数理解析研究所講究録
1508 巻 2006 年 119-124

F_4 型 Weyl 群不変式の初等的構成法

An Elementary Method of Constructing $W(F_4)$ Invariant Polynomials

谷口　健二　(Kenji TANIGUCHI)

青山学院大学理工学部　(Aoyama Gakuin University)

Abstract

F_4 型 Weyl 群は，D_4 型 Weyl 群をその正規部分群として持つ．このノートでは，4 変数 2 次同次多項式のなすベクトル空間上における D_4 型 Weyl 群の表現の基底から，初等的に F_4 型 Weyl 群の不変式を構成する．

1　F_4 型 Weyl 群

まず最初に記号を導入し，F_4 型 Weyl 群を具体的に実現する．

$e_1, \ldots, e_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の標準基底とする．階数 4 の D_4, B_4, F_4 型ルート系はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\Sigma(D_4) &= \{\pm e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq 4\} \\
\Sigma(B_4) &= \Sigma(D_4) \cup \{\pm e_i; 1 \leq i \leq 4\} \\
\Sigma(F_4) &= \Sigma(B_4) \cup \{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}
\end{aligned}$$

と実現される．よって，D_4 型 Weyl 群 $W(D_4)$ と B_4 型 Weyl 群 $W(B_4)$ は，$\boldsymbol{R}^4$ 上の座標変換

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\varepsilon_1 x_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 x_{\sigma(2)}, \varepsilon_3 x_{\sigma(3)}, \varepsilon_4 x_{\sigma(4)}) \tag{1.1}$$

のなす群と同一視される．ここで σ は 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元であり，

$$\begin{cases}
\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_4 = \pm 1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1, & D_4 \text{ 型} \\
\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_4 = \pm 1, & B_4 \text{ 型}
\end{cases}$$

とした．

F_4 型 Weyl 群 $W(F_4)$ は，B_4 型 Weyl 群の元と $(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)/2$ に関する鏡映変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

によって生成される．この変換を r_1 で表すことにする．

あるいは，$W(D_4)$, r_1 および $(e_1+e_2+e_3+e_4)/2$ に関する鏡映変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

で生成されるとしてもよい．(1.3) の変換を r_2 で表すことにする．また，変数 x_i の符号変換を ϵ_i で表すことにする．

次の補題は容易に確かめられる．

Lemma 1.1 $W(D_4)$ は $W(F_4)$ の正規部分群であり，$W(F_4)/W(D_4)$ は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ に同型である．これは r_1, r_2 の生成する群と同型であり，

$$(r_1r_2)^3 = e, \qquad \epsilon_1 = r_1r_2r_1$$

となる．

2 $\boldsymbol{R}^4$ 上の 2 次多項式空間における $W(D_4)$ の表現

ここでは $W(F_4)$ 不変式の素となる，$W(D_4)$ 表現の基底について説明する．Weyl 群の実現 (1.1) から Weyl 群の多項式空間上の表現が得られるが，そのうち 2 次多項式の空間上の表現を考え，まず $W(D_4)$ の作用と相性のよい基底を選ぶ．

$\boldsymbol{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ の 2 次式を

$$\begin{aligned}
\Delta &:= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\
X(i,j;k,l) &:= x_ix_j + x_kx_l \quad (\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}), \\
Y(i,j;k,l) &:= x_ix_j - x_kx_l \quad (\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}), \\
Z(i,j;k,l) &:= \frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2 - x_k^2 - x_l^2) \quad (\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\})
\end{aligned}$$

と取る．更に，記法の簡便のため，

$$\begin{aligned}
X_i &:= X(1,i;j,k) \qquad (\{i,j,k\} = \{2,3,4\}), \\
Y_i &:= Y(1,i;j,k) \qquad (\{i,j,k\} = \{2,3,4\}), \\
Z_i &:= Z(1,i;j,k) \qquad (\{i,j,k\} = \{2,3,4\})
\end{aligned}$$

と置き，

$$\begin{aligned}
V_1 &:= \boldsymbol{C}\Delta, & V_X &:= \boldsymbol{C}\text{-span}\langle X_2, X_3, X_4\rangle, \\
V_Y &:= \boldsymbol{C}\text{-span}\langle Y_2, Y_3, Y_4\rangle, & V_Z &:= \boldsymbol{C}\text{-span}\langle Z_2, Z_3, Z_4\rangle
\end{aligned}$$

とする．Δ は 4 次直交群の不変式であるから，V_1 は Weyl 群の自明な表現である．また，次の事実は容易に確かめることができる．

Lemma 2.1 $W(D_4)$ の元は上記の 2 次式に以下のように作用する：

$$\begin{aligned}
&\sigma(X(i,j;k,l)) = X(\sigma(i),\sigma(j);\sigma(k),\sigma(l)) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_4),\\
&\varepsilon(X(i,j;k,l)) = \varepsilon_i\varepsilon_j X(i,j;k,l) \qquad (\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_4) \in W(D_4)),\\
&\sigma(Y(i,j;k,l)) = Y(\sigma(i),\sigma(j);\sigma(k),\sigma(l)) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_4),\\
&\varepsilon(Y(i,j;k,l)) = \varepsilon_i\varepsilon_j Y(i,j;k,l) \qquad (\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_4) \in W(D_4)),\\
&\sigma(Z(i,j;k,l)) = Z(\sigma(i),\sigma(j);\sigma(k),\sigma(l)) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_4),\\
&\varepsilon(Z(i,j;k,l)) = Z(i,j;k,l) \qquad (\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_4) \in W(D_4)).
\end{aligned}$$

Lemma 2.2 上記の 2 次式への, r_1, r_2, ϵ_1 の作用は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&r_1(X_i) = Z_i, \qquad r_1(Y_i) = Y_i, \qquad r_1(Z_i) = X_i \quad (i = 2,3,4),\\
&r_2(X_i) = X_i, \qquad r_2(Y_i) = -Z_i, \qquad r_2(Z_i) = -Y_i \quad (i = 2,3,4),\\
&\epsilon_1(X_i) = -Y_i, \qquad \epsilon_1(Y_i) = -X_i, \qquad \epsilon_1(Z_i) = Z_i \quad (i = 2,3,4).
\end{aligned}$$

今得られたことを図で表しておこう.

$$\begin{tikzcd}
V_X \arrow[rr, leftrightarrow, "\epsilon_1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "r_1"'] & V_1 & V_Y \arrow[dl, leftrightarrow, "r_2"] \\
& V_Z &
\end{tikzcd}$$

$W(F_4)/W(D_4)$ の $W(D_4)$ 表現への作用

これらの補題により，2 次多項式の空間の既約分解が得られる.

Corollary 2.3 4 変数 2 次同次多項式の空間上の $W(D_4)$, $W(B_4)$ および $W(F_4)$ の表現は以下のように既約分解される.

(1) $W(D_4)$ の表現として 2 次同次式の空間を既約分解すると，既約成分は V_1, V_X, V_Y, V_Z の四つとなり，V_1 は自明な表現，V_X, V_Y, V_Z は互いに同値な 3 次元表現である.

(2) $W(B_4)$ の表現として 2 次同次式の空間を既約分解すると，既約成分は V_1, $V_X \oplus V_Y$, V_Z の三つとなる.

(3) $W(B_4)$ の表現として 2 次同次式の空間を既約分解すると，既約成分は V_1, $V_X \oplus V_Y \oplus V_Z$ の二つとなる.

以上の結果を使えば，上記の多項式の積や和で $W(D_4)$, $W(B_4)$, $W(F_4)$ の不変式が容易に構成できる．次の節ではこの構成を行い，不変式の代数的独立性を確かめる.

3 $W(F_4)$ 不変式の構成

Lemma 2.1 により，まず $W(D_4)$, $W(B_4)$ 不変式が以下のようにして構成できる．

Proposition 3.1 (1) $E_X := X_2X_3X_4$, $E_Y := Y_2Y_3Y_4$ は $W(D_4)$ 不変式である．また，$E_Z := Z_2Z_3Z_4$ は $W(B_4)$ 不変式である．

(2) $P_{X,2k} := \sum_{i=2}^4 X_i^{2k}$, $P_{Y,2k} := \sum_{i=2}^4 Y_i^{2k}$, $P_{Z,2k} := \sum_{i=2}^4 Z_i^{2k}$ $(k = 1,2,3,\dots)$ は $W(B_4)$ 不変式である．

Proof. まず，$\sigma \in \mathfrak{S}_4$ は X_2, X_3, X_4 の置換として作用するので，E_X は $\mathfrak{S}_4$ 不変である．また $2 \le i \ne j \ne k \ne i \le 4$ として，$\sigma = (1,i)$ の Y_i, Y_j, Y_k への作用を考えると，

$$\sigma(Y_i) = Y_i, \qquad \sigma(Y_j) = -Y_k, \qquad \sigma(Y_k) = -Y_j$$

であるので，この場合には $\sigma(E_Y) = E_Y$ である．$\mathfrak{S}_4$ は $(1,i)$ $(i = 2,3,4)$ で生成されるので，全ての $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して $\sigma(E_Y) = E_Y$ が成り立つ．E_Z についても同様．以上により，対称群の作用による不変性が示された．

次に符号変換による不変性を考える．Z_i は各変数の符号変換によって不変である．また，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$ が $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$ を満たすとき，Lemma 2.1 より

$$E_X = \varepsilon(X_2X_3X_4) = (\varepsilon_1\varepsilon_2X_2)(\varepsilon_1\varepsilon_3X_3)(\varepsilon_1\varepsilon_4X_4) = X_2X_3X_4 = E_X$$

であるので，E_X は ε の作用で不変である．E_Y についても同様．以上により，(1) が示された．

また Lemma 2.1 により $w \in W(D_4)$ は $\{X_2^2, X_3^2, X_4^2\}$, $\{Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2\}$ および $\{Z_2^2, Z_3^2, Z_4^2\}$ の置換として作用するので，(2) の各式は $W(B_4)$ 不変式である． □

これらの多項式に対する $W(F_4)$ の元の作用を考えれば，$W(F_4)$ の不変式が構成できる．その結果は Lemma 2.2 により，以下のようになる．

Proposition 3.2 次の多項式は $W(F_4)$ の不変式である：

$$\Delta$$

$$E_{F_4} := X_2X_3X_4 - Y_2Y_3Y_4 + Z_2Z_3Z_4,$$

$$P_{F_4,2k} := \sum_{i=2}^4 (X_i^{2k} + Y_i^{2k} + Z_i^{2k}) \quad (k = 1,2,3,\dots),$$

$$PE_{F_4,2k} := \left(\sum_{i=2}^4 X_i^{2k}\right)\left(\sum_{i=2}^4 Y_i^{2k}\right)\left(\sum_{i=2}^4 Z_i^{2k}\right) \quad (k = 1,2,3,\dots).$$

これらの多項式や 2 次式 Δ は不変式ではあるが，代数的独立とは限らない．例えば

$$P_{F_4,4} = \frac{3}{4}\Delta^2$$

である．

$W(F_4)$ の基本不変式の次数は $2, 6, 8, 12$ であるから，Δ, E_{F_4}, $P_{F_4,8}$ と $P_{F_4,12}$ または $PE_{F_4,4}$ が代数的に独立ならば，これらを不変式環の生成系として採用することができる．

Remark 3.3 この研究会で，あるいは他の所で，Δ, E_{F_4}, $P_{F_4,8}$, $P_{F_4,12}$ が独立と話したが，これは私の間違いで，実は 12 次式として $P_{F_4,12}$ を採用すると代数的に従属になってしまう．しかし $PE_{F_4,4}$ を採用すれば独立となる，というのが次の定理です．

Theorem 3.4 Δ, E_{F_4}, $P_{F_4,8}$, $PE_{F_4,4}$ は代数的に独立であり，$W(F_4)$ の不変式環の生成系を成す．

Proof. 証明はよく知られた方法（例えば Kostant の論文 [1] を参照）をそのまま実行すればできる．

定義より，Δ, E_{F_4}, $P_{F_4,8}$, $PE_{F_4,4}$ が代数的に従属とは，非自明な多項式 $f(t_1, t_2, t_3, t_4)$ であって，$f(\Delta, E_{F_4}, P_{F_4,8}, PE_{F_4,4}) = 0$ となるものが存在することである．ここで両辺の微分を取ると $\dfrac{\partial f}{\partial t_1}d\Delta + \dfrac{\partial f}{\partial t_2}dE_{F_4} + \dfrac{\partial f}{\partial t_3}dP_{F_4,8} + \dfrac{\partial f}{\partial t_4}dPE_{F_4,4} = 0$ なので $d\Delta$, dE_{F_4}, $dP_{F_4,8}$, $dPE_{F_4,4}$ は線形従属である．よってこれらが線形独立であることを示せばよいが，

$$\begin{aligned} &d\Delta \wedge dE_{F_4} \wedge dP_{F_4,8} \wedge dPE_{F_4,4} \\ &= \begin{vmatrix} \partial\Delta/\partial x_1 & \partial\Delta/\partial x_2 & \partial\Delta/\partial x_3 & \partial\Delta/\partial x_4 \\ \partial E_{F_4}/\partial x_1 & \partial E_{F_4}/\partial x_2 & \partial E_{F_4}/\partial x_3 & \partial E_{F_4}/\partial x_4 \\ \partial P_{F_4,8}/\partial x_1 & \partial P_{F_4,8}/\partial x_2 & \partial P_{F_4,8}/\partial x_3 & \partial P_{F_4,8}/\partial x_4 \\ \partial PE_{F_4,4}/\partial x_1 & \partial PE_{F_4,4}/\partial x_2 & \partial PE_{F_4,4}/\partial x_3 & \partial PE_{F_4,4}/\partial x_4 \end{vmatrix} \\ &\quad \times dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

であるので，この行列式が恒等的に 0 ではないことを示せばよい．文献 [1] にも書いてあるが，この行列式は正ルートの積の定数倍になることがよく知られている．実際，今の場合，行列式を計算すると（手で計算できます）

$$-3^4 \cdot 2^{13} x_1 x_2 x_3 x_4 \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_i^2 - x_j^2) \times \prod_{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 = \pm 1} \frac{1}{2}(x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4)$$

となり，恒等的に 0 ではない． □

4 謝辞

この共同利用「Capelli 恒等式の新局面」は，数理研のホームページで見て面白そうだと思い，梅田さんにお願いして参加させて頂きました．とてもよくわかる話が続いた研究会で，大変勉強になりました．参加させて下さった梅田さん，昼夜問わず面白い話を聞かせてくださった参加者の皆さんに感謝しています．

References

[1] Kostant, B.: Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404. (MR0158024 (28 #1252))