数理解析研究所講究録
1509巻 2006年 1-23

Holonomicな定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality

新潟大学工学部情報工学科　田島 慎一 (Shinichi TAJIMA)

キーワード: 指数多項式, 代数的局所コホモロジー, 多変数留数, Fourier-Borel 変換, グレブナ基底, Grothendieck 双対性, Noether 作用素, 準素イデアル分解

目次

0. 序

複素空間 $X = \mathbf{C}^n$ 上, 一つの関数 $u(z)$ を未知関数とする定数係数の線形偏微分方程式系

$$M : P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0$$

で SKK([29]) の意味で極大過剰決定系となるものが与えられたとする. 本稿では, このような極大過剰決定系に対し,

(i) 指数多項式解の構成

(ii) コーシー問題の基本解の構成

の二つの問題を考える. 比較的規模が大きい方程式系を, 数式処理を用いて扱うことを想定し, 上記の問題を exact に解くアルゴリズムを構成することを目標としている. その為に本稿では, 代数的局所コホモロジー群と Grothendieck 留数の概念を用いて定数係数偏微分方程式系を取り扱うことを提唱し, 構成的に理論を展開する為の基本的枠組みを与える.

前半では, 代数的局所コホモロジー群に対する Fourier-Borel 変換を用いることで指数多項式解を記述する方法を与える. さらにまた, コーシー問題は多変数多項式環の零次元イデアルに対する Grothendieck 双対性の問題として捉え直すことが出来ることを示す.

後半では, D-加群の理論と計算代数の手法を組み合わせることにより, さまざまな計算が可能となることを示す. 特に, Noether 作用素の計算法と準素イデアル分解の利用について考察する.

1. Fourier-Borel 変換

複素 n 次元の空間 $X=\mathbf{C}^n$ の座標を $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ とし, その双対にあたる複素 n 次元空間 Z の座標を $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)$ とする. Z 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_Z$ で表す. また, Z 上の点 $A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$ とおき, Z 上の線形偏微分作用素で, 正則関数を係数にもつもののなす層を $\mathcal{D}_Z$ とおく. 次の結果は基本的である（cf. SKK[29]）.

補題 1　代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$ は $\mathcal{D}_Z$-加群として simple である.

さて, つぎの自然な写像

$$i:\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z/\langle\zeta_1-\alpha_1,\zeta_2-\alpha_2,...,\zeta_n-\alpha_n\rangle,\mathcal{O}_Z)\longrightarrow\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$$

による $[\dfrac{1}{\zeta_1-\alpha_1\ \zeta_2-\alpha_2\ \cdots\zeta_n-\alpha_n}]$ の像を δ_A とおくと, 補題 1 より次が従う.

補題 2　代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$ の任意の要素 ψ_A に対して, 定数係数の偏微分作用素 $T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})$ であり $\psi_A=T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})\delta_A$ を満たすものが存在する.

注意　コホモロジー類 δ_A は $(\zeta_j-\alpha_j)\delta_A=0,\quad j=1,2,...,n$ を満たす. Noether 作用素の計算ではこの事実を用いる.

さて, 代数的局所コホモロジー類 $\psi\in H^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$ に対し, その Fourier-Borel 変換 $FB(\psi)$ を

$$FB(\psi)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint\cdots\oint_A\psi(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta$$

で定める. ただし $\langle\zeta,z\rangle=\zeta_1z_1+\zeta_2z_2+\cdots+\zeta_nz_n,\ d\zeta=d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$ である.

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint\cdots\oint_A[\frac{\gamma_1!\cdots\gamma_n!}{(\zeta_1-\alpha_1)^{\gamma_1+1}\cdots(\zeta_n-\alpha_n)^{\gamma_n+1}}]e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta=z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}\cdots z_n^{\gamma_n}e^{\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\cdots+\alpha_nz_n}$$

から明かなように, Fourier-Borel transform $FB(\psi)$ は指数多項式となり, 次を満たす.

補題 3

(i) $FB(\delta_A)(z)=e^{\langle\alpha,z\rangle}$,

(ii) $FB((-\frac{\partial}{\partial\zeta_1})^{\gamma_1}\cdots(-\frac{\partial}{\partial\zeta_n})^{\gamma_n}\delta_A)=z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}\cdots z_n^{\gamma_n}FB(\delta_A)(z)$.

線形偏微分作用素 $P(D)$ に対し, その偏微分記号 $\frac{\partial}{\partial z_k}$ を ζ_k に置き換えて得られる多項式を偏微分作用素 $P(D)$ の total symbol と呼び $p(\zeta)$ で表すことにする. 次の補題も基本的である.

補題 4　次が成り立つ.

$$P(D)FB(\psi)(z)=Res_V(\psi(\zeta)p(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)=FB(p\psi)(z).$$

2. 指数多項式解

偏微分方程式系 $M : P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0$ に対しその total symbol $p_1(\zeta), p_2(\zeta), ..., p_s(\zeta)$ をとり，これらの多項式が多項式環 $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]$ において生成するイデアルを I とおく．

$$I = \langle p_1(\zeta), p_2(\zeta), ..., p_s(\zeta)\rangle.$$

また，イデアル I の零点集合を V とおく．

$$V = \{\zeta \in Z \mid p_1(\zeta) = p_2(\zeta) = \cdots = p_s(\zeta) = 0\}.$$

偏微分方程式系 M は極大過剰決定系であると仮定しているので，V は有限個の点からなることが分かる．この零次元多様体 V に台を持つような代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ とおき，層 $\mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ の大域的切断全体 $\Gamma(Z, \mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z))$ のつくるベクトル空間を $H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ で表すことにする．

いま，V に属する点 A の座標を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ で表し，集合 V に対し，有限和 $\sum_{\alpha\in V}\sum_{\gamma} c_{\alpha,\gamma} z^{\gamma} e^{\langle\alpha,z\rangle}$ の形に表される指数多項式全体のなすベクトル空間を $Exp(V)$ とおく．

$$Exp(V) = \{\sum_{\alpha\in V}\sum_{\gamma} c_{\alpha,\gamma} z^{\gamma} e^{\langle\alpha,z\rangle} \mid c_{\alpha,\gamma} \in \mathbf{C}\}.$$

ただし，多重指数 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ は非負の整数で，和は有限和を意味するものとする．

定義 (cf. [20]) 代数的局所コホモロジー類 $\psi \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ に対し，その Fourier-Borel 変換 $FB(\psi)$ を

$$FB(\psi)(z) = Res_V(\psi(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)_\zeta = \sum_{A\in V} Res_A(\psi(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)_\zeta$$

で定める．ただし $\langle\zeta, z\rangle = \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \cdots + \zeta_n z_n$ であり $Res_A(**)$ は点 $A \in V$ における Grothendieck local 留数を変数 ζ について取ったものである．

次の命題もほとんど自明であろう．

命題 5 Fourier-Borel 変換 $FB : H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow Exp(V)$ はベクトル空間としての同型を与える．

ベクトル空間 Σ をつぎのように定義する．

定義 $\Sigma = \{\psi \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \mid p(\zeta)\psi = 0, \quad \forall p \in I\}.$

補題 4 で述べたように，偏微分作用素 $P(D) \in \mathbf{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}]$ の total symbol を $p(\zeta)$ とおくと

$$P(D)FB(\psi)(z) = Res_V(\psi(\zeta)p(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta) = FB(p\psi)(z)$$

が成り立つ．更に，次の定理が成り立つ．

定理 6 定数係数の極大過剰決定系 $P_1(D)u = P_2(D)u = \cdots = P_s(D)u = 0$ に対しその同次解のなす空間を $S = \{u(z) \mid P_1(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0\}$ とおく. さらに $\Sigma = \{\psi \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \mid p_1(\zeta)\psi = p_2(\zeta)\psi = \cdots = p_s(\zeta)\psi = 0\}$ とおく. この時 Fourier-Borel 変換 FB はベクトル空間 Σ とベクトル空間 S の間の同型を与える.

注意 Grothendieck 留数を用いて写像 $R : \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n] \times \Sigma \longrightarrow \mathbf{C}$ を $R(f, \psi) = Res_V(f(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta)$ により定めると $f \in I$ に対して $R(f, \psi) = 0$ が成り立つ. 従って, 写像 R は剰余空間 $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ と Σ の間に自然な pairing $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I \times \Sigma \longrightarrow \mathbf{C}$ を誘導する. 多変数留数理論から誘導されたこの pairing は Grothendieck duality を代数的局所コホモロジー群の言葉で言い替えたものであり, 特に非退化となる ([8], [10]). 従って, ベクトル空間 Σ はベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ の双対空間とみなすことが出来る（より正確には, Σ の要素の定める超関数のなす集合が $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ の双対ベクトル空間となる ([35],[37])）.

さて, イデアル I を層とみなし, I の定める $\mathcal{O}_Z$-加群 $\mathcal{O}_Z/I$ を $\mathcal{M}_P$ とおく. ベクトル空間 Σ に対応する層 $\{\psi \in \mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \mid p(\zeta)\psi = 0, \quad \forall p \in I\}$ を考え, これも記号 Σ で表す. いま, 複素空間 Z の零次元多様体 W を新たにとり, W に台を持つ代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}^n_{[W]}(\mathcal{O}_Z)$ とおく. この時, 次が成立することも基本的である.

定理 7 次が成立する.

(i) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{H}^n_{[W]}(\mathcal{O}_Z)) = \Gamma_{W\cap V}(\Sigma)$,

(ii) $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{H}^n_{[W]}(\mathcal{O}_Z)) = 0, \quad \text{for} \quad j \geq 1.$

証明 同型 $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z) = \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z)[-n]$ を用いると,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{H}^n_{[W]}(\mathcal{O}_Z)) \\
&\quad = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathbf{R}\Gamma_{[W]}(\mathcal{O}_Z))[n] \\
&\quad = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathbf{R}\Gamma_{W}(\mathcal{O}_Z))[n] \\
&\quad = \mathbf{R}\Gamma_W \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z)[n] \\
&\quad = \mathbf{R}\Gamma_W \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z) \\
&\quad = \Gamma_W(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z)) \\
&\quad = \Gamma_{W\cap V}(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z))
\end{aligned}
$$

を得る. これよりコホモロジーの消滅に関する結果 (ii) が直ちに従う.

また, $\Sigma \cong \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}_P, \mathcal{O}_Z)$ であるので, (i) を証明することが出来る.

この消滅定理は, 超関数の多項式による除算定理に相当する. Fourier-Borel 変換を施すことにより, 指数多項式のなす空間での偏微分方程式系の可解定理を導くことが出来る.

3. コーシー問題と Grothendieck 双対性

定数係数の極大過剰決定系 $M: P_1(D)u = P_2(D)u = \cdots = P_s(D)u = 0$ に対し, 定数係数の偏微分作用素の組 $B_1(D), B_2(D), ..., B_t(D) \in \mathbf{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}]$ が与えられたとする.

まず最初に,「つぎの形の Cauchy 問題 CP はいつ well-posed となるか」という問題を考え, その判定方法を与えておく.

$$CP \begin{cases} P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0, \\ B_j(D)u(z)|_{z=0} = w_j, \quad w_j \in \mathbf{C} \text{ for } j = 1, 2, ..., t. \end{cases}$$

ここで, Cauchy problem CP が well-posed とは, 任意に $w_j \in \mathbf{C}$ $(j = 1, 2, ..., t,)$ が与えられた時 Cauchy 問題 CP の解が一意的に存在することとする. 偏微分作用素 $B_j(D)$ の total symbol を $b_j(\zeta)$ とおき, その剰余類 $b_j(\zeta) + I$ を $[b_j] \in \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ で表すことにする.

命題 8 次の条件は同値である.

(i) Cauchy 問題 CP は well-posed である.

(ii) $\{[b_1], [b_2], ..., [b_t]\}$ はベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ の基底である.

この結果を用いれば, 多項式環におけるグレブナ基底の計算を行う事で, Cauchy 問題の与え方が適切であるか否かが判定できることになる.

例 (文献 [42])

$P_1(D) = 35D_x^4 + 35D_y^4 - 54D_x^2D_y^2 - 12D_x^2 - 12D_y^2$, $P_2(D) = 5D_x^3D_y + 5D_xD_y^3 - 6D_xD_y$ とおく. 定数係数の線形偏微分作用素環 $\mathbf{C}[D_x, D_y]$ において P_1, P_2 の生成するイデアルを $I_D = \langle F_1, F_2 \rangle$ とおく. このイデアル I_D の項順序 $D_y \succ D_x$ のもとでのグレブナ基底を求めると

$\{-875D_y^4 + 300D_y^2 + 965650D_x^8 - 1164360D_x^6 + 284821D_x^4 + 300D_x^2,$
$-675D_xD_y^2 + 482825D_x^7 - 582180D_x^5 + 142848D_x^3,$
$-155D_x^5D_y + 186D_x^3D_y - 45D_xD_y,$
$-5425D_x^9 + 8370D_x^7 - 3807D_x^5 + 540D_x^3\}$

となる. 剰余空間 $\mathbf{C}[D_x, D_y]/I_D$ の基底として (例えば, 標準的な)

$$\{D_y^3, D_y^2, D_x^4D_y, D_x^3D_y, D_x^2D_y, D_xD_y, D_y, D_x^8, D_x^7, D_x^6, D_x^5, D_x^4, D_x^3, D_x^2, D_x, 1\}$$

を取れば, これらに対するコーシー問題は適切である. (この偏微分方程式系の解空間は 16 次元ベクトル空間をなす. 零次元多様体 V の原点 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ での重複度を調べることで多項式解は 4 次元ベクトル空間となることが分かる. また, 準素イデアル分解を取れば, 多項式解のみたす偏微分方程式系を求めることも簡単に出来る)

準備が済んだので, 本題にはいる.

今, 上の補題の条件を満たすような定数係数の偏微分作用素 $B_1(D), B_2(D), ..., B_m(D) \in \mathbf{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}]$ が与えられたとする. ただし, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]/I$ の次元を

m とおいた. 次のふたつの問題 F_D と F_P を考える.

$$F_D \begin{cases} P_1(D)u_k(z) = P_2(D)u_k(z) = \cdots = P_s(D)u_k(z) = 0, \\ B_j(D)u_k(z)|_{z=0} = \delta_{j,k}, \quad 1 \le j,k \le m, \end{cases}$$

$$F_P \begin{cases} p_1(\zeta)\psi_k(\zeta) = p_2(\zeta)\psi_k(\zeta) = \cdots = p_s(\zeta)\psi_k(\zeta) = 0, \\ Res_V(b_j(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta) = \delta_{j,k}, \quad 1 \le j,k \le m \end{cases} .$$

ここで, $\delta_{j,k}$ はクロネッカーのデルタを表す.

F_D はコーシー問題の基本解を求める問題であり, F_P は, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n]/I$ の基底 $\{[b_1],[b_2],...,[b_m]\}$ に対し, ベクトル空間 Σ での双対基底 (biorthonomal 基底) を求める問題である.

次の定理が成り立つ.

定理 9　問題 F_P の解 $\psi_1,\psi_2,...,\psi_m \in \Sigma$ に対し $u_k = FB(\psi_k)$ $(k=1,2,...,m)$ とおく. この時 $u_1,u_2,...,u_m$ は問題 F_D の解となる.

証明　指数多項式 $u_k(z) = FB(\psi_k)(z)$ が偏微分方程式系 M を満たすことは明かである. 原点 $z=0$ において初期条件を満たしていることを確かめればよい.

$$B_j(D)u_k(z) = B_j(D)FB(\psi_k)(z) = Res_V(b_j(\zeta)\psi_k(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)$$

よりただちに

$$B_j(D)u_k(z)|_{z=0} = Res_V(b_j(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta) = \delta_{j,k}$$

を得る.

注意 (Remainder formula と residual duality(cf. [35], [37]))　多項式 f のイデアル I による剰余類 $f+I$ を $[f]$ で表すことにすると, $[b_1],[b_2],...,[b_m]$ がベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n]/I$ の基底であることから, この剰余類 $[f]$ は次の形に一意的に表現することが出来る.

$$[f] = c_1[b_1] + c_2[b_2] + \cdots + c_m[b_m], \quad c_k \in \mathbf{C}.$$

この一次結合の係数は, 問題 F_P の解 $\psi_1(\zeta),\psi_2(\zeta),...,\psi_m(\zeta)$ を用いると次のように表せる.

$$c_k = Res_V(f(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta).$$

従って, コーシー問題の基本解の構成は, 多項式をイデアルによって剰余をとったときの剰余項の表現の構成と同一の問題と言うこともできる.

例　偏微分方程式系 $(D_xD_y - D_x)u(x,y) = (D_x^2 - D_y)u(x,y) = 0$ を考える. この方程式を項順序 $D_y \succ D_x$ で標準形に直すと,

$$(D_y - D_x^2)u = (D_x^3 - D_x)u = 0$$

となる. そこで, $F_1(D) = D_y - D_x^2$, $F_2(D) = D_x^3 - D_x$ と定め, 対応する多項式 $f_1(\xi,\eta) = \eta - \xi^2, f_2(\xi,\eta) = \xi^3 - \xi$ の生成するイデアルを I とおく. 零点集合 V は 3 点 $(0,0),(-1,1),(1,1)$

から成り, その重複度はいずれも 1 に等しい. 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\xi,\eta]/I$ の monomial 基底 $\{1,\xi,\xi^2\}$ をとる. 対応する Σ の基底は

$$[\frac{1}{\xi\eta}],\ \frac{1}{2}[\frac{1}{(\xi-1)(\eta-1)}]-\frac{1}{2}[\frac{1}{(\xi+1)(\eta-1)}],\ \frac{1}{2}[\frac{1}{(\xi-1)(\eta-1)}]+\frac{1}{2}[\frac{1}{(\xi+1)(\eta-1)}]-[\frac{1}{\xi\eta}]$$

となる.(この例の様に, complete intersection の場合は一般に, Hermite-Jacobi の多変数補間積分の積分核を計算することで双対基底を求めることが出来る (cf. [3],[35],[39])). これらの代数的局所コホモロジー類の Fourier-Borel 変換をとれば

$$u_0(x,y)=1, u_1(x,y)=\frac{1}{2}e^{x+y}-\frac{1}{2}e^{-x+y}, u_2(x,y)=\frac{1}{2}e^{x+y}+\frac{1}{2}e^{-x+y}-1$$

をえる. これらは, コーシー問題

$$\begin{cases} F_1(D)u_k(z)=F_2(D)u_k(z)=0, \\ D_x^j u_k(0)=\delta_{j,k}, \quad j,k=0,1,2, \end{cases}$$

の解となる. 逆に, ベクトル空間 Σ の基底として局所コホモロジー類

$$[\frac{1}{\xi\eta}],\ [\frac{1}{(\xi-1)(\eta-1)}],\ [\frac{1}{(\xi+1)(\eta-1)}]$$

をとると, 対応する指数多項式は

$$w_0(x,y)=1,\ w_1(x,y)=e^{x+y},\ w_2(x,y)=e^{-x+y}$$

となり, 剰余空間 $\mathbf{C}[\xi,\eta]/I$ での双対基底は $\{-\xi^2+1, \frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi\}$ で与えられる. そこでいま, 偏微分作用素 B_0, B_1, B_2 を

$$B_0(D)=-D_x^2+1,\ B_1(D)=\frac{1}{2}D_x^2+\frac{1}{2}D_x,\ B_2(D)=\frac{1}{2}D_x^2-\frac{1}{2}D_x$$

でさだめれば, 関数 w_0, w_1, w_2 は, 初期条件として $B_j(D)w_k(0,0)=\delta_{j,k}$ を満たすことになる.

多項式 $b_0(\xi,\eta)=-\xi^2+1, b_1(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi, b_2(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi$ は, 3 点 $(0,0),(-1,1),(1,1)$ にデータを与える Lagrange 型補間問題の解の基本系となっていることに注意されたい.

以上で, ホロノミックな定数係数線形偏微分方程式系の指数多項式解とコーシー問題を扱うための基本的枠組みが構成できた. 代数的局所コホモロジー群の概念を用いると, これらの問題を扱う際に必要となるさまざまな計算が実際に可能となる. 以下の節ではこのような計算を行う際に生じる数学的問題を扱う.

4. 常微分方程式と代数的局所コホモロジー

この節では, いままで展開した議論に基づいて, 常微分方程式のコーシー問題を考察する. Hermite 補間積分を用いたコーシー問題の基本解の構成法を復習することからはじめる. 次

に，この古典的な公式を代数的局所コホモロジー群の概念を用いて捉え直し，幾つかの簡単な応用を与える．最後に，代数的局所コホモロジー群の概念を用いることでコーシー問題の基本解を与えるアルゴリズムの構成が容易となる事を示す．

まず，留数の概念に基づいた定数係数の常微分方程式の古典的解法を紹介する．ここで紹介する解法は A. L. Cauchy 自身によるものとのことである（*Application du calcul des résidus a l' intégration des équations differentielles linéaires et a coefficients constants*, Exercies de mathématiques, Paris (1826)）．

複素平面 $X = \mathbf{C}$ 上，関数 $u(z)$ を未知関数とする m 階の定数係数線形常微分方程式 $P(D)u(z) = 0$ が与えられたとする．この方程式に対し，微分作用素 $P(D)$ の total symbol をとり $p(\zeta)$ で表す．ここで変数 ζ は複素平面 Z を動くものとする．さてここで，次の積分で定義される関数 $u(z)$ を考える．

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(\zeta)}{p(\zeta)} e^{\zeta\cdot z} d\zeta.$$

ただし，$h(\zeta)$ は正則な関数とする．このとき，

$$P(D)u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(\zeta)p(\zeta)}{p(\zeta)} e^{\zeta\cdot z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint h(\zeta) e^{\zeta\cdot z} d\zeta = 0$$

となるので，関数 $u(z)$ が微分方程式 $P(D)u(z) = 0$ の解であることは明かである．正則関数 $h(\zeta)$ として，高々 $m-1$ 次の多項式すべてを考えれば，対応する関数 $u(z)$ らは明らかに m 次元のベクトル空間をなす．従って，常微分方程式 $P(D)u(z) = 0$ の全ての解を，留数を用いて簡潔に表現することが出来たことになる．Cauchy によるこの解法は，微分方程式の特性多項式が重複した零点を持っている場合にも例外なく適用できることに注意されたい．

次に，Hermite の 1879 年の論文 [12] に従って，コーシー問題について考える．関数

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(\zeta)}{p(\zeta)} e^{\zeta\cdot z} d\zeta$$

を変数 z に関し j 階微分すると

$$D_z^j u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\zeta^j h(\zeta)}{p(\zeta)} e^{\zeta\cdot z} d\zeta$$

となることから

$$D_z^j u(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\zeta^j h(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta$$

を得る．従って，条件

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\zeta^j h_k(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta = \delta_{j,k}, \quad 0 \le j, k \le m-1$$

をみたす $h_k(\zeta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, をもちいて

$$u_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h_k(\zeta)}{p(\zeta)} e^{\zeta\cdot z} d\zeta$$

とおけば, 関数 $u(z)=\sum_k c_k u_k$ は, 次のコーシー問題

$$\begin{cases} P(D)u(z)=0, \\ D_z^j u(0)=c_j, \quad j=0,1,...,m-1. \end{cases}$$

の解となる. さて, 上記の条件を満たすような関数 $h_k,\ k=0,1,...,m-1$, を求めることも, 補間問題に関する論文 [11] において Hermite により為されている. 結論のみを述べるとつぎのようになる.

特性多項式 $p(\zeta)$ に対し$\dfrac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta}$ をとり, これを変数 ζ に関して展開したときの ζ^k の係数を $h_k(\eta)$ とおく.

$$\frac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta}=\sum_{k=0}^{m-1} h_k\zeta^k.$$

この時, これらの多項式は

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\zeta^j h_k(\zeta)}{p(\zeta)}d\zeta=\delta_{j,k}, \quad 0\le j,k\le m-1$$

を満たす. 以上が, Cauchy と Hermite による定数係数線形常微分方程式の古典的解法の概要である.

本稿の結果は, 留数理論に基づいたこの解法を多変数の場合に一般化する試みから生まれたものである ([36], [38]). 代数的局所コホモロジー群の概念を用いることが理論を構築する上で最も本質的であったことをあらためて強調しておきたい. ここでは, 多変数の場合に述べた一般的結果と重複することになるが後の議論の準備も兼ねて, 一変数の場合の Cauchy と Hermite の結果を代数的局所コホモロジー群の概念を用いて定式化しておく ([37]).

まず, 常微分方程式 $P(D)u(z)=0$ に対し, 微分作用素 P の特性多項式 $p(\zeta)$ の生成するイデアルを I とおく. 多項式 p の零点集合を $V=\{\zeta\in Z\mid p(\zeta)=0\}$ とおき, V に台をもつ代数的局所コホモロジー群を $\mathcal{H}^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ とする. 高々 V のみに極を持つような有理型関数のなす層を $\mathcal{O}_Z\langle *V\rangle$ とおくと, 層の列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_Z\longrightarrow\mathcal{O}_Z\langle *V\rangle\longrightarrow\mathcal{H}^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)\longrightarrow 0$$

は完全となるので, 代数的局所コホモロジー群のなす層 $\mathcal{H}^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ は有理型関数の主要部（極における特異性）を記述する層とみなす事が出来る. この層 $\mathcal{H}^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ の大域的切断のなすベクトル空間を $H^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ で表す.

いま, 留数が被積分関数の極における主要部のみによることに注意すれば, Fourier-Borel 変換 FB を次のように自然に定義することができる.

定義　代数的局所コホモロジー類 $\psi\in H^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ に対し, その Fourier-Borel 変換 $FB(\psi)$ を

$$FB(\psi)(z)=Res_V(\psi(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)_\zeta=\sum_{A\in V}Res_A(\psi(\zeta)e^{\langle\zeta,z\rangle}d\zeta)_\zeta$$

で定める. ただし, $Res_A(**)$ は点 $A\in V$ における留数を変数 ζ について取ったものである.

微分方程式に対応し, ベクトル空間 Σ を次で定める.

$$\Sigma = \{\psi \in H^1_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \mid p\psi = 0\}$$

微分方程式 $P(D)u(z)=0$ の解空間が, ベクトル空間 Σ の Fourier-Borel 変換による像として記述できることは明かである. また, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/I$ とベクトル空間 Σ は, 留数をとることにより互いの双対空間とみなすことができることもよく知られている.

さてここで, 次の式で定義される積分変換

$$K : h(\eta) \longrightarrow (Kh)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta}[\frac{1}{p(\eta)}]h(\eta)d\eta$$

を考える. ただし, 記号 $[\frac{1}{p(\eta)}]$ は有理関数 $\frac{1}{p(\eta)}$ の特異性の定める代数的局所コホモロジー類を表す. この積分変換 K は Hermite の補間積分から自然に導かれたものであり, ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/I$ からそれ自身への恒等写像となる ([35],[37]).

積分変換 K の再生核を

$$\kappa(\zeta,\eta) = \frac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta}[\frac{1}{p(\eta)}]$$

とおく. さて, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/I$ をベクトル空間 $span\{1,\zeta,\zeta^2,...,\zeta^{m-1}\}$ と同一視する (p は m 次の多項式). 展開式

$$\frac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta} = \sum_{k=0}^{m-1} h_k(\eta)\zeta^k.$$

を再生核の式に代入することにより, 基底 $\{1,\zeta,\zeta^2,...,\zeta^{m-1}\}$ のベクトル空間 Σ における双対基底を求めることが出来る. 実際, 双対基底は Hermite 補間に使われた多項式 $h_k(\zeta)$ を用いて

$$\psi_k(\zeta) = [\frac{h_k(\zeta)}{p(\zeta)}], \quad k=0,1,...,m-1$$

と表現できる. これらの代数的局所コホモロジー類の Fourier-Borel 変換をとれば, コーシー問題の基本解となる.

例　微分方程式 $D(D-3)^2u(z)=0$ を考える. ユークリッドの互除法より得た式,

$$\frac{1}{9}(\eta-3)^2 - \frac{1}{9}(\eta-6)\eta = 1$$

を用いて

$$\begin{aligned}[\frac{1}{(\eta(\eta-3)^2}] &= (\frac{1}{9}(\eta-3)^2 - \frac{1}{9}(\eta-6)\eta)[\frac{1}{(\eta(\eta-3)^2}] \\ &= \frac{1}{9}[\frac{1}{\eta}] - \frac{1}{9}[\frac{1}{\eta-3}] + \frac{1}{3}[\frac{1}{(\eta-3)^2}]\end{aligned}$$

を得る. 等式

$$\frac{(\eta^3-6\eta^2+9\eta)-(\zeta^3-6\zeta^2+9\zeta)}{\eta-\zeta} = (\eta^2-6\eta+9)+(\eta-6)\zeta+\zeta^2$$

より $h_0(\eta)=\eta^2-6\eta+9,\ h_1(\eta)=\eta-6,\ h_2(\eta)=1$ を得る. 積分核 κ は

$$\kappa=[\frac{1}{\eta}]+(-\frac{2}{3}[\frac{1}{\eta}]+\frac{2}{3}[\frac{1}{\eta-3}]-[\frac{1}{(\eta-3)^2}])\zeta+(\frac{1}{9}[\frac{1}{\eta}]-\frac{1}{9}[\frac{1}{\eta-3}]+\frac{1}{3}[\frac{1}{(\eta-3)^2}])\zeta^2$$

となる. 従って, ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/\langle p(\zeta)\rangle$ の基底 $\{1,\zeta,\zeta^2\}$ の双対基底 $\{\psi_0,\psi_1,\psi_2\}$ は,

$$\psi_0=[\frac{1}{\eta}],\psi_1=-\frac{2}{3}[\frac{1}{\eta}]+\frac{2}{3}[\frac{1}{\eta-3}]-[\frac{1}{(\eta-3)^2}],\psi_2=\frac{1}{9}[\frac{1}{\eta}]-\frac{1}{9}[\frac{1}{\eta-3}]+\frac{1}{3}[\frac{1}{(\eta-3)^2}]$$

で与えられる. これらの代数的局所コホモロジー類に Fourier-Borel 変換を施すことでコーシー問題の基本解が構成できる.

$$u_0(z)=1,u_1(z)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}e^{3z}-ze^{3z},u_2(z)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}e^{3z}+\frac{1}{3}ze^{3z}$$

さて, 定理 7 を常微分方程式の場合に適用すると, 与えられた指数多項式 $v(z)$ に対し常微分方程式 $P(D)u(z)=v(z)$ を満たす指数多項式解 $u(z)$ が存在することになる. Fourier-Borel 変換を用いた実際の解法を以下に述べておく.

例　微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dz^2}+2\dfrac{du}{dz}-3u=z$ を考える.

未知関数 $u(z)$ に対し, 原点のみに台を持ち $u=FB(\psi)$ をみたす代数的局所コホモロジー類 $\psi(\zeta)$ をとる. この $\psi(\zeta)$ は

$$(\zeta^2+2\zeta-3)\psi(\zeta)=[\frac{1}{\zeta^2}]$$

を満たす. ここで, ユークリッドの互除法より得た恒等式

$$(-\frac{2}{9}\zeta-\frac{1}{3})(\zeta^2+2\zeta-3)+(\frac{2}{9}\zeta+\frac{7}{9})\zeta^2=1$$

を使えば,

$$\psi(\zeta)=(-\frac{2}{9}\zeta-\frac{1}{3})[\frac{1}{\zeta^2}]=-\frac{2}{9}[\frac{1}{\zeta}]-\frac{1}{3}[\frac{1}{\zeta^2}]$$

を得る. ここで Fourier-Borel 変換を作用させれば特殊解

$$u(z)=FB(\psi)(z)=-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}z$$

を得ることが出来る.

非同次の方程式を解く上で, 初期条件も満たす特殊解を構成することが要求されることも多い. Fourier-Borel 変換を用いると, コーシーデータをすべて零とするような特殊解を簡単に求めることが出来る. 例えば今の例で, 代数的局所コホモロジー類 ψ を

$$\psi(\zeta)=[\frac{1}{(\zeta^2+2\zeta-3)\zeta^2}]$$

で定義し, その Fourier-Borel 変換による像を $u(z)$ とおく. 指数多項式 u の表示式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\zeta z}[\frac{1}{(\zeta^2+2\zeta-3)\zeta^2}]d\zeta$$

より, $Pu=z$ が直ちに従う. また留数の総和を考えれば, $u(0)=0, \frac{du}{dz}(0)=0$ が従うことも明かである. 代数的局所コホモロジー類 ψ を計算すると

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{4}[\frac{1}{\zeta-1}]-\frac{1}{36}[\frac{1}{\zeta+3}]+(-\frac{2}{9}\zeta-\frac{1}{3})[\frac{1}{\zeta^2}]$$

となるので, これを用いることで u の具体的な表示

$$u(z)=\frac{1}{4}e^{z}-\frac{1}{36}e^{-3z}+(-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}z)$$

を得ることが出来る.

これまでの議論から明かなように, Hermite の公式を用いればコーシー問題の基本解の構成は, 有理関数の極における主要部の計算問題に帰着される. 有理関数をその極において展開することは単なる計算の問題であると言う事は簡単であるが, 極の位数が高い場合に素朴な方法で実際に手計算をおこなうとかなりの計算量となる. 数式処理を利用して有理数を係数に持つ有理関数を扱うことを想定すると, 代数拡大を行わないでその主要部を求めるような計算アルゴリズムを構成することが望まれる ([5],[6]).

最近, 有理関数の極における主要部を比較的簡単に求める方法を幾つか思いついたのでその要点を以下に述べる. 簡単の為, 有理関数は $\frac{g(\zeta)}{f(\zeta)^{m+1}}$ なる形をしており, 分母に現れる多項式 $f(\zeta)$ は重複した零点を持たない d 次の多項式とする (既約でなくてもよいが, 既約としておく). 多項式 f の零点からなる集合を V であらわす. また f' により f の導関数を表すことにする.

準備　先ず, 1 位の極のみ持つ場合を考える.

代数的局所コホモロジー類 $[\frac{f'}{f}]$ を考えると, 任意の正則関数 $\varphi(\zeta)$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\oint[\frac{f'}{f}]\varphi(\zeta)d\zeta=\sum_{\alpha\in V}\varphi(\alpha)$$

が成り立つ. 点 $\alpha\in V$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{\zeta-\alpha}]$ を δ_α で表すことにすると, この関係は $[\frac{f'}{f}]=\sum_{\alpha\in V}\delta_\alpha$ と表現できる. この等式に多項式 $c(\zeta)$ を掛ければ

$$[c(\zeta)\frac{f'}{f}]=\sum_{\alpha\in V}c(\alpha)\delta_\alpha$$

を得る．いま，多項式 $a(\zeta), b(\zeta)$ は $a(\zeta)f(\zeta)+b(\zeta)f'(\zeta)=1$ を満たすものとする．この時，

$$[\frac{1}{f}]=[\frac{af+bf'}{f}]=[b\frac{f'}{f}]$$

となることから $[\frac{g}{f}]=[b(\zeta)g(\zeta)\frac{f'}{f}]$ を得る．従って，有理関数 $\frac{g}{f}$ が与えられたとき，多項式 g に多項式 b を掛けた後，多項式 f で割ったその余りを c とおけば，有理関数 $\frac{g}{f}$ の極における展開

$$[\frac{g}{f}]=\sum_{\alpha\in V}c(\alpha)\delta_\alpha$$

を得る．此処までの議論は標準的なもので，常套手段の一つであろう．

準備　次に，高次の極をもつ場合を考える．

恒等式 $[c(\zeta)\frac{f'}{f}]=\sum_{\alpha\in V}c(\alpha)\delta_\alpha$ を k 回微分すれば

$$(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k[c(\zeta)\frac{f'}{f}]=\sum_{\alpha\in V}c(\alpha)(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k\delta_\alpha$$

を得る．従って，与えられた有理関数に対し

$$[\frac{g(\zeta)}{f(\zeta)^{m+1}}]=\sum_{k=1}^{m}(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k[c_k(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}]$$

を満たす多項式 $c_k(\zeta)$ を求めれば極における主要部が表現できたことになる．ここで，微分作用素 T を

$$T=\sum_{k=1}^{m}(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k c_k(\zeta)$$

で定めると，この問題は，

$$[\frac{g(\zeta)}{f(\zeta)^{m+1}}]=T[\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}]$$

を満たすような微分作用素 T を求める事と同じであることに注意しておこう．

方法 1

先ず，$d-1$ 次以下の多項式 $r_K(\zeta),\ k=1,2,...,m$ であり，

$$[\frac{g(\zeta)}{f(\zeta)^{m+1}}]=\sum_{k=1}^{m}(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k[\frac{r_k\prime(\zeta)}{f(\zeta)}]$$

を満たすものを求める．次に $b(\zeta)r_k(\zeta)$ を $f(\zeta)$ で割った余りを $c_k(\zeta)$ とおけば，

$$[\frac{g(\zeta)}{f(\zeta)^m}]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha\in V}c_k(\alpha)(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k\delta_\alpha$$

を得る．このことを用いればアルゴリズムの構成は容易である．計算の見通しをもう少し良くすることを考えてみる．そのための準備としてまず，いくつかの記号を用意する．変数 ζ に関して微分する微分作用素を D とおく．また，関数 $f(\zeta)$ 倍するという零階の微分作用素を F で表し，$f(\zeta)$ の導関数 $f'(\zeta)$ を掛けるという零階の微分作用素を F' で表すことにする．自然数 k に対し，f^k が多項式環 $\mathbf{C}[\zeta]$ において生成するイデアルを $\langle f^k \rangle$ とおき，剰余空間 $\mathbf{C}[\zeta]/\langle f^k \rangle$ をとる．次が成り立つ．

補題 10　各自然数 k に対し，微分作用素 $-FD+kF'$ を考える．この微分作用素は次の関係を満たす．

$$(-FD+kF')F^k = -F^{k+1}D$$

この補題より，微分作用素 $-FD+kF'$ はベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/\langle f^k \rangle$ からベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/\langle f^{k+1} \rangle$ への線形写像を定めることが判る．さて，これらの微分作用素を用いて微分作用素 R_ℓ を次で定める．

$$R_\ell = (-FD+\ell F')(-FD+(\ell-1)F')\cdots(-FD+2F')(-FD+F')$$

次が成り立つ．

$$(-D)^\ell[\frac{r(\zeta)}{f(\zeta)}] = [\frac{R_\ell r(\zeta)}{f(\zeta)^{\ell+1}}]$$

これを利用すると計算が少し楽になる．

方法 2

微分作用素 P を $P = FD+(m+1)F'$ で定めると，有理関数 $\frac{1}{f^{m+1}}$ は微分方程式 $P\frac{1}{f^{m+1}}$ を満たす．この事を用いれば，代数的局所コホモロジー類 $[\frac{g}{f^{m+1}}]$ の満たす一階の微分方程式で多項式係数のものが構成できる ([23])．いま，零階の微分作用素 F が，微分作用素環 $\mathbf{C}[\zeta, D]$ において生成する左イデアルを $\langle F \rangle$ で表すことにする．微分作用素 T で

$$T = \sum_{k=1}^{m}(-\frac{\partial}{\partial\zeta})^k c_k(\zeta)$$

条件 $PT \in \langle F \rangle$ を満たすものを求めれば，求める主要部の表現を得る．

方法 3

恒等式 $a(\zeta)f(\zeta)+b(\zeta)f'(\zeta)=1$ に注目して

$$k[\frac{1}{f^{k+1}}] = k[\frac{af+bf'}{f^{k+1}}] = ka(\zeta)[\frac{1}{f^k}] + b(\zeta)(-D)[\frac{1}{f^k}]$$

を得る．いま $a(\zeta)$ を掛けるという零階の微分作用素を A とおき，$b(\zeta)$ を掛けるという零階の微分作用素を B とおけば，上記の関係は

$$(B(-D)+kA)[\frac{1}{f^k}] = k[\frac{1}{f^{k+1}}]$$

と表せる．これを用いれば，例えば

$$\ell![\frac{1}{f^{\ell+1}}]=(B(-D)+\ell A)(B(-D)+(\ell-1)A)\cdots(B(-D)+A)[\frac{1}{f}]$$

を得る．右辺に現れた微分作用素を変形していけば，有理関数 $\frac{1}{f^{\ell+1}}$ の極における主要部がもとまることになる．

この方法は位数が低いときは公式として直接利用することもできるが，位数が高い場合は公式として直接用いるのでなく，漸化式を導いてその漸化式を利用して計算するのが効率的と思える．

例 $f(\xi)=\xi^5-3\xi^4+7\xi^3+2\xi+1$ とおく．

$$[\frac{1}{(\xi^5-3\xi^4+7\xi^3+2\xi+1)^3}]=(c_0(\xi)+(-D)c_1(\xi)+(-D)^2c_2(\xi))[\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}]$$

ただしここで，

$c_0=528456405979\xi^4/14091951513600-905455247989\xi^3/7045975756800$
$+4319726852131\xi^2/14091951513600-1399932908713\xi/1409195151300$
$+682124803177/14091951513600$,

$c_1=95162993\xi^4/7451328000-567345814\xi^3/14902656000+17714509\xi^2/198702080$
$-842063\xi/496755200+519228097/14902656000$,

$c_2=581021\xi^4/1788318720-5182411\xi^3/4470796800+28154497\xi^2/8941593600$
$-20381467\xi/8941593600+25851619/8941593600$

5. Noether 作用素

指数多項式解を記述するには，L. Ehrenpreis の導入した Noether 作用素を具体的に求めることが重要である．この節では，代数的局所コホモロジーの言葉を用いることにより，Noether 作用素の概念を捉えなおせることを述べる．

まず，問題を局所的に扱うことからはじめる．第 3 節までと同じ記号を用い，イデアル I の零点集合を V とおく．集合 V は相異なる ℓ 個の点から成るとする．$V=\{A_1,A_2,...,A_\ell\}$．点 A_i の重複度を μ_i であらわす．代数的局所コホモロジー群の直和分解

$$\mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)=\mathcal{H}^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_Z)\oplus\mathcal{H}^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_Z)\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_Z)$$

に対応して$\Sigma_{A_i}=\mathcal{H}^n_{[A_i]}(\mathcal{O}_Z)\cap\Sigma$ を取る．次が成り立つ．

補題 11

(i) $\Sigma=\Sigma_1\oplus\Sigma_2\oplus\cdots\oplus\Sigma_\ell$,
(ii) $\dim\Sigma_{A_i}=\mu_i$.

従って，V の各点 A_i における Σ_{A_i} が決定できれば Σ も決定されることになる．

簡単な例で, 実際に計算をしてみることにする.

例　偏微分作用素 P_1, P_2 を $P_1(D) = D_x^3$, $P_2(D) = D_y^2 + 2D_x^2 + 3D_x$ で定め, 次の偏微分方程式系 $P_1u(x,y) = P_2u(x,y) = 0$ を考える. この方程式系に対し, 多項式 $p_1(\xi,\eta) = \xi^3, p_2(\xi,\eta) = \eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi \in \mathbf{C}[\xi,\eta]$ の生成するイデアルを $I = \langle p_1, p_2\rangle$ とおく. 生成元 $\{p_1, p_2\}$ 自体, イデアル I の Gröbner 基底である. イデアル I による剰余ベクトル空間は, $b_1 = 1, b_2 = \xi, b_3 = \xi^2, b_4 = \eta, b_5 = \xi\eta, b_6 = \xi^2\eta$ とおくと, $\mathrm{Span}\{b_1, b_2, ..., b_6\}$ と同一視できる. ベクトル空間

$$\Sigma = \{\psi \in H^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_Z) \mid p_1(\xi,\eta)\psi = p_2(\xi,\eta)\psi = 0\}$$

は $\mathcal{O}_Z$ 上, 局所コホモロジー類

$$\sigma = [\frac{1}{\xi^3(\eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi)}] \in H^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_Z)$$

で生成され$\Sigma = \mathrm{Span}\{\sigma, \xi\sigma, \xi^2\sigma, \eta\sigma, \xi\eta\sigma, \xi^2\eta\sigma\}$ が成り立つ. ベクトル空間 Σ の各要素をより具体的に表現するには, 代数的局所コホモロジー類 σ を解析し, ローラン展開を求めれば十分である.

今の場合, よく知られた変換則を用いて σ のローラン展開を求めることが出来るが, ここでは代数解析の手法を用いて代数的局所コホモロジー類 σ のローラン展開を求めてみる. その為に先ず, 代数的局所コホモロジー類 σ の 偏微分作用素環 $\mathcal{D}_Z$ における annihilating ideal $Ann \subset \mathcal{D}_Z$ を計算する ([32], [33]). このイデアル Ann は $Q_1 = \xi^3, Q_2 = \eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi$ と次の一階の偏微分作用素で生成されることが判る.

$$F = 6\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + (2\xi\eta + 3\eta)\frac{\partial}{\partial\eta} + 4\xi + 24.$$

条件 $det(\frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(\xi,\eta)})\sigma = 6[\frac{1}{\xi\eta}]$ に注意して偏微分方程式系 $Q_1\sigma = Q_2\sigma = F\sigma = 0$ を解けば

$$\sigma = [\frac{\eta^4 - 2\xi^2\eta^2 - 3\xi\eta^2 + 9\xi^2}{\xi^3\eta^6}] = [\frac{9}{\xi\eta^6}] - [\frac{3}{\xi^2\eta^4}] - [\frac{2}{\xi\eta^4}] + [\frac{1}{\xi^3\eta^2}]$$

を得る. さて, 定数係数の偏微分作用素 T を

$$T = \frac{3}{40}(-D_\eta)^5 - \frac{1}{2}(-D_\xi)(-D_\eta)^3 - \frac{1}{3}(-D_\eta)^3 + \frac{1}{2}(-D_\xi)^2(-D_\eta)$$

で定めれば $T\delta_{(0,0)} = \sigma$ が成り立つ. 従って, 第 1 節の補題 3 を用いれば, この代数的局所コホモロジー類 σ の Fourier-Borel 変換像は

$$\frac{3}{40}y^5 - \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y$$

となることが分かる. また, この多項式は次の方程式を満たす.

$$P_1(D)u = P_2(D)u = (-6D_xx - 3D_yy + 24 - 2D_xD_yy + 4D_x)u = 0.$$

さて, Hermite-Jacobi 補間積分を利用して Grothendieck 双対性の双対基底を求めると $\psi_1 = \xi^2\eta\sigma, \psi_2 = \xi\eta\sigma, \psi_3 = \eta\sigma, \psi_4 = \xi^2\sigma, \psi_5 = \xi\sigma, \psi_6 = \sigma$ を得る.

これらの代数的局所コホモロジー類も, 偏微分作用素をコホモロジー類 $\delta_{(0,0)}$ に作用させた形で表現することが出来る. まず, $\sigma = T\delta_{(0,0)}$ に注目し, 偏微分作用素 $\xi^2\eta T, \xi\eta T, \eta T, \xi^2 T, \xi T, T$ をイデアル $\mathbf{C}[\xi,\eta,D_\xi,D_\eta]\langle\xi,\eta\rangle$ による法をとって計算すると, それぞれ

$$1, -\frac{3}{2}(-D_\eta)^2 + (-D_\xi), \frac{3}{8}(-D_\eta)^4 - \frac{3}{2}(-D_\xi)(-D_\eta)^2 - (-D_\eta)^2 + \frac{1}{2}(-D_\xi)^2, -D_\eta,$$

$$-(-D_\eta)^3 + (-D_\xi)(-D_\eta), \frac{3}{40}(-D_\eta)^5 - \frac{1}{2}(-D_\xi)(-D_\eta)^3 - \frac{1}{3}(-D_\eta)^3 + \frac{1}{2}(-D_\xi)^2(-D_\eta)$$

となる. これらの偏微分作用素を, $\delta_{(0,0)}$ に作用させたものは, 求める双対基底の表現に他ならない.

この表現式を用いれば, コホモロジー類 ψ_k の Fourier-Borel 変換 $u_k = FB(\psi_k)$ が直ちにもとまる.

多項式 $u_k(x,y), k = 1,2,...,6$ は偏微分方程式系

$$D_x^3 u(x,y) = (D_y^2 + 2D_x^2 + 3D_x)u(x,y) = 0$$

の解空間の基底となり, さらに B_j の定めるコーシー問題の初期条件 $B_j(D)u_k(0,0) = \delta_{j,k}$ も満たす.

この例の様に, 独立変数と偏微分方程式の個数が同じである定数係数極大過剰決定系は代数的取扱いが比較的容易である. 先ず, 与えられた偏微分作用素に対し, その total symbol のなす regular sequence $p_1(\zeta), p_2(\zeta), ..., p_n(\zeta)$ が定める代数的局所コホモロジー類 σ を考える.

$$\sigma = [\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}] \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z).$$

台 $V = \{A_1, A_2, ..., A_\ell\}$ に注目し, このコホモロジー類の台による分解 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\ell$ をとる. このとき Σ_{A_i} は $\mathcal{O}_Z$ 上 σ_i で生成されるが知られている. 従って, コホモロジー類 σ を解析することで, ベクトル空間 Σ が決定できることになる. この代数的コホモロジー類 σ の解析には, 次の定理を用いればよい.

定理 12([32]) コホモロジー類 σ の annihilating ideal を $Ann = \{R \in \mathcal{D}_Z \mid R\sigma = 0\}$ とおく. このとき各点 A_i において $\{\psi \in \mathcal{H}^n_{[A_i]}(\mathcal{O}_Z) \mid R\psi = 0, R \in Ann\} = \mathbf{C}\sigma_i$ が成立する.

偏微分方程式系が complete intersection とならず, 一般のホロノミック系である場合を扱うためには, Noether 作用素の概念を用いて, ベクトル空間 Σ を記述する必要がある. Noether 作用素の概念を導入する為に, 記号の復習をしておこう.

第 1 節と同じように, 点 $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in Z$ をとり, つぎの写像

$$i : Ext^n_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z/\langle\zeta_1 - \alpha_1, \zeta_2 - \alpha_2, ..., \zeta_n - \alpha_n\rangle, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$$

による $[\dfrac{1}{\zeta_1-\alpha_1,\ \zeta_2-\alpha_2,\ \cdots,\zeta_n-\alpha_n}]$ の像をδ_A で表すことにする．このとき，代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[A]}(\mathcal{O}_Z)$ の要素 ψ_A は定数係数の偏微分作用素 $T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})$ を用いて $\psi_A = T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})\delta_A$ と表現できることは既に述べた通りである．

次の結果は基本的である ([42]).

補題 13 点 $A \in V$ に台をもつ代数的局所コホモロジー類 $\psi_A = T(-\frac{\partial}{\partial\zeta})\delta_A$ が $\Sigma_A = \Sigma \cap H^n_{[V]}(\mathcal{O}_Z)$ に属する必要十分条件は

$$fT \in \mathcal{D}_Z\langle\zeta_1-\alpha_1,\zeta_2-\alpha_2,...,\zeta_n-\alpha_n\rangle,\quad \forall f \in I$$

である．

ここで $NT_A = \{T \mid fT \in \mathcal{D}_Z\langle\zeta_1-\alpha_1,\zeta_2-\alpha_2,...,\zeta_n-\alpha_n\rangle,\quad \forall f \in I\}$ と定める．ベクトル空間 NT_A の基底をネター作用素という．補題 13 を用いて Noether 作用素を求めれば，ベクトル空間 Σ を決定することが出来る．

次の例が示すように，Noether 作用素を求める際に代数的局所コホモロジー群の概念を用いることは，偏微分方程式系がホロノミックとは限らない一般の場合にも有効と思われる．

例 ([4], [9], [26], [47]) $X = \mathbf{C}^3$ 上で次の偏微分方程式系を考える．

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}u = \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}u = (\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_3})u = 0.$$

多項式 $\zeta_1^2,\zeta_2^2,\zeta_2-\zeta_1\zeta_3$ の生成するイデアルを I とおき，その零点集合を V とおく．

$$V = \{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \in Z \mid \zeta_1 = \zeta_2 = 0\}$$

であり，V は余次元 2 の多様体となる．多様体 V に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\delta = [\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}]$ をとる．偏微分作用素 T を $T = (-\dfrac{\partial}{\partial\zeta_1}) + \zeta_3(-\dfrac{\partial}{\partial\zeta_2})$ で定める．イデアル I の根基が $\sqrt{I} = \langle\zeta_1,\zeta_2\rangle$ となることを用いて計算すれば，次の偏微分作用素

$$\zeta_1^2T, \zeta_2^2T, (\zeta_2-\zeta_1\zeta_3)T$$

はいずれも，偏微分作用素環におけるイデアル $\mathcal{D}_Z\sqrt{I}$ に属することが分かる．従って代数的局所コホモロジー類

$$T\delta = [\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2}] + [\frac{\zeta_3}{\zeta_1\zeta_2^2}]$$

はベクトル空間

$$\Sigma = \{\psi \in H^2_{[V]}(\mathcal{O}_Z) \mid f\psi = 0,\quad \forall f \in I\}$$

に属する．このことは，偏微分作用素 T が非自明な Noether 作用素であることを意味する．

6. 準素イデアル分解

この節では, 有理数を係数に持つ偏微分作用素 $P_j \in \mathbf{Q}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}]$ からなる偏微分方程式系 $M : P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0$ を数式処理を用いて exact に取り扱うことを想定する. 偏微分方程式系の指数多項式解を求めたり, コーシー問題の基本解を構成するには, 有理点でない $A \in V$ におけるネター作用素を求める際に, 代数拡大を用いないで計算可能か否かが重要をなる. この点を考察するためにこの節で, 準素イデアル分解とネター作用素の関係を調べる.

まず, イデアル $I = \langle p_1(\zeta), p_2(\zeta), ..., p_s(\zeta)\rangle \subset \mathbf{Q}[\zeta_1, ..., \zeta_n]$ の準素イデアル分解

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\ell$$

をとり, 対応する零点集合を $V_i = V(I_i)$ とおく.

$$\Sigma_{I_i} = H^n_{[V_i]}(\mathcal{O}_Z) \cap \Sigma$$

とおくと明らかに次をみたす.

補題 14

(i) $\Sigma_{I_i} = \{\psi \in H^n_{[V_i]}(\mathcal{O}_Z) \mid f\psi = 0, \quad \forall f \in I_i\}$

(ii) $\Sigma = \Sigma_{I_1} \oplus \Sigma_{I_2} \oplus \cdots \oplus \Sigma_{I_\ell}$

イデアル I_i の根基 $\sqrt{I_i} = \langle p_{i,1}(\zeta), p_{i,2}(\zeta), ..., p_{i,n}(\zeta)\rangle$ に対し, fundamental cycle $[V_i]$ を

$$[V_i] = [\frac{\left|\frac{\partial(p_{i,1}, p_{i,2}, ..., p_{i,n})}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)}\right|}{p_{i,1}p_{i,2}\cdots p_{i,n}}] \in H^n_{[V_i]}(\mathcal{O}_Z)$$

で定める. この時, 明らかに $[V_i] = \sum_{A \in V_i} \delta_A$ が成り立つ.

いま, 代数的局所コホモロジー類 $\psi_i \in H^n_{[V_i]}(\mathcal{O}_Z)$ が偏微分作用素 T を用いて $\psi_i = T[V_i]$ と表されるとする.

命題 15([40], [42])　局所コホモロジー類 ψ_i が Σ_i に属する必要十分条件は

$$fT \in \mathcal{D}_Z\sqrt{I_i}, \quad \forall f \in I_i$$

で与えられる.

この結果を用いると, 代数拡大を行わないでネター作用素の計算をすることが可能となる ([40]). 従って, ベクトル空間 Σ_i を決定することが出来る. ベクトル空間 Σ_i は剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/I_i$ の双対ベクトル空間と同一視することが出来る. 従って, これらのベクトル空間の間に成り立つ双対性を求めておけば, 剰余空間に対する中国剰余定理

$$\mathbf{C}[\zeta]/I \cong \mathbf{C}[\zeta]/I_1 \times \mathbf{C}[\zeta]/I_2 \times \cdots \times \mathbf{C}[\zeta]/I_\ell$$

を用いて, ベクトル空間 $\mathbf{C}[\zeta]/I$ とベクトル空間 Σ の間の双対性を計算することが出来る ([42]).

例 ([35], [40])

$P_1(D)=D_x^4+2D_x^2D_y^2+D_y^4+3D_x^2D_y-D_y^3$, $P_2(D)=D_x^2+D_y^2-1$ とおき, 偏微分方程式 $P_1(D)u(x,y)=P_2(D)u(x,y)=0$ を考える. 偏微分作用素 P_1,P_2 の total symbol p_1,p_2 の生成するイデアルを I とおく. 辞書式項順序 $\eta\succ\xi$ によるイデアル I のグレブナ基底は

$$\{16\xi^6-24\xi^4+9\xi^2,\ 4\xi^4-5\xi^2-\eta+1\}$$

で与えられる. このイデアル I の準素イデアル分解は

$$I_1=\langle\eta-1,\xi^2\rangle,\ I_2=\langle-16\xi^4+24\xi^2-9,4\xi^2-4\eta-5\rangle$$

とおくと, $I=I_1\cap I_2$ で与えられる. イデアル I_1 と I_2 の根基は $\sqrt{I_1}=\langle\eta-1,\xi\rangle,\sqrt{I_2}=\langle2\eta+1,4\xi^2-3\rangle$ である. イデアル I の零点集合 V は 3 点 $(0,1),(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}),(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ からなり, 各点での重複度はいずれも 2 に等しい. $V(I_1)=\{(0,1)\},V(I_2)=\{(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}),(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\}$ である.

代数的局所コホモロジー類 $\delta_{V_1},\delta_{V_2}$ を次で定める.

$$\delta_{V_1}=[\frac{1}{\xi(\eta-1)}],\ \delta_{V_2}=[\frac{16\xi}{(4\xi^2-3)(2\eta+1)}]$$

この時, $\Sigma_{I_1}=\mathrm{Span}\{\delta_{V_1},(-D_\xi)\delta_{V_1}\}$ が成り立つ. 命題 15 を用いて計算すると $\Sigma_{I_2}=\mathrm{Span}\{\delta_{V_2},\ \xi\delta_{V_2},\ T\delta_{V_2},\ T(\xi\delta_{V_2})\}$ を得る事が出来る. ここで T はつぎの偏微分作用素である.

$$T=-D_\xi-2\xi D_\eta.$$

剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[\xi,\eta]/I$ の基底として $\{\xi^5,\xi^4,\xi^3,\xi^2,\xi,1\}$ を取る. この時, ベクトル空間 Σ における双対基底 (biorthonormal 基底) は次で与えられることが計算出来る.

$$\frac{16}{9}(-D_\xi)\delta_{V_1}+(-\frac{8}{9}T-\frac{32}{9}\xi)\delta_{V_2},\quad \frac{16}{9}\delta_{V_1}+(-\frac{8}{9}T\xi+\frac{16}{9}\xi)\delta_{V_2},$$
$$-\frac{8}{3}(-D_\xi)\delta_{V_1}+(\frac{2}{3}T-\frac{16}{9}\xi)\delta_{V_2},\quad -\frac{8}{3}\delta_{V_1}+(\frac{2}{3}T\xi-\frac{8}{3})\delta_{V_2},$$
$$(-D_\xi)\delta_{V_1},\ \delta_{V_1}$$

本研究は平成 11 年度住友財団基礎科学研究の助成を受けている.

参考文献

[1] A. Altman and S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck duality theory*, Lecture Notes in Math. **146** (1970), Springer-Verlag.

[2] A. Andreotti and F. Norguet, *Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$- cohomology*, Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa **25** (1971), 59–114.

[3] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse Math. **38** (1980), 188–254.

[4] J.-E. Björk, Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979.

[5] M. Bronstein, Symbolic Integration I, Algorithms and Computation in Mathematics **1**, Springer 1997.

[6] M. Bronstein and B. Salvy, *Full partial fraction decomposition of rational functions*, Proc. ISSAC'93, ACM Press (1993), 157–160.

[7] J. Delsarte, *Théories des fonctions moyenne-périodiques de deux variables*, Ann. Math. **72** (1960), 121–178.

[8] A. M. Dickenstein and C. Sessa, *Duality methods for the membership problem*, Progress in Math. **94** (1991) Effective Methods in Algebraic Geometry (eds by T. Mora and C. Traverso), 89–103.

[9] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience (1970).

[10] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience 1978.

[11] C. Hermite, *Formule d'interpolation de Lagrange*, J. de Crelle **84** (1878), 70–78.

[12] C. Hermite, *Équations différentielles linéaires*, Bull. Sci. Math. (2) **3** (1879), 311–325.

[13] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Grundlehren der Math. Springer (1964).

[14] A. Kaneko, *Fundamental Principle* について, 京都大学数理解析研究所講究録 **114** (1971), 82–104.

[15] M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563–579.

[16] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II.* Inventiones mathematicae **49** (1978), 121–135.

[17] C. O. Kieselman, *Existence and approximation theorems for solutions of complex analogues of boundary problems*, Arkiv för Mat. **6** (1965), 193–207.

[18] O. Liess, *The fundamental principle of Ehrenpreis-Palamodov*, Preprint Series in Math. **7**, Bucarest (1976).

[19] M. G. Marinari, H. M. Möller and T. Mora, *Gröbner bases of ideals given by dual bases*, Proc. ISSAC'91 (ed. S.M. Watt), ACM Press (1991), 55–63.

[20] A. Martineau, *Sur les fonctionelles analystiques et la transformation de Fourier-Borel*, J. Analyse Math. **11** (1963), 1-164.

[21] H.M. Möller and H.J. Stetter, *Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems*, Numer. Math. **70** (1995), 311–329.

[22] B. Mourrain, *Isolated points, duality and residues*, J. of Pure and Applied Algebra **117** & **118** (1997), 469–493.

[23] Y. Nakamura and S. Tajima: Residue calculus with differential operators, Kyushu J. of Mathematics **53** (1999), to appear.

[24] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir - a computer algebra system*, in Proc. International Symposium on Symbolic and Algebrais Computation 1992 (ed. P. S. Wang), ACM 1992, 387–396.

[25] 大阿久俊則, グレブナ基底と線形偏微分方程式系（計算代数解析入門）, 上智大学数学講究録 **38** 1994.

[26] V. P. Palamodov, Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Moskva, Nauka 1967.

[27] M. Passare, *Residue solutions to holomorphic Cauchy problems*, Seminar in Complex Analysis and Geometry 1987. Dept. Math. Univ. Calabria, EditEL. (1987), 99–105.

[28] M. Sato, *Theory of hyperfunctions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I. **8** (1959-60), 139–193.

[29] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math. **287** (1973), 263–529.

[30] G. Sorani, *Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. **39** (1965), 161–166.

[31] D. C. Struppa, The Fundamental Principle for Systems of Convolution Equations, Memoirs of the AMS **273**, 1983.

[32] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional residue calculus and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033**「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[33] 田島慎一, 中村弥生, 多変数有理関数の留数計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085**「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 71–81.

[34] 田島慎一, 中村弥生, *D*-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 **7**, No. 3 (1999), 2–10.

[35] 田島慎一, *Grothendieck duality* の計算と多変数 *Hermite* 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085**「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[36] 田島慎一, 定数係数線形偏微分方程式系のコーシー問題とグレブナ双対性, 数式処理 **7** No. 3 (1999), 17–18.

[37] 田島慎一, 多変数補間問題とホロノミック *D*-加群, 千葉大学数学セミナリーノート, **3**「代数解析の諸問題」(1999), 73–94.

[38] 田島慎一, *Ehrenpreis* の基本原理と *Grothendieck* 双対性, 北海道大学数学講究録掲載予定.

[39] 田島慎一, *Hermite-Jacobi* 多変数補間積分とホロノミック *D*-加群, 京都大学数理解析研究所講究録「代数解析と特殊関数」掲載予定

[40] 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と *L. Ehrenpreis* の *Noether* 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録「数式処理における理論と応用の研究」掲載予定.

[41] S. Tajima, *Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formulas*, Proc. 7th International Colloquium on Several Complex Variables (eds. by E. Taft and Z. Nashed) (2000), 483–490, Marcel Dekker, to appear.

[42] S. Tajima, *Algebraic analysis of multivariate Hermite interpolation formulas*, Proc. Second ISAAC, Kluwer, to appear.

[43] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www.math.s.kobe-u.ac.jp).

[44] F. Treves, Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Gordon and Breach (1966).

[45] A.K. Tsikh, Multidimensional Residues and their Applications, Translations of Math. Monographs **103**, AMS 1988.

[46] A. Yger, *Formules de division et prolongement meromorphe*, Lecture Notes in Math. **1295** (1987), 226–283.

[47] D. Zeilberger, *A new proof of Ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem*, American J. of Math. **100** (1977), 1317–1332.