法と行列要素**

既に触れたが，$\mathfrak{gl}_n$ でも対称行列上の表現と交代行列上の表現を考えると，座標のパーマネントや行列式という「行列要素」型の多項式以外に，ハフニアンやパフィアンという，別種の特殊多項式が現われる．これは $\mathfrak{gl}_n$ の表現の「行列要素」ではない．これらは，むしろ「ベクトル」である．その証拠にパーマネントや行列式には添え字 (足) が 2 本あるのに対し，ハフニアンやパフィアンには足が 1 本しかない．これを「行列要素の哲学」から正しく見ようとすると，群 (または Lie 環) を拡げてシンプレクティック群または直交群 (正確にはその "被覆"；Lie 環だけ考えるなら，最初は被覆を考える必要はないが，最終的には「群」まで延長しなくてはいけない) の表現の行列要素と捉えることが浮かび上がる．その場合 $GL$ はサイズが倍のシンプレクティック群または直交群 (の被覆) に埋め込まれ，その oscillator または spin 表現という，根本的な既約表現の行列要素としてハフニアンやパフィアンが現われるのである．この見方こそが交代行列に対し，パフィアンの自乗が行列式になるということの表現論的背景である．そして「非可換版」記号的方法は，「非可換版」dual pair (もどき) という類似の対称性を介して，直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ が $\mathfrak{sl}_2$ によって統制されるさまを描き出している．この $\mathfrak{sl}_2$ 対称性によって，超幾何的，或いは二項型の多項式が，いろいろな公式のなかに現われることを，少なくとも部分的に，説明している．これが「非可換版行列要素」と

して得られる，特殊多項式の統制として，一つの理想を示していると思う．それがどこまで一般的なのか，この時点では未知であるが．

目指すべき究極的な目標は『Capelli 恒等式の統一像』にあるが，もちろん現状はそれに程遠い．例外型 Lie 群や量子群を視野に入れることも，必要であろうと思うが，Howe-Umeda の multiplicity-free actions に付随した Capelli でさえ，完全な分析に至っている訳でない．

## 6: まとめ

いくつかの問題を提起し，それに関する現状認識から，進むべき方向について少し論じてきた．それが正鵠を得たものかどうかは判らないが，最後に若干のまとめをしよう．

(1) [Capelli 恒等式の研究を不変式論の非可換版として捉える立場]

Capelli 恒等式は，既にその誕生の瞬間から，不変式論と表現論を，双対性の具現として繋ぐ役割を担ってきた．この視点をより明瞭にすることで Capelli の本質に迫りたいものである．まず第一に，古典的不変式論は「記号的方法」によって，ベクトル不変式のうちの「あからさまな不変式 typical invariants」から，より一般の不変式を記述する術を与えた．これはたとえば「母函数の方法」によって，形式変数を添加して拡大した環の明らかな不変元から，普遍包絡環の中心元を記述する方法へと受け継がれた思想である．同時にそれは Capelli 恒等式自体の証明 (中心元の表現) や，中心元の間の関係を調べる有力な手段ともなっている．また，典型群に対しては，ベクトル不変式の記述 (第一基本定理) は変数倍加法 (doubling the variables) を通じて R. Howe の dual pair 理論を支える．このような対称性を支配する側 (dual) がはっきり判ることは，不変式論が双対定理を通じて表現論に対する大きな寄与である．ここで Capelli 恒等式を，非可換成分の行列表現に関するトレースだと捉えると，中心元の表示や中心元の間の関係を調べる上に於いても，「非可換版 dual pair」そのものではないにしても，dual の側の対称性を用いて，交換関係等の理解を透明にできる可能性が生じる．これに対しては，まだ僅かな例しかないが,「非可換成分の行列要素」の考えは，特殊函数論と表現論のつながりを「非可換的」に説明するものとして今後発展の余地があるのではないだろうか．

ここで，ひとつ抜け落ちているが，Gelfand 型不変元 (冪のトレース型)，つまり対称式でいえば冪和対称式，といった「表現の行列要素」そのものではないものをどう見るかという問題がある．私にはどう取り扱ったらよいか判らない．Newton 公式の Koszul 複体的証明が得られたら，それについてもヒントにはなるだろう．以前から考えてはいるものの，これについては cyclic cohomology と関係ないだろうか，などといういい加減なことしか思いつ

かない．対数微分の世界についてもっとよく考えてみたい．

(2) [固有値と差分的世界]

交換関係の複雑さを捌くのは，たとえば量子群が $R$ 行列で記述される点に顕著に見られる例であるが，形式変数の選び方は「固有値」との整合性に関係している．また，Lie 環の普遍包絡環の元を形式的に指数函数に乗せて「群」化する際にも，単なる冪か階乗冪を選ぶかで表示のきれいさが分かれるが，その境は adjoint 表現の固有値と関係している．非可換多項式として，Capelli 元などの補正の由来が $\rho$-shift と看做せるかどうかは，$\rho$-shift そのものの反省をもたらすだろう．一方でこのような「固有値」との関係が，他方では非可換化することによって生じる「差分的」世界との相性のよさとどうしてつながるかも，Capelli 的問題の近い周辺に位置している．古典的な常微分方程式 (確定特異点など) では，特性方程式の根の「差」が鍵となるのは,「係数行列」が adjoint 型の表現と関係しているからであり．一方それが「整数」かどうかで分かれるのは，Euler 作用素の固有値が整数だからである．このように一見 Lie 環が関係しないところでも，対称性は現象を支配していることがあり，Capelli と超幾何などのつながりも，単なる現象的類似ではないだろうというのが私の希望的観測である．

## 文献


[1] 梅田　亨，100 年目の Capelli Identity，数学 **46**(1994), 206–227. (英訳: *The Capelli Identities, a century after*, in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants” (Ed. by K. Nomizu), AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78.

[2] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[3] T. Umeda, *Newton's formula for* $\mathfrak{gl}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[4] T. Umeda, *On the proofs of the Capelli identities*, preprint 1997

[5] T. Umeda, *On Turnbull identity for skew-symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **43** (2000), 379–393.

[6] T. Umeda, *Application of Koszul complex to Wronski relations for* $U(\mathfrak{gl}_n)$, Commentarii Math. Helv. 78 (2003), 663–680

[7] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of*

*the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127**(2001), 333–359.

[8] 梅田　亨，跡公式としての Capelli 恒等式, "数理科学" No. 429 (1999 年 3 月号), 39–46.

[2] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, A quantum analogue fo the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$, Duke Math. J. **76**(1994), 567–595

[3] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, Dual pairs, spherical harmonics, and a Capelli identity in quantum group theory, Compositio Math. **104**(1996), 227–277

[5] M. Itoh: Capelli identities for the dual pair $(O_M, Sp_N)$, Math. Zeit. **246**(2004), 125–154

[6] A. Wachi: Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras, to appear in Lett. Math. Phys.