

一変数留数計算アルゴリズムについて

新潟大学情報工学科 田島慎一

Niigata University Shinichi TAJIMA

1 序

有理数全体のなす体を K , 有理数係数多項式全体のなす環を $K[x]$ とおく. いま, 有理数係数の有理式

$$\frac{h(x)}{f_1(x)^{m_1} f_2(x)^{m_2} \dots f_\ell(x)^{m_\ell}}$$

が与えられたとする. 但し, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\ell(x) \in K[x]$ はいずれも既約な多項式であるとする. 既約因子 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\ell(x)$ の中から一つ, f_λ を取り, $Z_\lambda = \{x \in X \mid f_\lambda(x) = 0\}$ とおく. ここで, λ は $1, 2, \dots, \ell$ のいずれかであり, X は複素平面 \mathbb{C} を表す. この有理関数の点 $\beta \in Z_\lambda$ における留数値を

$$\text{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f_1(x)^{m_1} f_2(x)^{m_2} \dots f_\ell(x)^{m_\ell}} dx \right)$$

で表す.

さて, いま一般に, 点 β の近傍で正則な関数 $g(x)$ に対し点 $\beta \in Z_\lambda$ での留数値を対応させる線形写像,

$$g \longrightarrow \text{Res}_\beta \left(\frac{g(x)}{f_1(x)^{m_1} f_2(x)^{m_2} \dots f_\ell(x)^{m_\ell}} dx \right)$$

を考えると, この線形汎関数は, g に対し $m_\lambda - 1$ 階の線形微分作用素として作用することになる. 先程の留数値は, この線形汎関数の $g = h$ に対する値であると解釈できる.

論文 [7] では, 計算代数解析の観点から定数係数ホロノミック系を論じているが, その中で, 上に述べた様な微分作用素の解析を行い更にその具体的な計算方法をいくつか提案した. 論文 [1] では, 多変数の場合の

Noether 作用素に関する結果 ([6, 9]) 等を一変数の場合に適用し, [7] での提案に従い微分作用素を求めるアルゴリズムを与えた. これらの結果を用いると, 留数値をもとめる新たなアルゴリズムを構成することが出来る ([17]). このアルゴリズムは, 剰余体 $K[x]/(f)$ における単純な計算で留数値を求めるものであり, 計算効率が良い. アルゴリズムの導出に際しては, 超函数の概念, 微分作用素環あるいは, D 加群の理論等を用いている.

本稿では, この留数計算アルゴリズムの導出の仕方について解説する. 実際にアルゴリズム導出の基礎となった数学的諸結果等に焦点をあて説明するが, アルゴリズム構築の背景にある考え方にも触れたい. これにより, アルゴリズム導出の枠組みとして微分作用素環や D 加群の理論が自然であることを納得していただきたい, というささやかな野心を持って本稿を執筆した.

本稿では, 第2節から第5節まですべて, $\frac{h(x)}{f(x)^m}$ なる形の有理関数の留数に関してのみ議論する. まず, 第2節では, 古典的な函数論の留数公式に基づいて, 有理数係数の有理式に対する留数を扱い, 留数値が有理数係数の多項式を用いて表現できることを示す. 実際に留数値を求める際の計算上の問題点を明らかにする. 第3節では, 超函数論の観点から留数を考察する. 留数計算が, ある種の微分作用素を求める問題に帰着されることを示す. 第4節では, 微分方程式論を用いる. 微分方程式を利用することで留数計算アルゴリズムの骨格を導く. 第5節では, Noether 作用素について説明する. Noether 作用素のもつ性質に注目することで, 留数計算の効率化が図れることを述べ, 留数計算アルゴリズムを与える.

本稿での結果は, 分母が複数の因子からなるような有理関数の場合にも一般化することができる. その拡張の仕方は, 微分作用素が局所作用素であることに基づくもので, 論文 [1, 5, 6, 9, 13, 14] 等で展開した議論と基本的に同じである. しかし, アルゴリズムの設計の仕方は何通りか考えることができる ([17]). この問題に関しては, 機会があったら別の稿で扱うこととしたい.

2 古典的留数公式について

この節では, 既約多項式 $f(x) \in K[x]$ により $\frac{h(x)}{f(x)^m}$ と表される有理関数を例に取り, この有理関数の極 $\beta \in Z = \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) = 0\}$ における

留数値 $\text{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right)$ について考える. まず, 関数論の標準的な議論に従って, 留数値を具体的に表現する公式を導く. 次に, 得られた留数公式について考察を加え, 留数値を効率的に求めるような計算方法の必要性を明らかにする.

留数値を計算するために, まず $f(x)$ を,

$$f(x) = (x - \beta)\varphi(x) \quad (2.1)$$

と因数分解し,

$$\psi(x) = \frac{h(x)}{\varphi(x)^m}$$

とおく. ここで, $\varphi(x)$ は $\deg(f) - 1$ 次の多項式であるが, 有理数係数とはならず, 従って $K[x]$ に属さないことに注意しておこう. 関数 $h(x)$ は $K[x]$ に属す多項式であることを想定しているが, 以下の議論では, 点 β の近傍で正則であることのみを用いる. 関数 $\psi(x)$ は点 β において正則であり,

$$\text{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \text{Res}_\beta\left(\frac{\psi(x)}{(x - \beta)^m}dx\right)$$

となるが, $\psi(x)$ の点 β におけるテイラー展開

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(\beta) + \psi'(\beta)(x - \beta) + \frac{1}{2!}\psi''(\beta)(x - \beta)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1)}(\beta)(x - \beta)^{m-1} + \dots \end{aligned}$$

より

$$\text{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1)}(\beta)$$

を得る. ここで, $\psi(x) = \frac{h(x)}{\varphi(x)^m}$ であるから,

$$\psi^{(m-1)}(\beta) = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} m-1 C_k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{\varphi(x)^m} \right) \frac{d^{m-1-k}}{dx^{m-1-k}} h(x) \right\} \Big|_{x=\beta}$$

となり, 留数値は

$$\text{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{\varphi(\beta)^{2m-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (\Phi_{m,k}(\beta)) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(\beta) \right\} \quad (2.2)$$

と表現される。ただし、 $\Phi_{m,k}(\beta)$ は、

$$\Phi_{m,k}(x) = {}_{m-1}C_k \varphi(x)^{2m-1} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{\varphi(x)^m} \right)$$

で与えられる多項式 $\Phi_{m,k}(x)$ の変数 x に β を代入したものである。多項式 $\Phi_{m,k}(x)$ は、 ϕ の k 階までの導関数、 $\phi, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(k)}$ を独立変数に持つような微分多項式に、 $\phi = \varphi(x), \phi^{(1)} = \varphi^{(1)}(x), \dots, \phi^{(k)} = \varphi^{(k)}(x)$ を代入することで得られる。この微分多項式を $\Phi_{m,k}$ で表すことにする。 $\Phi_{m,k}$ は K 係数多項式である。

さて、 $\varphi(x)$ は $f(x) = (x - \beta)\varphi(x)$ で定義されていたので、

$$\varphi(\beta) = f'(\beta), \varphi'(\beta) = \frac{1}{2}f''(\beta), \dots, \varphi^{(k)}(\beta) = \frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(\beta), \dots \quad (2.3)$$

を満たすことに注目する。

いま、 $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k+1)}$ を独立変数にもつ多項式

$$C_{m,k} = C_{m,k}(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k+1)})$$

を次で定める。

$$C_{m,k} = \Phi_{m,k}\left(\phi, \frac{\phi^{(1)}}{2}, \frac{\phi^{(2)}}{3}, \dots, \frac{\phi^{(k)}}{k+1}\right)$$

但し、 $\Phi_{m,k} = \Phi_{m,k}(\phi, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(k)})$ は (2.2) に現れる微分多項式である。多項式 $C_{m,k}(x)$ を

$$C_{m,k}(x) = C_{m,k}(f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(k+1)}(x)) \quad (2.4)$$

で定める。

命題 2.1 関数 $h(x)$ は、点 $\beta \in Z$ の近傍で正則であるとする。このとき、次が成り立つ。

$$\text{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{f'(\beta)^{2m-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} C_{m,k}(\beta) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(\beta) \right\} \quad (2.5)$$

ここで、 $C_{m,k}(\beta)$ は (2.4) で与えた多項式 $C_{m,k}(x)$ の変数 x に β を代入したものである。

留数値が、微分係数 $f'(\beta), f''(\beta), \dots, f^{(k+1)}(\beta)$ の有理数係数多項式 $C_{m,k}(\beta)$ を用いて表現出来ることに留意されたい。

注意 式 (2.5) では、分母を共通にとり $f'(\beta)^{2m-1}$ でまとめたので、 $C_{m,k}$ は $f'(\beta)^{m-k-1}$ を因子に持つ。

微分多項式 $C_{m,k}$ は $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k+1)}$ の多項式として $m-1$ 次であり、 m を固定した時、 k が大きくなるにつれ項数が多くなり、それらの係数の桁数も大きくなる。また、 $C_{m,k}(x)$ は x の多項式として $m(\deg f - 1) - k$ 次となる。

例 1 $m = 3$ の場合に、留数公式を書き下すと

$$\operatorname{Res}_{\beta} \left(\frac{h(x)}{f(x)^3} dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f'(\beta)^5} \left\{ (f'(\beta))^2 \frac{d^2 h}{dx^2}(\beta) - 3f''(\beta)f'(\beta) \frac{dh}{dx}(\beta) + (3(f''(\beta))^2 - f'(\beta)f'''(\beta))h(\beta) \right\}$$

となる。

例 2 $m = 5$ の場合、留数公式は次で与えられる。

$$\operatorname{Res}_{\beta} \left(\frac{h(x)}{f(x)^5} dx \right) = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{f'(\beta)^9} \left\{ \sum_{k=0}^4 C_{5,k}(\beta) \frac{d^{4-k} h}{dx^{4-k}}(\beta) \right\}.$$

但し、

$$C_{5,0}(\beta) = f'(\beta)^4,$$

$$C_{5,1}(\beta) = -10f''(\beta)f'(\beta)^3,$$

$$C_{5,2}(\beta) = (-10f'''(\beta)f'(\beta) + 45f''(\beta)^2)f'(\beta)^2,$$

$$C_{5,3}(\beta) = (-5f''''(\beta)f'(\beta)^2 + 60f'''(\beta)f''(\beta)f'(\beta) - 105f''(\beta)^3)f'(\beta),$$

$$C_{5,4}(\beta) = -f''''''(\beta)f'(\beta)^3 + (15f''''(\beta)f''(\beta) + 10f'''(\beta)^3)f'(\beta)^2 - 105f'''(\beta)f''(\beta)^2f'(\beta) + 105f''(\beta)^4$$

である。

労を厭わなければ、原理的には極の位数 m が高い場合でも手計算で留数公式を求めることが出来るが、次の例が示すように、極の位数が高くなるにつれ留数公式自体が非常に複雑となる。

例 3 $m = 8$ の場合, 留数公式は次の様になる.

$$\operatorname{Res}_{\beta}\left(\frac{h(x)}{f(x)^8}dx\right) = \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{f'(\beta)^{15}} \left\{ \sum_{k=0}^7 C_{8,k}(\beta) \frac{d^{7-k}h}{dx^{7-k}}(\beta) \right\}.$$

ただし, 微分多項式 $C_{8,k}$ は具体的には次で与えられる.

$$\begin{aligned} C_{8,0} &= (f^{(1)})^7, \\ C_{8,1} &= -28f^{(2)}(f^{(1)})^6, \\ C_{8,2} &= (-56f^{(3)}f^{(1)} + 378(f^{(2)})^2)(f^{(1)})^5, \\ C_{8,3} &= (-70f^{(4)}(f^{(1)})^2 + 1260f^{(3)}f^{(2)}f^{(1)} - 3150(f^{(2)})^3)(f^{(1)})^4, \\ C_{8,4} &= (-56f^{(5)}(f^{(1)})^3 + (1260f^{(4)}f^{(2)} + 840(f^{(3)})^2)(f^{(1)})^2 \\ &\quad - 12600f^{(3)}(f^{(2)})^2f^{(1)} + 17325(f^{(2)})^4)(f^{(1)})^3, \\ C_{8,5} &= (-28f^{(6)}(f^{(1)})^4 + (756f^{(5)}f^{(2)} + 1260f^{(4)}f^{(3)})(f^{(1)})^3 \\ &\quad + (-9450f^{(4)}(f^{(2)})^2 - 12600(f^{(3)})^2f^{(2)})(f^{(1)})^2 \\ &\quad + 69300f^{(3)}(f^{(2)})^3f^{(1)} - 62370(f^{(2)})^5)(f^{(1)})^2, \\ C_{8,6} &= (-8f^{(7)}(f^{(1)})^5 + (252f^{(6)}f^{(2)} + 504f^{(5)}f^{(3)} + 315(f^{(4)})^2)(f^{(1)})^4 \\ &\quad + (-3780f^{(5)}(f^{(2)})^2 - 12600f^{(4)}f^{(3)}f^{(2)} - 2800(f^{(3)})^3)(f^{(1)})^3 \\ &\quad + (34650f^{(4)}(f^{(2)})^2 + 69300(f^{(3)})^2(f^{(2)})^2)(f^{(1)})^2 \\ &\quad - 207900f^{(3)}(f^{(2)})^4f^{(1)} + 135135(f^{(2)})^6)f^{(1)}, \\ C_{8,7} &= -f^{(8)}(f^{(1)})^6 + (36f^{(7)}f^{(2)} + 84f^{(6)}f^{(3)} + 126f^{(5)}f^{(4)})(f^{(1)})^5 \\ &\quad + (-630f^{(6)}(f^{(2)})^2 + (-2520f^{(5)}f^{(3)} - 1575(f^{(4)})^2)f^{(2)} \\ &\quad - 2100f^{(4)}(f^{(3)})^2)(f^{(1)})^4 \\ &\quad + (6930f^{(5)}(f^{(2)})^3 + 34650f^{(4)}f^{(3)}(f^{(2)})^2 + 15400(f^{(3)})^3f^{(2)})(f^{(1)})^3 \\ &\quad + (-51975f^{(4)}(f^{(2)})^4 - 138600(f^{(3)})^2(f^{(2)})^3)(f^{(1)})^2 \\ &\quad + 270270f^{(3)}(f^{(2)})^5f^{(1)} - 135135(f^{(2)})^7 \end{aligned}$$

数式処理での symbolic な計算を行うことで, 極の位数が高い場合の留数公式も求める事ができる. 第 5 節でも述べるが, 第 5 節の最後の与える留数計算アルゴリズムを利用すると上記のような留数公式を簡単に求めることができる.

さて, ここで, β が多項式 f の零点であることに注目する. 多項式 $f(x)$ と $f'(x)$ とは互いに素であるので,

$$a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$$

を満たす多項式 $b(x) \in K[x]$ が存在する. 拡張ユークリッドの互除法等により $b(x)$ を求め, 多項式 $b(x)^{2m-1}C_{m,k}(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $t_{m,k}(x)$ とおく.

次を得る

命題 2.2 点 $\beta \in Z$ は, 既約多項式 $f \in K[x]$ の零点であるとする. 正の整数 m が与えられたとする. この時, 次数が $\deg f - 1$ 以下であるような m 個の有理数係数多項式の組 $t_{m,0}(x), t_{m,1}(x), \dots, t_{m,m-1}(x)$ であり, 次を満たすものが存在する.

$$\operatorname{Res}_{\beta}\left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx\right) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (t_{m,k}(\beta)) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(\beta) \right\}. \quad (2.6)$$

但し, $h(x)$ は点 β の近傍で正則な関数を表す.

証明 $b(\beta)f'(\beta) = 1$ より, $b(\beta)^{2m-1} = \left(\frac{1}{f'(\beta)}\right)^{2m-1}$ を得る. 従って

$$\frac{1}{f'(\beta)^{2m-1}} C_{m,k}(\beta) = b(\beta)^{2m-1} C_{m,k}(\beta)$$

となるが, この値は $t_{m,k}(\beta)$ に等しい. \square .

注意 微分多項式 $C_{m,0}$ は, $f'(x)^{m-1}$ と等しいことから, $t_{m,0}(x)$ は,

$$f'(x)^m t_{m,0}(x) = 1 \pmod{f}$$

を満たすことが分かる. 従って, $b(x)^m$ を $f(x)$ で割った余りと一致する.

一般に, 留数公式に表れる微分多項式 $C_{m,k}$ はたいへん複雑である. それに対し, 留数值そのものは, $\deg f - 1$ 以下の多項式の組

$$t_{m,0}(x), t_{m,1}(x), \dots, t_{m,m-1}(x) \in K[x]$$

により表現できることになる. 分子にあたる正則関数 $h(x)$ が有理数係数多項式である場合は, 多項式 $f(x)$ で

$$\sum_{k=0}^{m-1} t_{m,k}(\beta) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(\beta)$$

を割った余り $r(x)$ を求めることで、次の式を得る

$$\operatorname{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx\right) = \frac{1}{(m-1)!} r(\beta).$$

以上が、古典的な枠組みでの留数公式の導出である。

この節で説明した方法で、留数值 $\operatorname{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx\right)$ を求めるとすると、基本的には以下のような手順になる。

- 微分多項式 $C_{m,k}$ を求める。
- $f(x)$ を代入し、 $C_{m,k}(x)$ を求める。
- $b(x)$ 等を求め、 $b(x)^{2m-1}C_{m,k}(x)$ の $f(x)$ による剰余 $t_{m,k}$ を計算。
- $r(x)$ を求める。

この様に、留数計算に微分多項式 $C_{m,k}$ を用いることにすると、微分多項式 $C_{m,k}$ 自体が複雑なため、 $C_{m,k}$ の計算のみならず、それ以降のすべてのステップで計算量が多くなってしまう。

微分多項式 $C_{m,k}$ を含む留数公式 (2.3) の利用を避け、直接、多項式の組 $t_{m,0}(x), t_{m,1}(x), \dots, t_{m,m-1}(x) \in K[x]$ を求め、留数計算を行うことを考えていく。

3 留数と超関数

この節では、超関数の概念を用いながら留数を扱い、留数值を求める問題を微分作用素の問題として定式化できることを示す。

いま、点 $\beta \in Z = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ の近傍で正則な関数 $g(x)$ をとり、留数

$$\operatorname{Res}_\beta\left(g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} dx\right)$$

を考えると $f(x) \in K[x]$ は既約と仮定してあるので、

$$\operatorname{Res}_\beta\left(g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} dx\right) = g(\beta)$$

を得る。さて、関数 $g(x)$ として、

$$\frac{1}{(m-1)!} b(x)^{2m-1} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} C_{m,k}(x) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(x) \right\}$$

をとれば (2.4) の右辺を留数積分として書きかえることで

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right) \\ &= \operatorname{Res}_\beta \left(\frac{1}{(m-1)!} b(x)^{2m-1} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} C_{m,k}(x) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(x) \right\} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right) \end{aligned}$$

を得る. 但し, $b(x)$ は, $a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$ を満たす多項式である. 部分積分することで,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right) \\ &= \operatorname{Res}_\beta \left(h(x) \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{m-1-k} \left(C_{m,k}(x) b(x)^{2m-1} \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \right\} dx \right) \end{aligned}$$

を得る. さてここで, 多項式 h に対し点 $\beta \in Z$ での留数値を対応させる留数写像,

$$h \longrightarrow \operatorname{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right)$$

即ち, 有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ が定める線形汎関数に注目する. 先ほど求めた関係は有理関数

$$\frac{1}{f(x)^m} \tag{3.1}$$

と有理関数

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{m-k-1} \left(C_{m,k}(x) b(x)^{2m-1} \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \right\} \tag{3.2}$$

は, 全く同じ線形汎関数を定めることを意味する.

また, 関数 $g(x)$ として

$$g(x) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(t_{m,k}(x) \frac{d^{m-1-k} h}{dx^{m-1-k}}(x) \right) \right\}$$

を選ぶと、先ほどと同様に

$$\operatorname{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \operatorname{Res}_\beta\left(\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (t_{m,k}(x) \frac{d^{m-1-k}h}{dx^{m-1-k}}(x)) \right\} \frac{f'(x)}{f(x)} dx\right)$$

より

$$\operatorname{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \operatorname{Res}_\beta\left(h(x) \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} dx\right)$$

となるので、有理関数

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} \quad (3.3)$$

も、 $\frac{1}{f(x)^m}$ と同じ線形汎関数をさだめることになる。

ここで、多項式 $t_{m,k}(x)$ は

$$t_{m,k}(x) = C_{m,k}(x)b(x)^{2m-1} \pmod{f(x)}$$

により定めたことを思い出そう。このことは、有理関数 (3.2), (3.3) は有理関数としては明らかに異なるが、これらの差は有理数係数の多項式となることを意味する。

いま、高々 $Z = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ に極を持つような二つの有理関数が与えられたとする。これら二つの有理関数の差が多項式となると仮定すると、二つの有理関数は同一の留数写像を引き起こすので、線形汎関数として明らかに一致する。逆に、二つの有理関数が引き起こす留数写像が線形汎関数として同じものであるならば、与えられた有理関数同志の差は多項式となることが示せる。

一般に、高々 m 位の極を持つような有理関数の間にこの様な同値関係を導入することは、ホモロジー代数で

$$\operatorname{Ext}_{K[x]}^1(K[x]/(f(x)^m), K[x])$$

を考えることに相当する。極の位数に関する制限を設けずに、同様な同値関係をいれることで、代数的局所コホモロジー群

$$H_{[Z]}^1(K[x]) = \varinjlim_{i \rightarrow \infty} \operatorname{Ext}_{K[x]}^1(K[x]/(f(x)^i), K[x])$$

が定義される. この代数的局所コホモロジーを考えることは, Z 上での極における主要部, 即ち特異性のみ注目し正則部分を零とみなすような同値関係をいれることと同義であり ([2]), このことは当に, コホモロジーの言葉を使って超関数を定義していくことに他ならない.

この節で今まで述べたことを, 代数的局所コホモロジーの言葉を使って纏めると, 有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ と, 有理関数 (3.2), (3.3) は何れも Z 上での極における主要部が同じであり, $H_{[Z]}^1(K[x])$ に属するコホモロジーと見なすと同一の要素を定める, ということができる. この事を正確に述べるため, 記号を導入しておこう.

有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ の, $H_{[Z]}^1(K[x])$ における同値類を $[\frac{1}{f(x)^m}]$ で表し, この同値類を有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ が定める超関数と呼ぶことにする. 同様に, 有理関数

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\}$$

の $H_{[Z]}^1(K[x])$ における同値類を

$$\left[\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} \right]$$

で表す.

補題 3.1 有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ と次の有理関数は同一の超関数を定める.

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\}.$$

即ち, $H_{[Z]}^1(K[x])$ において

$$\left[\frac{1}{f(x)^m} \right] = \left[\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} \right]$$

が成立する.

有理数係数多項式を係数に持つ微分作用素全体のなす環 $K[x, \frac{d}{dx}]$ を D_X とおく. 代数的局所コホモロジー群 $H_{[Z]}^1(K[x])$ は, D_X 加群の構造をもつことに注目する.

いま, 有理関数 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ が $H_{[Z]}^1(K[x])$ において定める同値類を $[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ で表す. このとき,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} t_{m,k}(x) \right\} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \end{aligned}$$

と変形できる. ただし, ここで $t_{m,k}(x)$ は零階の微分作用素を意味する. 従って, 微分作用素 T を

$$T = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} t_{m,k}(x) \right\} \quad (3.4)$$

で定めると, 補題 (3.1) で述べた結果

$$\left[\frac{1}{f(x)^m} \right] = \left[\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} \right]$$

より,

$$\left[\frac{1}{f(x)^m} \right] = T \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \quad (3.5)$$

を得る ([6, 9]).

これは, 超函数の概念と微分作用素の言葉で留数公式 (2.6)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{\beta} \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} \right) \\ &= \operatorname{Res}_{\beta} \left(h(x) \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (t_{m,k}(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \right\} dx \right) \end{aligned}$$

を言い換えたものに他ならない.

いま逆に, 微分作用素 S であり, (3.5) の関係

$$\left[\frac{1}{f(x)^m} \right] = S \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

をみたすものが与えられたとする. S の形式随伴作用素を S^* とおくと,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) &= \operatorname{Res}_\beta\left(h(x)\left[\frac{1}{f(x)^m}\right]dx\right) \\ &= \operatorname{Res}_\beta\left(h(x)S\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\right) \\ &= \operatorname{Res}_\beta\left((S^*h)(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx\right) \\ &= (S^*h)(\beta) \end{aligned}$$

を得る.

一般に (3.5) を満たす微分作用素を求めれば, 留数計算ができることになる. 従って, 留数計算の問題は, 有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ が定める超函数 $\left[\frac{1}{f(x)^m}\right]$ の線形汎関数としての作用の仕方を明示的に表す式 $\left[\frac{1}{f(x)^m}\right] = T\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ を求める問題に帰着されたことになる.

さて, 超函数 $\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ に多項式 $f(x)$ を掛けると, その定義関数が正則となり, $f(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ は超函数として零となる. その為, $\left[\frac{1}{f(x)^m}\right] = T\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ なる微分作用素 T の取り方には f を法とする分の自由度がある.

例えば, 微分作用素 S として

$$S = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-k-1} (C_{m,k}(x)b(x)^{2m-1}) \right\}$$

を取れば, S は, 明らかに (3.5) を満たす.

多項式 $t_{m,k}(x)$ の定義を思い出せば, T は S の $D_X f$ による剰余として定めたことになるので

$$T = S \pmod{D_X f}$$

が成り立つことも明らかである. 但し, $D_X f$ は, 零階の微分作用素 f が微分作用素環 D_X において生成する左イデアルを表す.

留数計算に用いる微分作用素に $D_X f$ 分の自由度が許されているので, 微分作用素環における同じ剰余類のなかからその代表元として計算に適した作用素を見つけ出すことで留数計算の効率をよくする可能性が広がったことになる. また, 微分作用素の計算を行う際に, 左イデアル $D_X f$ による剰余計算を自由に行って良いことが保証された.

4 微分方程式

第3節で、留数値を求める問題は $[\frac{1}{f(x)^m}] = T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ なる微分作用素 T を求める問題として捉えなおせることを示した。これより、

- そもそも、 T は一体何物なのか？その本質を明らかにせよ
- 微分作用素 T の特徴付けをあたえよ
- T の具体的な計算法を求めよ

という問いに答えることで、留数値を求めるアルゴリズムを構成していく。本来ならば、最初の疑問に答える事からはじめるべきであるが、この問題は次の節で扱うこととし、この節では、第2番目と第3番目の問題に対する答えを与えることで議論を進め、留数計算アルゴリズムの原型を導く。

今、 $\tau = [\frac{1}{f(x)^m}]$ とおき、超関数 τ が満たす微分方程式を考える。超関数 τ の微分作用素環 D_X における annihilator イデアルを、 $\text{Ann}_{D_X}(\tau)$ であらわす。

微分作用素 P を

$$P = f(x) \frac{d}{dx} + mf'(x)$$

で定めると、左 D_X イデアル $\text{Ann}_{D_X}(\tau)$ は、 D_X 上 P と f^m で生成され $\text{Ann}_{D_X}(\tau) = D_X P + D_X f^m$ となることが分かる。

実際、 τ は微分方程式

$$P\tau = f^m\tau = 0 \quad (4.1)$$

を満たすが、左 D_X 加群 $M = D_X / D_X P + D_X f^m$ を考えると、 M は Z に台をもつような D_X 加群であり、 Z の各点 β において単純なホロノミック系となる。このことから、

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau) = D_X P + D_X f^m$$

が従う。特に、 M が単純なホロノミック系であることから、微分方程式系 (4.1) により、超関数 τ の振る舞いは定数倍を除いて完全に統制されることになる。例えば、有理関数 $\frac{1}{f(x)^m}$ の極 $\beta \in Z$ でのローラン展開の主要部は、定数倍を除けば微分方程式 (4.1) を解くことで完全に求めることが出来る ([2, 4])。

次に、ホロノミック系 M の代数的局所コホモロジー解のなす空間

$$\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x])) = \{\sigma \in H_{[Z]}^1(K[x]) \mid P\sigma = f^m\sigma = 0\}$$

について考える.

補題 4.1 次が成り立つ.

$$\dim_K \text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x])) = \deg f$$

補足 解空間 $\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x]))$ に関し多少, 説明を加えておこう. いま, 超関数 σ は微分方程式 M を満たすとする. 条件 $f^m\sigma = 0$ は, σ の台が Z に含まれ更に Z の各点で, 高々 m 位の極しか持たないことを意味する. このことと σ が $H_{[Z]}^1(K[x])$ に属することから, σ は多項式 $g(x) \in K[x]$ により $\sigma = \left[\frac{g(x)}{f(x)^m} \right]$ と表されることが従う. 次に, 微分方程式 $P\sigma = 0$ に注目する. 超関数 σ がこの微分方程式をみたすことから, Z の各点 β における $\frac{g(x)}{f(x)^m}$ のローラン展開の主要部は, 定数倍を除けば $\frac{1}{f(x)^m}$ と一致することが従う. 解空間 $\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x]))$ の次元が $\deg f$ と等しくなる理由は, この定数倍の自由度が Z の相異なる点の個数分あることに依る.

次の結果は基本的である.

命題 4.1 超関数 $\sigma \in H_{[Z]}^1(K[x])$ は次の (i), (ii) を満たすとする.

(i) $P\sigma = f^m\sigma = 0.$

(ii) $f(x)^{m-1}f'(x)\sigma = \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right].$

この時, 超関数 σ は超関数 τ と一致する.

これで, 超関数 τ を完全に特徴付けることができた.

超関数 $\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]$ を δ_Z で表しその annihilator イデアルを $\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$ で表す.

補題 4.2 $\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$ は D_X 上零階の微分作用素 f で生成される. 即ち, $\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z) = D_X f$ が成り立つ.

準備が整ったので, $\tau = T\delta_Z$ 即ち,

$$\left[\frac{1}{f(x)^m}\right] = T\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

なる微分作用素 T について考える.

まず, $\tau = T\delta_Z$ が成り立つと仮定しよう. 超函数 τ は, 微分方程式 $P\tau = f^m\tau = 0$ を満たすことから,

$$PT\delta_Z = f^mT\delta_Z = 0$$

を得る. 上記の補題 (4.2) より, $PT \in D_X f, f^m T \in D_X f$ を得る. そこで, いよいよ本題である逆の問題, 即ち, 微分作用素 T がどのような条件を満たせば $T\delta_Z$ が超函数 τ に一致するかについて考える

次を得る.

定理 4.1 $T \in D_X$ は, 次の形の微分作用素であるとする.

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1} t_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-2} t_1(x) + \cdots + \left(-\frac{d}{dx}\right) t_{m-2}(x) + t_{m-1}(x) \right\}.$$

微分作用素 T は条件

- (i) $PT \in D_X f,$
- (ii) $f'(x)^m t_0(x) = 1 \pmod{f},$

を満たすとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\left[\frac{1}{f(x)^m}\right] = T\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

証明 条件 (i), (ii) を満たす微分作用素 T を用いて, $\sigma = T\delta_Z$ とおく. この超函数 σ が命題 4.1 の条件 (i), (ii) を満たすことを示せばよい. まず, $P\sigma = P(T\delta_Z)$ となるが, 仮定 $PT \in D_X f$ より明らかに $(PT)\delta_Z = 0$ となり, $P\sigma = 0$ を得る. 次に $f^m\sigma = (f^m T)\delta_Z$ に注目する.

微分作用素 T は, $m-1$ 階の微分作用素であるので, $f^m T \in D_X f$ となる. 従って, 先程と同様に $f^m\sigma = 0$ を得る.

最後に, 条件 $f(x)^{m-1} f'(x)\sigma = \delta_Z$ について考える. この条件は, 微分作用素 T を用いると

$$(f(x)^{m-1} f'(x) T - 1)\delta_Z = 0$$

と表せる。これは、補題 4.2 より、

$$f(x)^{m-1}f'(x)T - 1 \in D_X f$$

と同値である。

ここで、 T が $m-1$ 階の微分作用素であることから、

$$\begin{aligned} f(x)^{m-1}f'(x)T &= \frac{1}{(m-1)!}f(x)^{m-1}f'(x)\left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1}t_0(x) \\ &= f'(x)^m t_0(x) \pmod{D_X f} \end{aligned}$$

を得る。故、 $f(x)^{m-1}f'(x)T = 1 \pmod{D_X f}$ は、 $f'(x)^m t_0(x) = 1 \pmod{f}$ と同値である。□

ここで、極の位数 m が 5 の場合に、微分作用素 R を

$$R = \left(-\frac{d}{dx}\right)^4 r_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right)^3 r_1(x) + \cdots + \left(-\frac{d}{dx}\right) r_3(x) + r_4(x)$$

とにおいて、 $PR \pmod{D_X f}$ を計算してみる。 PR は 5 階の微分作用素であるが

$$P = -f(x)\left(-\frac{d}{dx}\right) + 4f'(x)$$

を用いて作用素の合成 PR を求めると、 $D_X f$ を法として、

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d}{dx}\right)^3(f'r_1 + 10f''r_0) \\ &+ \left(-\frac{d}{dx}\right)^2(2f'r_2 + 9f''r_1 + 20f'''r_0) \\ &+ \left(-\frac{d}{dx}\right)(3f'r_3 + 7f''r_2 + 11f'''r_1 + 15f''''r_0) \\ &+ 4(f'r_4 + f''r_3 + f'''r_2 + f''''r_1 + f'''''r_0) \end{aligned}$$

と等しいことが分かる。従って、条件 $PR \in D_X f$ は、剰余体 $K[x]/(f)$ における以下の線形連立方程式と同値である。

$$\begin{aligned} f'r_1 + 10f''r_0 &= 0, \\ 2f'r_2 + 9f''r_1 + 20f'''r_0 &= 0, \\ 3f'r_3 + 7f''r_2 + 11f'''r_1 + 15f''''r_0 &= 0, \\ 4f'r_4 + 4f''r_3 + 4f'''r_2 + 4f''''r_1 + 4f'''''r_0 &= 0. \end{aligned}$$

初項として $r_0(x)$ を与えると, r_1, r_2, r_3, r_4 が逐次一意に決まる. 実際, 上記の方程式に $a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$ を満たす多項式 $b(x)$ を掛けて変形すれば,

$$\begin{aligned} r_1 &= -b(10f''r_0), \\ r_2 &= -b(9f''r_1 + 20f'''r_0)/2, \\ r_3 &= -b(7f''r_2 + 11f'''r_1 + 15f''''r_0)/3, \\ r_4 &= -b(f''r_3 + f'''r_2 + f''''r_1 + f'''''r_0) \end{aligned}$$

を得る.

一般の場合も次の補題により, 条件 $PR \in D_X f$ を剰余体 $K[x]/(f)$ における線形方程式系として, 具体的に書き下すことが出来る.

補題 4.3 微分作用素 R は次の形の $m-1$ 階の微分作用素であるとする.

$$R = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1} r_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-2} r_1(x) + \cdots + \left(-\frac{d}{dx}\right) r_{m-2}(x) + r_{m-1}(x).$$

このとき, 次は同値である.

- (i) $PR \in D_X f$,
- (ii) $r_0(x), r_1(x), \dots, r_{m-1}(x)$ は, 剰余体 $K[x]/(f)$ において,

$$if'(x)r_i(x) + \sum_{j=1}^i \frac{(m-1-i+j)!}{(m-1-i)!} \frac{i+mj-j}{(j+1)!} f^{(j+1)}(x)r_{i-j}(x) = 0.$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1.$$

を満たす.

証明 いま, 微分作用素の合成 PR を

$$PR = \sum_{i=0}^m \left(-\frac{d}{dx}\right)^i w_i(x)$$

と展開すると, 条件 $PR = 0 \pmod{D_X f}$ は各 i に対し, $w_i(x) = 0 \pmod{f}$ が成り立つことと同値である. ここで,

$$P\left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-i-1} = \sum_k \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-i-k} \frac{(m-i-1)!}{(m-i-k)!} \frac{mk - (m-i)}{k!} f^{(k)}(x)$$

を用いて $w_i(x)$ を求めると, $w_m(x) = w_{m-1}(x) = 0 \pmod{f}$ が直ちにわかる. $w_{m-i-1}(x) \pmod{f}$ を具体的に書き下すことで上記の式を得る. \square

各 i について, $if'(x)r_i(x)$ は, $r_0(x), r_1(x), \dots, r_{i-1}(x)$ に関する一次の式で表される. ここで, $r_i(x)$ の係数多項式 $f'(x)$ は $K[x]/(f)$ において可逆であるので, $r_i(x)$ 自身, $r_0(x), \dots, r_{i-1}(x)$ より定まる. 従って, 初項として $r_0(x) \in K[x]/(f)$ を取れば, $r_1(x), \dots, r_{m-1}(x) \in K[x]/(f)$ は逐次一意的に定まる. 初項 $r_0(x) \in K[x]/(f)$ の選び方は自由であるので, $PR \in D_X f$ なる $m-1$ 階の微分作用素 R 全体のなす集合は $\deg f$ 次元の K ベクトル空間となること等もここから読み取れる.

特に, 初項 $r_0(x) \in K[x]/(f)$ として, 条件 $f'(x)^m t_0(x) = 1 \pmod{f}$ を満たす $t_0(x)$ を選び, 補題 4.3 の条件式から対応する $t_1(x), t_2(x), \dots, t_{m-1}(x)$ を逐次求め, 微分作用素 T を

$$\frac{1}{(m-1)!} \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1} t_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-2} t_1(x) + \dots + \left(-\frac{d}{dx}\right) t_{m-2}(x) + t_{m-1}(x) \right\}.$$

で定めれば, 定理 4.1 より, $\tau = T\delta_Z$ が従う.

例 4 $f(x) = x^3 - x - 1$, $m = 4$ とする. 恒等式

$$\frac{1}{23}(18x - 27)f(x) + \frac{1}{23}(-6x^2 + 9x + 4)f'(x) = 1$$

より, $b(x) = \frac{1}{23}(-6x^2 + 9x + 4)$ を得る.

$$\left[\frac{1}{f(x)^4}\right] = T\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

なる微分作用素

$$T = \frac{1}{3!} \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\right)^3 t_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right)^2 t_1(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right) t_2(x) + t_3(x) \right\}$$

の係数にあたる零階の微分作用素は, 次で与えられる.

$$t_0(x) = \frac{1}{23^2}(-15x^2 + 9x + 16)$$

$$t_1(x) = \frac{1}{23^3}(-2916x^2 + 3960x - 540)$$

$$t_2(x) = \frac{1}{23^3}(13680x^2 + 2916x - 26160)$$

$$t_3(x) = \frac{1}{23^4}(933120x^2 - 811800x - 622080)$$

いままでの結果を纏めることで、次の留数計算アルゴリズム（原型）を導ける。

留数計算アルゴリズム（原型）

input: $\frac{h(x)}{f(x)^m}$

- $a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$ なる $b(x)$ を求める
- $t_0(x) = b(x)^m \pmod{f}$ を求める.
- $i = 1, 2, \dots, m-1$ に対し t_i を次で定める.

$$t_i = - \left(\sum_{j=1}^i \frac{(m-1-i+j)!}{(m-1-i)!} \frac{i+mj-j}{(j+1)!} f^{(j+1)} t_{i-j} \right) b/i \pmod{f}$$

- $r(x) = \sum_{k=0}^{m-1} t_{m-1-k}(x) \frac{d^k h}{dx^k}(x) \pmod{f}$ とおく.

output: $r(x)$

この時、有理関数 $\frac{h(x)}{f(x)^m}$ の点 $\beta \in Z$ における値は $\frac{1}{(m-1)!} r(\beta)$ で与えられる。

これは、剰余体 $K[x]/(f)$ での加減乗除からなる、非常に簡単なアルゴリズムであり、基本的に計算効率が良い。しかし、計算に用いる多項式 $b(x)$ の各項の係数に注意する必要がある。一般にこれらの有理数の分母・分子の桁数はかなり大きくなることを覚悟しておく必要がある。その為、計算効率の観点から、次の2点が問題となる。

- 初項 $t_0(x)$ の各項の係数となる有理数の分母・分子の桁数が大きい。そのため、各ステップでの計算量が多くなる。
- t_0, t_1, \dots, t_{i-1} より t_i を求める際に多項式 $b(x)$ による掛け算を必要とする。この掛け算の計算量も多い。

多項式の加減乗除を行う際、係数をなるべく整数化しておいて計算を行うことで、ある程度計算効率を向上させることができるが、この種の改良には自ずと限界がある。この2つの問題の根本的解決策については、次の節で議論する。

5 Noether 作用素と留数計算アルゴリズム

この節では、 D 加群の理論の力を借りて、 $[\frac{1}{f(x)^m}] = T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ なる微分作用素 T の正体を明らかにする。その結果に基づいて、留数計算の効率化にたいする理論的基礎を与える。まず、[12, 13] に従って、Noether 作用素の定義を与える。

超関数 $\tau = [\frac{1}{f(x)^m}]$, $\delta_Z = [\frac{f'(x)}{f(x)}]$ の annihilator $\text{Ann}_{D_X}(\tau), \text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$ を用いて

左 D_X -加群 M, N をそれぞれ、 $M = D_X/\text{Ann}_{D_X}(\tau), N = D_X/\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$, 即ち

$$M = D_X/D_X P + D_X f^m, N = D_X/D_X f$$

で定め、 M から N への D_X 準同型写像全体のなす集合 $\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ を考える。微分方程式系 M, N はホロノミック系であり、 $\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ は有限次元 K ベクトル空間となる。 M, N はともに、その台 Z の各点で単純なホロノミック系であるので

$$\dim_K \text{Hom}_{D_X}(M, N) = \deg f.$$

が成り立つ。

補題 5.1 $\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ は右 $K[x]/(f)$ 加群の構造をもつ。

また、 $\dim_K K[x]/(f) = \deg f$ であること等から、次も明らかとなる。

補題 5.2 ρ は $\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ の要素であり零ではないとする。このとき、 $\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ は右 $K[x]/(f)$ 加群として、 ρ で生成される。即ち、

$$\text{Hom}_{D_X}(M, N) = \{\rho c(x) \mid c(x) \in K[x]/(f)\}$$

が成立する。

$\text{Hom}_{D_X}(M, N)$ の零でない要素のことをホロノミック系 M の Noether 作用素と呼ぶ ([12])。

Noether 作用素 ρ は、 $1 \bmod \text{Ann}_{D_X}(\tau) \in M$ の ρ による像

$$\rho(1 \bmod \text{Ann}_{D_X}(\tau)) \in N$$

を定めることで一意的にきまる. いま, 微分作用素 $R \in D_X$ を用いて

$$\rho(1 \bmod \text{Ann}_{D_X}(\tau)) = R \bmod \text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$$

と表現されたとする. この時, 微分作用素 R は

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau)R \subset \text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$$

即ち,

$$PR \in D_X f, f^m R \in D_X f$$

を満たす. 逆に, この条件を満たす微分作用素 R は Noether 作用素の表現と見なせる. ρ を表現する代表元 R の選び方には $D_X f$ を法とする自由度があることになる.

これらのことから, $[\frac{1}{f(x)^m}] = T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ に現れた微分作用素 T は, Noether 作用素を微分作用素として表現したものに他ならないことが分かる.

ここで, 次の自然な写像

$$\text{Hom}_{D_X}(M, N) \times \text{Hom}_{D_X}(N, H_{[Z]}^1(K[x])) \longrightarrow \text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x]))$$

に注目する. ホロノミック系 M の Noether 作用素 $\rho \in \text{Hom}_{D_X}(M, N)$ を用いると, 解空間 $\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x]))$ が記述可能となることが分かる.

定理 5.1 微分作用素 $R \in D_X$ は, ホロノミック系 M の Noether 作用素を定めるとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x])) = \{R(c(x)\delta_Z) \mid c(x) \in K[x]/(f)\}.$$

証明 $\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x])) = \{c(x)\delta_Z \mid c(x) \in K[x]/(f)\}$ より明らか.

この定理は, 微分方程式 M に対し, M の超関数解 (代数的局所コホモロジー解) を考えることと M の Noether 作用素を考えることが同義であることを意味する. 実際, Noether 作用素の満たす条件 $PR \in D_X f, f^m R \in D_X$ を

$$PR = 0, f^m R = 0 \bmod D_X f$$

と表せば, Noether 作用素も微分方程式 M の解であることが直ちに分かる.

補足 D_X 加群 $N = D_X/\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$ は, 元々, 超関数 δ_Z の満たす微分方程式として導入したが, D_X 加群としては代数的局所コホモロジー

群 $H_{[Z]}^1(K[x])$ と同型である。つまり、同じものを微分方程式と理解するかあるいは超関数の空間と見なして用いるかの違いがここに現れている。しかし、上記の定理が示すように見方が変われば得るものも自ずと異なってくる。補題 4.1 の補足で述べたように、微分方程式 M の代数的局所コホモロジー解としては、通常、 $[\frac{g(x)}{f(x)^m}]$ のような表現を持つ超関数

を考える。有理関数を用いたこのような表現では、超関数 $[\frac{g(x)}{f(x)^m}]$ の線形汎関数としての作用の仕方が読み取れない。それに比べ、同じ超関数が $R(c(x)\delta_Z)$ と表現されていれば、この超関数の線形汎関数としての作用の仕方がたちどころに分かる ([6, 7, 9])。さらに、微分方程式 M の解空間 $\text{Hom}_{D_X}(M, H_{[Z]}^1(K[x]))$ の場合、この空間に属するどのような超関数も、すべて、一つの Noether 作用素 R を用いて、 $R(c(x)\delta_Z)$ と表現できる訳である ([10, 11, 12, 13])。

系 5.1 微分作用素

$$E = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-2} e_1(x) + \cdots + \left(-\frac{d}{dx}\right) e_{m-2}(x) + e_{m-1}(x) \right\}$$

は条件 $PE = 0 \pmod{D_X f}$ を満たすとする。また、 $t_0(x) \in K[x]$ は条件 $f'(x)^m t_0(x) = 1 \pmod{f}$ を満たすとする。このとき、 $\tau = E(t_0(x)\delta_Z)$ が成り立つ。

証明 超関数 $E(t_0(x)\delta_Z)$ が命題 4.1 の条件を満たすこと、もしくは、微分作用素 Et_0 が定理 4.1 の条件を満たすことを確かめればよい。□

いま、 E の形式随伴作用素を E^* とおくと、

$$\begin{aligned} \text{Res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right) &= \text{Res}_\beta \left(h(x) \left[\frac{1}{f(x)^m} \right] dx \right) \\ &= \text{Res}_\beta \left(h(x) E(t_0(x)\delta_Z) \right) \\ &= \text{Res}_\beta \left((E^*h)(x) (t_0(x)\delta_Z) dx \right) \\ &= t_0(\beta) (E^*h)(\beta) \end{aligned}$$

を得る。このことから、次のアルゴリズムを得る。

留数計算アルゴリズム (暫定版)

input: $\frac{h(x)}{f(x)^m}$

- $a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$ なる $b(x)$ を求める
- $e_0(x) = 1$ とおく.
- $i = 1, 2, \dots, m-1$ に対し $e_i(x)$ を次で定める.

$$e_i = -\left(\sum_{j=1}^i \frac{(m-1-i+j)!}{(m-1-i)!} \frac{i+mj-j}{(j+1)!} f^{(j+1)} e_{i-j}\right) b/i \pmod{f}$$

- $t_0(x) = b(x)^m \pmod{f}$ を求める.
- $r(x) = t_0(x) \sum_{k=0}^{m-1} e_{m-1-k}(x) \frac{d^k h}{dx^k}(x) \pmod{f}$ とおく.

output: $r(x)$

この時、有理関数 $\frac{h(x)}{f(x)^m}$ の点 $\beta \in Z$ における値は $\frac{1}{(m-1)!} r(\beta)$ で与えられる.

各 $e_i(x) \in K[x]/(f)$ の計算は、前の節で与えたアルゴリズムに比べ大分軽くなっている。このアルゴリズムは、1999年頃に論文 [7] において計算法のひとつとして提案したものを具体的に書いたものである。

さてここで、第2節で求めた留数公式 (2.5) を思い出そう。微分多項式 $C_{m,k}$ はかならず $f'(x)^{m-1-k}$ を因子に持っていた。このことに注目し、微分作用素

$$B_i = \left(-\frac{d}{dx}\right)^i f'(x)^i$$

を用いて、

$$B = \frac{1}{(m-1)!} \{B_{m-1} + B_{m-2}c_1(x) + B_{m-3}c_2(x) + \dots + B_1c_{m-2}(x) + B_0c_{m-1}(x)\}$$

とおく。

例えば、 $m = 5$ としてこの場合に条件 $PB \in D_X f$ を書き下すと、剰余体 $K[x]/(f)$ での連立方程式

$$c_1 + 10f''c_0 = 0,$$

$$2c_2 + 9f''c_1 + 20f'''f'c_0 = 0,$$

$$3c_3 + 7f''c_2 + 11f'''f'c_1 + 15f''''(f')^2c_0 = 0,$$

$$4c_4 + 4f''c_3 + 4f'''f'c_2 + 4f''''(f')^2c_1 + 4f'''''(f')^3c_0 = 0.$$

を得る. 初項 c_0 は, 1 としてある. この方程式を見れば, c_1, c_2, c_3, c_4 が極めて単純に逐次求まることが分かる. ここで, 多項式 $c(x) \in K[x]$ は条件 $(f'(x))^9 c(x) = 1 \pmod f$ を満たすとする. この時明らかに,

$$\tau = B(c(x)\delta_Z)$$

が成り立つ.

位数 m が一般の場合については, 論文 [17] を参照されたい.

留数計算アルゴリズム

input: $\frac{h(x)}{f(x)^m}$

- $c_0(x) = 1$ とおく.
- $i = 1, 2, \dots, m-1$ に対し c_i を次で定める.

$$c_i = -\left(\sum_{j=1}^i \frac{(m-1-i+j)!}{(m-1-i)!} \frac{i+mj-j}{(j+1)!} f^{(j+1)}(f')^{j-1} c_{i-j}\right) / i \pmod f$$

- $a(x)f(x) + b(x)f'(x) = 1$ なる $b(x)$ を求める
- $c(x) = b(x)^{2m-1} \pmod f$ を求める.

- $r(x) = c(x) \sum_{k=0}^{m-1} c_{m-1-k}(x) (f')^k \frac{d^k h}{dx^k}(x) \pmod f$ とおく.

output: $r(x)$

この時, 有理関数 $\frac{h(x)}{f(x)^m}$ の点 $\beta \in Z$ における値は $\frac{1}{(m-1)!} r(\beta)$ で与えられる.

このアルゴリズムで実際に行う計算は, 有理数係数多項式環 $K[x]$ での加減乗除のみからなっている. また, 剰余計算の利用により, 多項式の次数を抑えてある. 多項式 $b(x)$ の使用を可能な限り避けてあるので (元々, 不必要だった!!), 計算効率もよい.

他のアルゴリズムとの計算効率の比較や計算所要時間の比較などについては, 論文 [17] を参考にされたい.

補足 このアルゴリズムでは, 多項式 f による剰余を常にとっているが, 多項式 f による剰余を一切行わないで, symbolic な計算を行うと, 留数公式 (2.5) を求めることができる. 即ち, このアルゴリズムは, 第2節で導いた古典的な留数公式において, 多項式 f による剰余が可能と予め分かる個所すべてについて f による剰余を取れるように設計してあるアルゴリズムといえる.

論文 [10, 15] では, 常微分方程式の問題に Noether 作用素を応用している. 論文 [14, 16] 等では, 多変数留数の問題に Noether 作用素の概念を応用している.

参考文献

- [1] 加藤涼香, 田島慎一: 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー, 京都大学数理解析研究所講究録 1395 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」 (2004), 50-56.
- [2] Y. Nakamura and S. Tajima: Residue calculus with differential operators, *Kyushu J. Math.* 54 (2000), 127-138.
- [3] Y. Nakamura and S. Tajima: An algorithm for computing the residue of a rational function via D-Modules, *Josai Mathematical Monographs* 2 (2000), 149-158.
- [4] 田島慎一, 中村弥生: 微分作用素を用いた有理関数の留数計算と Horowitz's algorithm, 京都大学数理解析研究所講究録 1038 「数式処理における理論と応用の研究」 (1998), 23-30
- [5] 田島慎一, 中村弥生: D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, *数式処理* 7 (1999), 2-10.
- [6] 田島慎一: 多変数補間問題とホロノミック D-加群, 千葉大学数学講究録 3 「代数解析学の諸問題」 (1999), 73-94.
- [7] 田島慎一: Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録 「積分核の代数解析的研究」 掲載予定

- [8] 田島慎一：非同次常微分方程式の可解条件について, 京都大学数理解析研究所講究録 1168 「完全最急降下法」(2000), 66-79.
- [9] 田島慎一：代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 1138 「数式処理における理論と応用の研究」(2000), 87-95.
- [10] 田島慎一：非同次常微分方程式の可解条件について II, 京都大学数理解析研究所講究録 1295 「Computer Algebra -Algorithms, Implementations and Applications」(2002), 9-16.
- [11] S. Tajima : Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, in *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, eds by T. Kawai and K. Fujita, World Scientific (2002), 284-296.
- [12] 田島慎一：零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録「方程式系の超局所解析と漸近解析」, 掲載予定.
- [13] 田島慎一：確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録 1336 「双曲形方程式と非正則度」(2003), 121-132
- [14] 田島慎一, 中村弥生：Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録 1352 「再生核の理論の応用」(2004), 1-10.
- [15] S. Tajima : Inhomogeneous ordinary differential equations, local cohomologies and residues, in *Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, eds by Le Hung Son, W. Tutschke and C.C. Yang, Kluwer, (2004), 361-370.
- [16] 田島慎一：Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録「超局所解析とその周辺」, 掲載予定
- [17] 田島慎一, 庄司卓夢：高速留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」, 掲載予定.