数理解析研究所講究録
1509 巻 2006 年 62-80



# 強擬凸領域のベルグマン核 [1]

平 地 健 吾 (大阪大学大学院理学研究科)

Fefferman は論文『複素解析に現れる放物型不変式論』において強擬凸領域の幾何, 解析の研究プログラムを提案した. その基本的なアイディアは, 強擬凸領域のベルグマン核をリーマン多様体上の熱核の類似と考えてみよう, というものである. よく知られているように, 熱核の不変式論を用いた研究は指数定理を含む壮大な理論に発展している. これに対応する「ベルグマン核の不変式論」を作ろうというのがこのプログラムである. このとき現れる構造群は $SU(1,n)$ の放物型部分群あり, これが「放物型不変式論」の名前の由来である. このノートではこのプログラムに沿った研究の現状を紹介する.

複素領域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ のベルグマン核 $K_\Omega(z,\overline{w})$ は $\Omega$ 上の $L^2$ 正則函数に対する再生核として定義される. ここでは主に $K_\Omega$ の対角線集合への制限 $K_\Omega(z)=K_\Omega(z,\overline{z})$ を考える. ベルグマン核の最も重要な性質の一つは双正則写像 $\Phi\colon\Omega_1\to\Omega_2$ に対する変換則

$$K_{\Omega_2}\circ\Phi=|\det\Phi'|^{-2}K_{\Omega_1} \tag{0.1}$$

である. ここで $\Phi'$ は正則ヤコビ行列である. これから特にベルグマン計量 $i\partial\overline{\partial}\log K_\Omega$ の双正則不変性が導かれる. ベルグマン核 (計量) は双正則幾何の基本的な道具であり, 多くの応用を持つ. しかし, その具体的な計算は困難であり具体的な表示が知られているのは領域の対称性が高い場合だけである. とくに強擬凸領域に限ればベルグマン核が具体的に知られているのは球 (と双正則同値な領域) のみである.

プログラムの最初の目標は一般の強擬凸領域のベルグマン核の境界挙動を具体的に書き下す幾何的なアルゴリズムを与えることである. この問題は次の二つの段階に分けて考えることができる.

**幾何的な問題:** 強擬凸超曲面の局所双正則不変量 (CR 不変量) を全て構成せよ.

**解析的な問題:** ベルグマン核の境界での漸近展開を CR 不変量を用いて記述せよ.

これらの問題を考えるカギとなるのはベルグマン核の変換則 (0.1) である. この変換則を一般化し領域汎関数 $L=\{L_\Omega\}$ (各強擬凸領域 $\Omega$ に対して $L_\Omega\in C^\infty(\Omega)$ を対応させる) に対する双正則変換則

$$L_{\Omega_2}\circ\Phi=|\det\Phi'|^{-2w/(n+1)}L_{\Omega_1}$$

を考える. これをウェイト $w$ の変換則と呼ぶ. とくにベルグマン核はウェイト $n+1$ を持つ. このような変換則と満たす領域汎関数の境界値として CR 不変量を定義する. 正確には CR 不変量の定義にはさらに局所化可能性, $L_\Omega$ の境界点 $p$ での値は $p$ での $\partial\Omega$ の有限階のジェットで決定される, という条件を課す. このような不変量を全て構成する方法が与えられれば (幾何的な問題が解決されれば) ベルグマン核の漸近展開は自然に与えられる.

[1] このノートは『数学』の論説を執筆中, ひとまず詳しい計算まで書いてみよう, ということで作ったものです. 論説の最終稿はもっと単純で親しみやすい構成になるはずです.

本稿の構成は以下の通りである. §1 ではプログラムのモデルである熱核の漸近展開の理論を復習する. §2 および §3 ではベルグマン核の漸近展開についての解析的な結果と CR 幾何の基本的な道具 (Moser の標準形) についてまとめる. §§4–6 がベルグマン核の不変式論の本論である. ここでの主役は複素モンジュ・アンペール作用素である. 強擬凸領域では複素モンジュ・アンペール方程式を解くことにより完備アインシュタイン・ケーラー計量 $g_\Omega^{EK} = i\partial\overline{\partial}\log u$ が得られる. とくに $u$ が領域の定義関数となるように選んでおけば $g = i\partial\overline{\partial}|z_0|^2 u(z)$ は $(z_0, z) \in \mathbf{C}^* \times \Omega$ 上のリッチ平坦・ローレンツ・ケーラー計量を与え, この計量のスカラー不変量として多くの CR 不変量が構成される. この構成法が全ての CR 不変量を与えることを証明するために構造群 $H$ に対する不変式論を用いる. 実際には $u$ の境界での弱い特異性が障害が現れ, 状況は複雑である. §7 では柏原によるベルグマン核の超局所解析の理論を用いた核関数の計算方法を説明する. これは不変式論によって得られるベルグマン核の漸近展開に含まれる(次元のみに依存する) 普遍定数の決定に応用される. §8 では CR 幾何と共形幾何の関係を説明する. 共形構造の構造群は $SO(1, n)$ の放物型部分群であり, 共形幾何も「放物型不変式論」の枠組みに含まれる.

本文で解説する「Fefferman のプログラム」は著者が整理したものであり, Fefferman の提案したものの一部に過ぎない. プログラムの全体像は Fefferman による講義録 [BFG] で生き生きと語られている. その後の進展については Graham [G2], Bailry [Ba], 平地-小松 [HK], Eastwood [E] などの解説がある.

## 1 熱核の漸近展開

この節では熱核の漸近展開について復習する. ここで説明する幾何的概念および推論に対応するものベルグマン核の不変式論でも現れる. 本論を読むときの参考にして頂きたい.

まずリーマン多様体と強擬凸領域の基本的な概念の対応を表にしておく (右辺については §3 で説明する). これは Fefferman [F3] の冒頭で与えられているものである.

| | リーマン多様体: | 強擬凸領域: |
|---|---|---|
| 基本的な例: | ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$, | ジーゲル領域 $\Omega_0 = \{(z', z_n) \in \mathbf{C}^n : 2\,\mathrm{Re} z_n - \lvert z'\rvert^2 > 0\}$ |
| | $\mathbf{R}^n = E(n)/O(n)$<br>$E(n)$ は運動群 | $\Omega_0 = SU(1, n)/H$,<br>$H$ は $SU(1, n)$ の放物型部分群 |
| 解析的問題: | $\Delta u = f$ | $\overline{\partial} u = \alpha$, $\overline{\partial}_b u = \alpha$ |
| 幾何的概念: | 測地線, レビ・チビタ接続,<br>標準座標 | チェイン, Cartan-田中-Chern 接続,<br>Moser の標準座標 |
| 核関数: | 熱核 | ベルグマン核 |

コンパクト・リーマン多様体 $(M, g)$ 上のラプラス作用素を $\Delta$ とするとき, 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta_x) u(x, t) = 0 & (x, t) \in M \times (0, \infty), \\ u(x, 0+) = f(x) & x \in M \end{cases}$$

は一意的な解をもち,

$$u(x,t) = \int_M H_t(x,y) f(y) dV(y)$$

という積分表示をもつ. この $H_t(x,y)$ が熱核である. 熱核は $t>0$ では滑らかであるが $t \to 0$ のとき $c_n t^{-n/2}\exp(-\mathrm{dist}(x,y)/2t)$ を主要部とする特異性をもつ. とくに対角線 $x=y$ に制限したときには

$$H_t(x,x) \sim c_n t^{-n/2}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x) t^k\Big) \tag{1.1}$$

という漸近展開をもつ. ここで $c_n$ は定数, $\gamma_k(x)$ は計量 $g$ から決まる $M$ 上の滑らかな函数である.

係数 $\gamma_k$ は次のように計算することができる. $p \in M$ を固定し $p$ を中心とする標準座標を $x=(x_1,\dots,x_n)$ をとれば $\gamma_k(p)$ は $x$ に関する $g$ の成分の偏微分 $(g_{ij,ab\dots c}(0))$ を変数とする多項式 $P_k(g_{ij,ab\dots c})$ で与えられる. この多項式は標準座標の選び方に依らないので, 標準座標の変換としての直交群 $O(n)$ の作用に関する不変式になる. よって $\gamma_k$ の決定には $O(n)$ に対するワイルの不変式論を用いることができる. 結果として $\gamma_k$ は (ワイル不変量と呼ばれる) 次のような完全縮約の一次結合で表わされることがわかる.

$$\mathrm{contr}(\nabla^{p_1}R \otimes \cdots \otimes \nabla^{p_s}R) \tag{1.2}$$

ここで $R$ は $g$ のリーマン曲率 $\nabla^p R$ はその $p$ 階の共変微分である. さらに計量のスケーリングに関する熱核の変換則をみれば $\gamma_k$ には $k=(p_1+\cdots+p_s)/2+s$ を満たすものだけが現れることがわかる. このような組み合わせは各 $k$ に対しては有限個であり, 簡単に書き下すことができる. あとは, 実際に一次結合の係数 (次元 $n$ だけによって決まる定数) を決定すればよい. これには熱核をいくつかの簡単な例について具体的に計算する必要がある.

ここまでの手続きについてはベルグマン核での類似物が与えられている. 展開 (1.1) のワイル不変量を用いた表示に対応するのが定理 7.3 である.これがこの論説の主定理である.

もちろん上で述べた結果は熱核の不変式論の最初の一歩にすぎない. 微分形式に対して熱方程式を考えれば熱核の漸近展開と特性類の関係が導かれ, その結果, 様々な指数定理が得られる. ベルグマン核を主題とする理論も同じような広がりを持つ — と期待している.

**注意** ベルグマン核と指数定理の関係についての研究はまだ殆どない. 希望がもてる結果として, コンパクト・複素多様体上の負の直線束 $L$ の中のグラウエルト柱状領域のベルグマン核 (またはセゲー核) の漸近展開と $L^*$ のヒルベルト多項式の関係式がある [H3].

## 2 ベルグマン核の漸近展開

領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ に対し $H^2(\Omega)$ を $\Omega$ 上の $L^2$ 正則関数全体のなすヒルベルト空間とする. $H^2(\Omega)$ の完全正規直交系 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ をとり級数

$$K_\Omega(z,\overline{w}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

を考える．この級数は $(z,w)\in\Omega\times\Omega$ 上で広義一様収束し $(z,\overline{w})$ の正則関数を与える．$K_\Omega$ は完全正規直交系の選び方によらずに定まり，$\Omega$ のベルグマン核と呼ばれる．このとき任意の $f\in H^2(\Omega)$ に対して

$$f(z)=\int_\Omega K_\Omega(z,\overline{w})f(w)dV(w) \tag{2.1}$$

が成り立ち，$K_\Omega$ は $H^2(\Omega)$ の再生核として特徴付けられる．以下では核関数を $z=w$ へ制限し $K_\Omega(z)=K_\Omega(z,\overline{z})$ を考える ($K_\Omega(z)$ から複素化により $K_\Omega(z,\overline{w})$ を再現することができる)．

単位球 $B_n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z|<1\}$ では単項式が完全直交系型を与えるので定義に基づいてベルグマン核を計算することができる:

$$K_{B_n}(z)=c_n(1-|z|^2)^{-n-1},\quad c_n=n!/\pi^n.$$

また，球と双正則同値であるジーゲル領域 $\Omega_0=\{(z',z_n)\in\mathbf{C}^n:2\mathrm{Re}z_n-|z'|^2>0\}$ では

$$K_{\Omega_0}(z)=c_n\,(2\mathrm{Re}z_n-|z'|^2)^{-n-1}$$

となる．これらの例ではベルグマン核は境界において定義関数に関して $n+1$ 次の極をもっている．Hörmander [Hö] は**強擬凸領域** — 境界の各点において $\partial\Omega_0$ の局所双正則像で二次まで近似できる領域 — のベルグマン核も同様な境界特異性を持つことを示した．その後 Fefferman [F1] はベルグマン核には対数型の特異性も含まれていることを示した．これらの結果をまとめて述べる．以下この論説では**領域の境界は常に滑らかであると仮定する**．

**定理 2.1** 有界強擬凸領域 $\Omega$ のベルグマン核は次の展開をもつ:

$$K_\Omega=\varphi^{\mathrm{B}}\,\rho^{-n-1}+\psi^{\mathrm{B}}\log\rho, \tag{2.2}$$

ここで $\rho$ は $\Omega$ の滑らかな定義関数 ($\Omega=\{\rho>0\}$ かつ境界 $\partial\Omega$ 上で $d\rho\neq0$ を満たす関数)，$\varphi^{\mathrm{B}},\psi^{\mathrm{B}}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ (境界まで込めて滑らかな関数) である．さらに $\varphi^{\mathrm{B}}$ の境界値は $c_n\,J[\rho]$ の境界値と一致する．ここで $J[\cdot]$ は**複素モンジュ・アンペール作用素**

$$J[\rho]=(-1)^n\det\begin{pmatrix}\rho & \partial\rho/\partial z_j\\ \partial\rho/\partial\overline{z}_k & \partial^2\rho/\partial z_j\partial\overline{z}_k\end{pmatrix}_{j,k=1,\dots,n} \tag{2.3}$$

である．境界の近傍では $J[\rho]>0$ が成り立ち，$K_\Omega$ の主要部は退化しない．

この漸近展開からベルグマン計量の境界挙動が得られ，その結果として有名な Fefferman の拡張定理が導かれる．

**定理 2.2** 強擬凸領域の間の双正則写像 $\Phi\colon\Omega_1\to\Omega_2$ は境界まで込めた $C^\infty$ 微分同相写像 $\widetilde{\Phi}\colon\overline{\Omega}_1\to\overline{\Omega}_2$ に拡張される．

この定理は領域の双正則幾何が境界の CR 幾何 (実超曲面の双正則幾何) と完全に対応することを保証している．Fefferman のプログラムも CR 幾何を問題の定式化の基礎としている．

定理 2.1 の証明を見ればベルグマン核の境界特異性は局所的にきまることがわかる．すなわち $\varphi^{\mathrm{B}} \bmod O^{n+1}(\partial\Omega)$ および $\psi^{\mathrm{B}}$ の境界でのテーラー展開は境界の形から局所的に決定される．実はもっと強い主張ができる: このテーラー係数は (次節で説明する) Moser 不変量の多項式として表わすことができる．

熱核の展開 (1.1) とベルグマン核の展開 (2.2) には大きな違いがある．前者は時間変数 $t$ に関するテーラー展開であるが，後者では定義関数 $\rho$ と変数 $z$ は独立ではない．もちろん，境界の近傍 $\{0<\rho<\epsilon\}$ を $C^\infty$ 同型で $\partial\Omega\times(0,\epsilon)$ のように直積に分解することができる．しかし，この場合，展開の双正則不変性が失われてしまう．以下で考えるのは，ウェイト $k$ の変換則を満たす $\varphi_k\in C^\infty(\overline{\Omega})$ を係数とする $\varphi^{\mathrm{B}}=\varphi_0+\varphi_1\rho+\varphi_2\rho^2+\cdots$ という形の展開である．定義関数 $\rho$ の選び方にも任意性があるので，その双正則不変な構成も重要な問題となる．

# 3 Moser の標準座標

序で述べた幾何的な問題を正確に定式化するには CR 幾何の道具 (§1 の表の右側) が必要である．この節ではこれら概念を説明し，CR 不変量の定義を与える．

まずモデル領域である，ジーゲル領域 $\Omega_0$ の自己同型について復習する．射影座標 $(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^{n+1}$ を $z_j=\zeta_j/\zeta_0$ によって定義すれば，ジーゲル領域の境界 $\partial\Omega_0$ はローレンツ・エルミート形式

$$\mu(\zeta,\overline{\zeta})=\zeta_0\overline{\zeta}_n+\zeta_n\overline{\zeta}_0-|\zeta'|^2$$

の零点集合として表わされる．$\mu(\zeta,\overline{\zeta})$ に対応するエルミート行列を $g_0$ と書き，この内積を保つ行列全体を $G=SU(g_0)$ をおく．このときジーゲル領域の任意の正則自己同型は $h\in G$ の定義する線形変換 $\zeta\mapsto h\zeta$ で与えられる．この変換を $\phi_h$ と表すとき，$\phi_h(0)=0$ が成り立つのは $h$ が $G$ の部分群

$$H=\{h\in G:\ h\,e_0=\lambda\,e_0,\ \lambda\in\mathbf{C}^*\}$$

に含まれるときである．ここで $e_0$ は縦ベクトル ${}^t(1,0,\ldots,0)$ である．

一般の強擬凸超曲面 $M$ は各点においてジーゲル領域の境界 $\partial\Omega_0$ の局所双正則像で二次まで近似することができる (これを強擬凸性の定義とした)．Moser は実解析的な超曲面 $M$ を $\partial\Omega_0$ に最も近付ける局所座標を与え強擬凸超曲面の局所同値問題を解決した．この座標は **Moser の標準座標**とよばれる．各点 $p\in M$ に対して $p$ を中心とする Moser の標準座標 $z=(z',z_n)\in\mathbf{C}^{n-1}\times\mathbf{C}$, $z_n=u+iv$ をとれば $M$ は

$$\rho(z,\overline{z})=2u-|z'|^2-\sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 2,\,l\geq 0}A^l_{\alpha\overline{\beta}}\,z'_\alpha\overline{z}'_\beta v^l=0 \tag{3.1}$$

で与えられる ($z'_\alpha=z_{\alpha_1}\cdots z_{\alpha_p}$ は $z'$ の単項式)．ここでテーラー係数 $(A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ はいくつかの線形な正規化条件を満たす (これは測地線に対応する概念であるチェインの方程式から導かれる)．この正規化条件の選び方は様々あり考える問題に応じて選択することができる ([E] 参照)．$A=(A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を

$(M,p)$ の **Moser 不変量**, (3.1) で与えられる曲面の芽 (これを $N(A)$ と書く) を **Moser の標準形**と呼ぶ.

リーマン幾何での標準座標と同様に, Moser の標準座標もモデル領域でのイソトロピー群 $H$ の作用だけの任意性がある. この座標変換は Moser 不変量全体の空間

$$\mathcal{N} = \left\{A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}}) : A \text{ は Moser の正規化条件を満たす}\right\}$$

上の $H$-作用を与える. とくに二つの曲面の芽 $N(A)$ と $N(\widetilde{A})$ が双正則同値になるのは $A$ と $\widetilde{A}$ が同じ $H$-軌道に含まれときに限ることが示される. すなわち Moser 不変量は $M$ の曲率であり, その表示は $H$-作用 (座標変換) だけの任意性をもつ.

この作用は $M$ 上の $H$-主バンドルを用いて表現することができる. Cartan [C], 田中 [T], Chern [CM] は $M$ の高次のコフレーム・バンドルとして定義される $H$-主バンドルに Cartan 接続を与えることにより局所同値問題を解決した. この接続の曲率とMoser 不変量 $A$ が一対一に対応する. このときフレームの選び方が標準座標の選び方に対応している ([BS] 参照).

標準座標 (あるいはフレーム) の選び方によらない曲面の不変量を取り出すには $A$ の関数 $P(A)$で $H$-作用で不変なものを用いればよい. ここではとくに $P(A)$ が $A$ の多項式であるものを考え, 次のような定義をする.

**定義 3.2.** Moser 不変量 $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を変数とする多項式 $P(A)$ がウェイト $w$ の **CR 不変量**であるとは, 任意の双正則写像 $\Phi$ で曲面 $N(A)$ を曲面 $N(\widetilde{A})$ に移すものに対して

$$P(\widetilde{A}) = |\det \Phi'(0)|^{-2w/(n+1)} P(A)$$

が成り立つときをいう.

ここで現れる $\Phi$ は標準座標の変換であり, したがって群 $H$ によりパラメータ付けが可能である. このとき $\det \Phi'(0)$ は $H$ の指標を与え, $P(A)$ は $\mathcal{N}$ 上の $H$-不変式とみなせる (定義 5.1 参照).

序で述べた幾何的な問題は正確には次のように述べることができる:

**幾何的な問題** CR 不変量を全て構成せよ.

$A$ の多項式として定義した CR 不変量は序で述べたような境界汎関数とみなせることを説明する. ウェイト $w$ の CR 不変量 $P(A)$ に対して $M$ 上の関数 $P_M$ が次のように定義される: $p \in M$ に対して $\Phi(p) = 0$ かつ $\Phi(M) = N(A)$ となる局所双正則写像をとり $P_M(p) = |\det \Phi'(p)|^{-2w/(n+1)} P(A)$ と定義する. 左辺は $\Phi$ の選び方によらない. このように $P$ を強擬凸超曲面に対する汎関数とみればウェイト $w$ の変換則が成り立つ.

Graham [G1] は $H$ の $\mathcal{N}$ への作用を具体的に計算することにより 2 次元でのウェイト 5 までの CR 不変量を決定した ([HKN] 参照). 2 次元の場合は $\alpha, \beta$ は全て 1 のみの列になので次のような略記を用いる: $A^l_{p\overline{q}} = A^l_{\alpha\overline{\beta}}$ ここで $p = |\alpha|, q = |\beta|$. この場合 Moser の正規化条件は

$$A^l_{2\overline{2}} = A^l_{2\overline{3}} = A^l_{3\overline{2}} = A^l_{3\overline{3}} = 0, \quad \forall\, l \geq 0, \tag{3.2}$$

と書くことができる．

**定理 3.3** $I_w^{\mathrm{CR}}$ をウェイト $w$ の CR 不変量全体のなすベクトル空間とする．$n=2$ の場合，$I_1^{\mathrm{CR}}=I_2^{\mathrm{CR}}=\{0\}$, $\dim I_3^{\mathrm{CR}}=\dim I_4^{\mathrm{CR}}=1$, $\dim I_5^{\mathrm{CR}}=2$ であり，$I_3^{\mathrm{CR}}$, $I_4^{\mathrm{CR}}$, および $I_5^{\mathrm{CR}}$ の基底は順に $A^0_{4\bar4}$, $|A^0_{2\bar4}|^2$, および

$$|A^0_{5\bar2}|^2+\mathrm{Re}\{(-2A^0_{3\bar5}+iA^1_{2\bar4})A^0_{4\bar2}\},\quad |A^0_{4\bar3}|^2+\mathrm{Re}\{(10/9\,A^0_{3\bar5}-i/3\,A^1_{2\bar4})A^0_{4\bar2}\}$$

で与えられる．

この計算例は以後の発展の重要な指針となった (§5 および [HKN] 参照)．とくに重要なのはウェイト 3 の CR 不変量が線形であることである．Graham はさらに一般に $n$ 次元で CR 不変量が線形項を含むのはウェイト $n+1$ のときに限ることを示している．

Moser 不変量 $A$ を用いた CR 不変量の表示はウェイトが大きくなれば複雑になる．$n=2$ の場合 $\dim I_6^{\mathrm{CR}}=3$ であり，$(A^0_{4\bar4})^2$ 以外の CR 不変量は約 20 項を含む多項式である．これは計算機を用いた数式処理により得られた結果である [Hi3]．

# 4 アンビエント計量

この節では Fefferman [F3] によって与えられた CR 不変量の構成法 (ambent metric construction) を説明する．この構成法のカギとなるのが複素モンジュ・アンペール作用素 (2.3) の双正則不変性である: 双正則写像 $\Phi:\Omega_1\to\Omega_2$ および $u_2\in C^\infty(\Omega_2)$ に対して

$$u_1=|\det\Phi'|^{-2/(n+1)}u_2\circ\Phi\quad\Longrightarrow\quad J[u_1]=J[u_2]\circ\Phi$$

が成り立つ．すなわち $J[\cdot]$ はウェイト $-1$ の変換について不変である．これは方程式 $J[\rho]=1$ を満たす解が一意に存在すれば $\rho$ はウェイト $-1$ の変換を満たすことを示している．しかし残念ながら一般の強擬凸領域ではこの方程式は境界まで滑らかな解をもたない (§6 参照)．そこで Fefferman [F2] は条件を弱めて $J[\rho]=1$ の近似解を考えた．

**命題 4.1** 領域 $\Omega$ の滑らかな定義関数 $r$ で $J[r]=1+O^{n+1}(\partial\Omega)$ を満たすものが $\mathrm{mod}\ O^{n+2}(\partial\Omega)$ で一意的に存在する．この $r$ を **Fefferman の定義関数**と呼ぶ．

Fefferman の定義関数は次のように具体的に構成することができる．任意の定義関数 $\rho$ をとり定義関数の列 $r_1,r_2,\dots,r_{n+1}$ を

$$r_1=J[\rho]^{-1/(n+1)}\rho,\quad r_k=r_{k-1}\left(1+c_k^{-1}(J[r_{k-1}]-1)\right),\quad k\geq 2, \tag{4.1}$$

で定める．ここで $c_k=k(n+2-k)$．このとき $J[r_k]=1+O^k(\partial\Omega)$ が成り立ち，とくに $r=r_{n+1}$ が Fefferman の定義関数を与える．$k=n+2$ のときには $c_k=0$ となりこの手続きを続けることはできない．実はこの定義関数 $r$ が最良の近似解であることがわかる．

Fefferman の定義関数から $\Omega$ 上の自明な $\mathbf{C}^*$-バンドルの上にローレンツ・ケーラー計量を定義し，その曲率を用いて CR 不変量を構成する．まずこの $\mathbf{C}^*$-バンドルとウェイトを持った

変換則の関係について説明する．双正則変換 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対しその $\mathbf{C}^*$-バンドルへのリフト $\Phi_\#\colon \mathbf{C}^* \times \Omega_1 \to \mathbf{C}^* \times \Omega_2$ を

$$\Phi_\#(z_0, z) = \bigl(z_0 \cdot (\det \Phi'(z))^{-1/(n+1)}, \Phi(z)\bigr)$$

によって定める (すなわち $\Omega$ の標準束の $-1/(n+1)$ 冪を考える)．このときウェイト $w$ をもつ領域汎関数 $L$ に対して $\mathbf{C}^*$-バンドルの汎関数を $L_\#(z_0, z) = |z_0|^{-2w} L(z)$ で定義すれば, 変換則 $L_{\Omega_2} \circ \Phi = |\det \Phi'|^{2w/(n+1)} L_{\Omega_1}$ は $L_{\Omega_2 \#} \circ \Phi_\# = L_{\Omega_1 \#}$ と表される．よってウェイト $w$ の汎関数は $|z_0|^{-2}$ について $w$ 次の $\mathbf{C}^*$-バンドル上の汎関数と同一視される．この $L_\#$ を $L$ のリフトと呼ぶことにする．

Fefferman の定義関数 $r$ はウェイト $-1$ の変換則を満たす ( $r$ には $O^{n+2}(\partial\Omega)$ の任意性があり，このズレは変換則にも現れるが, 暫くはこの点を忘れることにする)．そこでリフト $r_\#(z_0, z) = |z_0|^2 r(z)$ を考え, $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上のローレンツ・ケーラー 計量を

$$g[r] = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{\partial^2 r_\#}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j d\overline{z}_k$$

で定義する．$g = g[r]$ を $\Omega$ に対応する**アンビエント計量**と呼ぶ．$R = R[r]$ を $g$ の曲率テンソル, $R^{(p,q)} = \overline{\nabla}^{q-2} \nabla^{p-2} R$ をその共変微分とする．このとき $R^{(p,q)}$ のいくつかのテンソル積の $g$ に関する完全縮約

$$W_\# = \mathrm{contr}\Bigl(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_m,q_m)}\Bigr), \tag{4.2}$$

ただし $\sum p_l = \sum q_l = 2(m + w)$, を**ウェイト $w$ のワイル不変量**と呼ぶ．さらに同じウェイトをもつワイル不変量の 1 次結合もワイル不変量と呼ぶことにする．ワイル不変量 $W_\#$ は各 $\Omega$ に対して $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上の滑らかな関数 $W_\#[r]$ を与える．この関数は $W_\#[r](z_0, z) = |z_0|^{-2w} W[r](z)$ という表示をもつのでワイル不変量はウェイト $w$ の領域汎関数 $W$ と見ることもできる．

実際にはワイル不変量で与えられる領域汎関数には Fefferman の定義関数 $r$ の選び方の任意性が含まれているので $W[r]$ の $r$ への依存性を調べておく必要がある．

**補題 4.1** ウェイト $w \leq n$ のワイル不変量 $W$ に対して $W[r] \bmod O^{n+1-w}(\Omega)$ は Fefferman の定義関数 $r$ の選び方によらない．

この補題によりウェイト $n$ 以下のワイル不変量の境界値はの CR 不変量をになることがわかる．実はこれらが全てのウェイト $n$ 以下の CR 不変量を与えていることが示される [F3], [BEG].

**定理 4.2** 全てのウェイト $n$ 以下の CR 不変量はワイル不変量の境界値で与えられる．

ベルグマン核および Fefferman の定義関数のウエイトを比較すれば, 定理 4.2 から直ちに次の定理が得られる [F3].

**定理 4.3** 強擬凸領域のベルグマン核は次の展開をもつ:

$$K_\Omega = r^{-n-1} \sum_{k=0}^{n} W_k[r]\, r^k + O(\log r).$$

ここで $W_k$ はウェイト $k$ のワイル不変量, $r$ は $\Omega$ の Fefferman の定義関数である. とくに展開の最初の 3 項は次で与えられる ($W_1 = 0$ となっている):

$$K_\Omega = c_n\, r^{-n-1}\left(1 + c_n' \|R\|^2\, r^2 + O^3(\partial\Omega)\right). \tag{4.3}$$

ここで $c_n$, $c_n'$ は次元 $n$ によって決まる定数である.

**注意** (1) 球でのベルグマン核を思い出せば $c_n = n!/\pi^n$ であることがわかる. さらに $c_n' = (n-2)!/(24\pi^n)$ が §6 で説明する方法で得られる ([HKN] 参照).

(2) 展開 (4.3) は不変式論が提案される以前に Diderich [D] および Christoffers [Ch] によって得られていた. その中では $c_n'$ が零でないことも示されている.

# 5 線形モデル: CR 密度の不変量

定理 4.2 の証明の要点は簡単な線形モデルを使って説明することができる. 以下で説明するモデルは Eastwood-Graham [EG1]で導入されたものであり, CR 密度 (CR densities) の不変量と呼ばれる. 問題の本質的な難しさ (ウェイトの制限の原因となる障害) は全てこのモデルに現れる.

実数 $s$ に対して $\mathcal{E}(s)$ を $e_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^{n+1}$ での実数値 $C^\infty$ 関数の芽 $\varphi(\zeta, \overline{\zeta})$ で $\zeta$ および $\overline{\zeta}$ に関しておのおの $s$ 次斉次, すなわち $Z\varphi = \overline{Z}\varphi = s\,\varphi$, $Z = \sum_{j=0}^n \zeta_j\,(\partial/\partial\zeta_j)$,を満たすもの全体のなすベクトル空間とする. $\mathcal{E}(s)$ は $(h.f)(\zeta, \overline{\zeta}) = f(h^{-1}\zeta, \overline{h^{-1}\zeta})$ により $H$-加群になる. $e_0$ を中心とする座標 $\xi_0 = \zeta_0 - 1, \xi_j = \zeta_j$ に関して $\varphi \in \mathcal{E}(s)$ を展開し

$$\varphi = \sum_{|\alpha|, |\beta| \geq 0} T_{\alpha\overline{\beta}}\, \xi_\alpha\, \overline{\xi}_\beta$$

その係数 $T = (T_{\alpha\overline{\beta}})$ と $\varphi$ を同一視すれば $\mathcal{E}(s)$ は対称テンソルの空間と見ることもできる. $s \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ のときには $H$-加群としての直和分解 $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}_s$, ここで

$$\mathcal{E}^s = \{T : T_{\alpha\overline{\beta}} = 0 \text{ if } |\alpha|, |\beta| > s\}, \quad \mathcal{E}_s = \{T : T_{\alpha\overline{\beta}} = 0 \text{ if } \min(|\alpha|, |\beta|) \leq s\},$$

が成り立つ.

次に $\mathcal{E}(s)$ の各元を二次曲面 $\mathcal{Q} = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : \mu(\zeta, \overline{\zeta}) = 0\}$ に制限して得られる $H$-加群 $\mathcal{J}(s) = \{f|_{\mathcal{Q}} : f \in \mathcal{E}(s)\}$ を考える. $\mathcal{J}(s)$ の元は **CR 密度** (CR density) と呼ばれる (これは CR 標準束の $-s/(n+1)$ 乗の断面に対応する). $\mathcal{Q}$ の座標として $(z_0, z', v) = (\zeta_0, \zeta'/\zeta_0, \mathrm{Im}(\zeta_n/\zeta_0))$ をとれば$f \in \mathcal{J}(s)$ は

$$f = |z_0|^{2s} \sum_{|\alpha|, |\beta|, l \geq 0} A^l_{\alpha\overline{\beta}}\, z'_\alpha \overline{z}'_\beta\, v^l$$

をいうテーラー展開をもつ. $f$ とテーラー係数のリスト $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を同一視すれば $A$ への $H$ の作用 $(h, A) \mapsto h.A$ が得られる. この作用を用いて $\mathcal{J}(s)$ の $H$-不変式を次のように定義する.

**定義 5.1** $A = (A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ を変数とする多項式 $P(A)$ が$\mathcal{J}(s)$ のウェイト $w$ の $H$-不変式であるとは, 全ての $h \in H$ に対して $P(h.A) = |\lambda|^{2w} P(A)$, $h\,e_0 = \lambda\, e_0$, が成り立つときをいう.

CR 不変量の定義では Moser 不変量に現れる変数 $(A^l_{\alpha\overline{\beta}})_{|\alpha|,|\beta|\geq 2, l\geq 0}$ の多項式を考えた．このような多項式は商空間 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}(1)/\mathcal{J}^1$, ここで $\mathcal{J}^1 = \{f|_{\mathcal{Q}} : f \in \mathcal{E}^1\}$, の上の関数と見なすことができる．実際 $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}(1) \to \mathcal{J}_1$ は線形同型を与え，その $H$-作用もほぼ一致する．正確に述べると，$H$-加群 $\mathcal{J}_1$ は $H$-空間 $\mathcal{N}$ の固定点 0 での接空間 $T_0\mathcal{N}$ と同型になる．

そこで CR 不変量の構成問題の線形化モデルとして次の問題を考える．

**問題** $\mathcal{J}_1$ の$H$-不変式を全て構成せよ．

まず簡単な場合として $\mathcal{J}(s)$, $s \notin \mathbf{N}_0$, の $H$-不変量の構成方法を説明する．ローレンツ・エルミート計量 $g_0$ のラプラシアンを

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\zeta_0\partial\zeta_{\overline{n}}} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta_n\partial\zeta_{\overline{0}}} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial\zeta_k\partial\zeta_{\overline{k}}}$$

とする．アンビエント計量の構成のまねをして，与えられた $f \in \mathcal{J}(s)$ に対しラプラス方程式の初期値問題

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{E}(s), \quad \varphi|_{\mathcal{Q}} = f \in \mathcal{J}(s) \tag{5.1}$$

を考える．$m = n + 2s \notin \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$であれば (5.1) は一意的な解をもつ．これは $\mathcal{Q}$ への制限写像

$$\mathcal{H}(s) = \{\varphi \in \mathcal{E}(s) : \Delta\varphi = 0\} \to \mathcal{J}(s) \tag{5.2}$$

が $H$-加群の同型を与えることを示している．したがって $\mathcal{J}(s)$ 上の $H$-不変式の構成は $\mathcal{H}(s)$ 上の $H$-不変式の構成に帰着することができる．

$\mathcal{H}(s)$ の $H$-不変式は簡単に構成することができる．実際，次の形の (計量 $g_0$ に関する) 完全縮約

$$W = \mathrm{contr}\left(T^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes T^{(p_k,q_k)}\right), \quad T^{(p,q)} = (T_{\alpha\overline{\beta}})_{|\alpha|=p,|\beta|=q},$$

はウェイト $w = -s\,k + \sum_{j=1}^k (p_j + q_j)/2$ の $H$-不変式になる．このような $W$ の斉ウェイト一次結合を**ワイル不変式**と呼ぶことにする．このとき表現論の基本的な議論で次の定理が得られる [EG].

**定理 5.2** $s \notin \mathbf{N}_0$ であれば，全ての $\mathcal{H}(s)$ の $H$-不変式はワイル不変式である．

よって $m = n + 2s \notin \mathbf{N}$ (したがって $s \notin \mathbf{N}_0$) であれば $\mathcal{J}(s)$ の $H$-不変式は全てワイル不変式で与えられることがわかる．

この手続きの $\mathcal{J}_1$ の不変量の構成へ摘要を考える．残念ながら $s = 1$ の場合は $m \notin \mathbf{N}$ および $s \notin \mathbf{N}_0$ のどちらの条件も満たさない．

まず方程式 (5.1) を再考する．$m \in \mathbf{N}$ のとき (5.1) の解は一般には存在しない．そこで誤差を許し $\Delta\varphi = O(\mu^{k-1})$ を満たす $\varphi \in \mathcal{E}(s)$ を考える．このような $\varphi$ は次のように構成することができる．$\varphi_1$ を $f$ の $\mathcal{E}(s)$ への任意の拡張とし $\varphi_k$ $(k \geq 2)$ を次のように定義する:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + c_{s,k}^{-1}\,\mu\Delta\varphi_k, \quad c_{s,k} = k(m-k).$$

この手続きは $c_{s,k}\neq 0$ である限り続けることができ, $\varphi=\varphi_m$ が得られ $\Delta\varphi_m=O(\mu^{m-1})$ を満たす. また $\Delta\varphi_m=O(\mu^{m-1})$ を満たす $\varphi$ は mod $O(\mu^m)$ で一意的であることもわかる. $s=1$ の場合, この計算は Fefferman の定義関数の構成法の線形化になっている.

この近似解を用いれば $\mathcal{J}(s)$ および $\mathcal{H}(s)$ の低次ジェットに対する同型を与えることができる. $\|\zeta\|=(|\zeta'|^4+|\zeta_n|^2)^{1/4}$ とおき $\varphi\in\mathcal{E}(s)$ の $O(\|\zeta\|^{2m})$ 同値類を $[\varphi]_m$ と書く; これは $\varphi$ の非斉次 $m$-ジェットと見なせる. $\mathcal{H}(s)$ の $m$ 次ジェット空間を $[\mathcal{H}(s)]_m=\{[\varphi]_m:\varphi\in\mathcal{H}(s)\}$ とおく. $\mathcal{J}(s)$ に対しても同様に $m$ 次ジェット空間 $[\mathcal{J}(s)]_m$ を定義する. このとき $Q$ への制限写像

$$[\mathcal{H}(s)]_m\to[\mathcal{J}(s)]_m \tag{5.3}$$

は同型を与える. とくに $[\mathcal{J}(s)]_m$ の $H$-不変式は $[\mathcal{H}(s)]_m$ の $H$-不変式と一対一に対応する. $s\not\in\mathbf{N}_0$ であれば定理 5.2 によりこのような $H$-不変式はワイル不変式として表わされる.

次に定理 5.2 について考える. この定理の仮定 $s\not\in\mathbf{N}_0$ を外すことはできない. しかし $\mathcal{H}_s=\mathcal{H}(s)\cap\mathcal{E}_s$ を考えれば同様な定理が得られる. この定理の証明は定理 5.2 に比べて格段に難しく, 放物型不変式論の主要結果である [F3], [BEG].

**定理 5.3** 全ての $\mathcal{H}_s$ の $H$-不変式はワイル不変式である.

$s=1$ のときには同型 (5.3) の定義域を $[\mathcal{H}_1]_m$ に制限し, さらに全射 $[\mathcal{J}(1)]_m\to[\mathcal{J}_1]_m$ と合成すると $H$-加群の同型

$$[\mathcal{H}_1]_m\to[\mathcal{J}_1]_m \tag{5.4}$$

が得られる. よって $[\mathcal{J}_1]_m$ の $H$-不変式はこの同型を通して $[\mathcal{H}_1]_m$ のワイル不変式として表わすことができる. とくに $\mathcal{J}_1$ のウェイト $n$ 以下の $H$-不変量は $[\mathcal{J}_1]_m$ にのみ依存すること注意すれば (5.4) により次の定理をえる.

**定理 5.5.** ウェイト $n$ 以下の $\mathcal{J}_1$ の $H$-不変式はワイル不変式で与えられる.

この定理は定理 4.3 の線形化モデルであり, 上記の議論は定理 4.3 の証明の主要部分でもある. 実際, 同型 (5.3) の逆写像が Moser 不変量からアンビエント計量の曲率への対応 $A=(A^l{}_{\alpha\overline{\beta}})\mapsto(R^{(p,q)}[r])_{p,q\geq 2}$ (ここで $r$ は $N(A)$ での Fefferman の近似解) の一次摂動になっている.

# 6 複素モンジュ・アンペール方程式の漸近解

CR 不変量の構成方法を改良するために複素モンジュ・アンペール方程式をより詳しく見てみよう. Cheng-Yau [CY] は複素モンジュ・アンペール方程式の境界値問題

$$J[u]=1 \ \text{ and } \ u>0 \ \text{ in } \Omega; \qquad u=0 \ \text{ on } \partial\Omega. \tag{6.1}$$

の解の一意的な存在を示し, 強擬凸領域には完備アインシュタイン計量 $i\partial\overline{\partial}\log u$ が存在することを証明した. その後, Lee-Melrose [LM] はこの解 $u$ の境界での漸近展開を与えた:

$$u \sim \rho \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \cdot (\rho^{n+1} \log \rho)^k, \quad \eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

ここで $\rho$ は定義関数. これから特に $u \in C^{n+2-\epsilon}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ $(\forall \epsilon > 0)$ であることがわかる.

Cheng-Yau の解 $u$ は大域的な $\Omega$ の形から決まるものなのでこのままでは CR 不変量の構成に利用することはできない. そこで Graham [G1] は $u$ の漸近展開の局所依存性を詳しく解析した. Fefferman の定義関数 $r$ を固定し

$$u^{\mathrm{G}} = r \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{\mathrm{G}} \cdot (r^{n+1} \log r)^k, \qquad \eta_k^{\mathrm{G}} \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

の形の漸近級数で形式的に $J[u^{\mathrm{G}}] = 1$ を満たすものを考える. このような形式解を **Graham の漸近解**と呼ぶことにする. この設定では境界値問題を局所化して初期値問題と考えているため解の一意性は成り立たなくなる.

**定理 6.1** Graham の漸近解の係数 $\eta_k$ は次の性質をもつ:
(i) $\eta_0 = 1 + O^{n+1}(\partial\Omega)$ が成り立ち, さらに任意の $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して $\eta_0 = 1 + a\, r^{n+1} + O^{n+2}(\partial\Omega)$ を満たす漸近解が一意的に存在する.
(ii) $k \geq 1$ に対して $\eta_k \bmod O^{n+1}(\partial\Omega)$ は $a$ によらず境界の Moser 不変量で決定される. さらに $\eta_k$ はmod $O^{n+1}(\partial\Omega)$ でウェイト $k(n+1)$ の変換則を満たす.

特に (ii) より $\eta_k$ の境界値はウェイト $k(n+1)$ の CR 不変量を与えることがわかる. さらに $\eta_k$ のリフト $\eta_{k\#}$ の共変微分 $E^{(p,q)} := \nabla^p \overline{\nabla}^q \eta_{k\#}$ を考えれば完全縮約

$$\mathrm{contr}\Big(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_m,q_m)} \otimes E^{(p_1',q_1')} \otimes \cdots \otimes E^{(p_m',q_m')}\Big)$$

としてさらに多くの CR 不変量を作ることができる. この場合 $\eta_k$ には任意性があるの $p_j', q_j'$ は小さくなければならない. このようにして構成される不変量を ($E^{(p,q)}$ を含まない場合も込めて) **Graham のワイル不変量**と呼ぶ. この一般化により定理 2.1 のウェイト $n$ の壁を少し越えることができる [G2], [HKN], [H].

**定理 6.2** $n = 2$ (または $n \geq 3$) の場合にはウェイト 5 (または $n+2$) 以下の CR 不変量は Graham のワイル不変量である. このウェイトの制限は最良であり, これより大きなウェイトでは Graham のワイル不変量でも表せない CR 不変量が存在する.

この定理を用いればベルグマン核の展開も少し進めることができる. 例えば $n = 2$ の場合, ベルグマン核の対数項の展開

$$\psi^{\mathrm{B}} = c_1\, \eta_1 + c_2 \|R^{(2,4)}\|^2 r + (c_3 \|R^{(2,5)}\|^2 + c_4 \|R^{(3,4)}\|^2) r^2 + O^3(\partial\Omega) \tag{6.2}$$

が得られる [G2], [HKN]. ここで $c_j$ は普遍定数, $\|R^{(p,q)}\|^2$ は $\mathrm{contr}(R^{(p,q)}\otimes R^{(q,p)})$ の形のワイル不変式である.

このGraham による一般化においてもモンジュ・アンペール方程式の局所解の任意性が障害として現れウェイトの制限を完全に取り除くことはできない. 次節ではこの任意性を正確に記述しアンビエント計量から全ての不変量を取り出す方法を与える.

**注意** 展開 (6.2) に現れる普遍定数 $c_j$ は

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{1}{\pi^2}\left(-6,\ \frac{3}{560},\ \frac{61}{70560},\ \frac{3}{3920}\right)$$

である [HKN]. この計算方法 §8 で説明する.

## 7 アンビエント計量の精密化

まず複素モンジュ・アンペール作用素を $\mathbf{C}^*$-バンドルの上に持ち上げる. $(z_0, z) \in \mathbf{C}^* \times \Omega$ に対して $\zeta_0 = z_0, \zeta_j = z_0 z_j$ $(j = 1, \dots, n)$ とおき $\mathbf{C}^* \times \Omega$ 上の微分作用素を

$$J_\#[U] = (-1)^n \det\left(\partial^2 U/\partial\zeta_j\partial\overline{\zeta}_k\right)_{j,k=0,\dots,n}$$

と定義する. このとき $\Omega$ 上の函数 $u(z)$ に対して $u_\#(z_0, z) = |z_0|^2 u(z)$ とおけば $J_\#[u_\#] = J[u]$ が成り立ち, $J_\#$ が $J$ のリフトであることがわかる. ここでは方程式 $J_\#[U] = 1$ の次のような形式的級数解を考える:

$$U = r_\# + r_\# \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (r^{n+1} \log r_\#)^k, \quad \eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

ここで $r$ は $\Omega$ の定義関数, $r_\# = |z_0|^2 r$ はそのリフトである. この $U$ は Graham の漸近解とは次の二点で異なる:

1. $\eta_0 = 1$ と正規化している. $r$ を固定して漸近解を作るのではなく $r$ と $\eta_k$ を同時に構成する. この正規化により $U$ から定義関数 $r$ を一意的に取り出すことが可能となる.

2. 対数項が $\log r_\#$ の形をしている. よって $U$ は底空間の漸近解 $u^{\mathrm{G}}$ のリフト $u^{\mathrm{G}}_\# = |z_0|^2 u^{\mathrm{G}}$ としては表せない. これは下で述べる変換則 (命題 7.2) が成り立つための工夫である.

漸近解 $U$ の存在, 一意性については Graham の漸近解と同様な結果が成り立つ.

**命題 7.1** $N$ を境界 $\partial\Omega$ に横断的な $\overline{\Omega}$ 上の実ベクトル場とする. 任意の $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して $N^{n+2} r|_{\partial\Omega} = a$ を満たす漸近解 $U$ が一意的に存在する.

漸近解 $U$ に対しその滑らかな部分 $r$ は定義関数を与える. これを $r[U]$ と書き

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega} = \{r[U] : U \text{ は } \partial\Omega \text{ での漸近解}\}$$

とおく．この定義関数のクラスは次の意味でウェイト $-1$ の変換則を満たす．

**命題 7.2** 双正則写像 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対して $\Phi^* r = |\det \Phi'|^{-2/(n+1)} r \circ \Phi$ とおく．このとき $\Phi^*\colon \mathcal{F}_{\partial\Omega_2} \to \mathcal{F}_{\partial\Omega_1}$ は全単射を与える．

定義関数 $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ を用いて，§3 と同様に，アンビエント計量 $g[r]$ を作りワイル不変量 $W[r]$ を定義する．このとき定理 4.3 を次のように一般化することができる [H].

**定理 7.3** ウェイト $k$ のワイル不変量 $W_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ が存在し，任意の強擬凸領域 $\Omega$ および任意の $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に対して漸近展開

$$r^{n+1} K_\Omega \sim \sum_{k=0}^{n} W_k[r]\, r^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} W_k[r]\, r^k \log r$$

が成り立つ．

一般にワイル不変量 $W$ に対して $W[r]|_{\partial\Omega}$ は $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に依存し，CR 不変量になるとは限らない．しかし上の漸近展開では $r$ への依存性が和によって相殺されて $r$ に独立な展開になっている．この定理の証明と同様な議論を用いると，任意の CR 不変量 $P$ に対してワイル不変量 $W$ で $P_{\partial\Omega} = W[r]|_{\partial\Omega}$ (右辺は $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ の選び方によらない) を満たすものが存在することがわかる．このように $W[r]|_{\partial\Omega}$ が $r$ に依存しないワイル不変量を $r$-**独立ワイル不変量**と呼ぶことにすれば，次の定理が得られる [H].

**定理 7.4** $r$-独立ワイル不変量の境界値は CR 不変量であり，逆に全ての CR 不変量は $r$-独立ワイル不変量の境界値として与えられる．

これは定理 4.2 からウェイトの制限を取り除いたものである．実際，補題 4.2 の精密化として，$n = 2$ (または $n \geq 3$) の場合，ウェイト 5 (または $n+2$) 以下の ワイル不変量 $W$ は $r$-独立であることが示される．定理 4.2 では $r$-独立性をもつワイル不変量だけを考えと見ることができる．

以下では，このアンビエント計量の精密化の意味を §5 の線形モデルを使って説明する．まず漸近解の線形化としてラプラス方程式の対数項をもつ解を考える．以後 $m = n + 2s \in \mathbf{N}$ と仮定する．

**命題 7.5** 任意の $f \in \mathcal{J}(s)$ に対して $(\varphi, \eta) \in \mathcal{E}(s) \oplus \mathcal{E}(-n-s)$ で

$$\Delta(\varphi + \eta\, \mu^m \log \mu) = 0, \qquad \varphi|_{\mathcal{Q}} = f$$

を満たすものが存在する．$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\eta})$ を同じ条件を満たすものとするとき $(\varphi, \eta) - (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\eta}) = (\mu^m \psi, 0)$ が成り立つ．ここで $\psi \in \mathcal{H}(-n-s)$.

対数項を持つ解の空間 $\left\{(\varphi, \eta) \in \mathcal{E}(s) \oplus \mathcal{E}(-n-s) : \Delta(\varphi + \eta\, \mu^m \log \mu) = 0\right\}$ の $\mathcal{E}(s)$ 成分への射影を $\widetilde{\mathcal{H}}(s)$ とおく．このとき命題 7.4 は次のような $H$-加群の完全系列として表すことができる:

$$0 \to \mu^m \mathcal{H}(-n-s) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(s) \to \mathcal{J}(s) \to 0.$$

これは同型 (5.3) の一般化である．実際，この系列から $m$ 次までの非斉次ジェットを取り出すと $[\mu^m \mathcal{H}(-n-1)]_m = \{0\}$, $[\widetilde{\mathcal{H}}(s)]_m = [\mathcal{H}(s)]_m$ となり (5.3) が得られる．

とくに $s=1$ の場合に $\mathcal{H}_1$ の定義と同様に $\widetilde{\mathcal{H}}_1=\widetilde{\mathcal{H}}(1)\cap\mathcal{E}_1$ と置けば, 完全系列

$$0\to\mu^{n+2}\mathcal{H}(-n-1)\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}_1\to\mathcal{J}_1\to 0$$

が得られる. よって $\mathcal{J}_1$ の $H$-不変式は $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ の $H$-の不変量で $\widetilde{\mathcal{H}}_1\to\widetilde{\mathcal{H}}_1/\mu^{n+2}\mathcal{H}(-n-1)$ の各ファイバー上で一定であるもの (これは $r$-独立性の線形化である) と対応する. 後は $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ の $H$-不変量を決定すればよい.

**定理 7.6** $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ の $H$-不変式はワイル不変式である.

定理 7.3 は展開の係数に現れるのワイル不変量は CR 不変量 ($\mathcal{J}_1$ の $H$-不変式) ではなく $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ の $H$-不変式に対応する不変量である. これは超曲面 $M$ と定義関数 $r\in\mathcal{F}_M$ の対 $(M,r)$ の不変量として定式化される. 定理 7.3 および 7.4 ではこのように不変量のクラスを広げることによりウェイト $n$ の壁を超えることに成功している.

## 8 ベルグマン核の代数解析

上述の議論ではベルグマン核の変換則と局所化可能性だけに注目していた. そのため得られた結果には次元だけによって決まる普遍定数が未決定のまま残されている. この節ではこれらの定数の計算方法を説明する. ここで用いる柏原の理論 [K] は単なる計算の道具だけでなく広い応用をもつ ([HK2] 参照). この節では領域の境界は実解析的であると仮定し, 定義関数を $\rho(z,\overline{z})$ と書く ($z$ と $\overline{z}$ は複素化により独立変数とみなす).

ベルグマン核の再生性 (2.1) はヘビサイド関数 $Y(x)$ を用いて次のように表わすことができる:

$$f(z)=\int_{\mathbf{C}^n}K_\Omega(z,\overline{w})Y(\rho(w,\overline{w}))f(w)d\overline{w}\,dw.$$

これは二つの核関数 $K_\Omega(z,\overline{w})$, $Y(\rho(w,\overline{w}))$ の $\overline{w}$ 変数に関する (ある意味での) 合成が恒等写像を与えていると見なせる. 柏原 [K] はこの表示に注目しベルグマン核を特徴付けるミクロ微分方程式系 (単純ホロノミー系) を与えた. まずこの定理を述べる.

ミクロ微分作用素の一般論によれば $(p,d_z\rho)\in T^*\mathbf{C}^n$ の近傍で定義された任意のミクロ微分作用素 $P=P(z,\partial_z)$ に対して $(\overline{p},d_{\overline{z}}\rho)\in T^*\overline{\mathbf{C}^n}$ の近傍で定義されたミクロ微分作用素 $Q=Q(\overline{z},\partial_{\overline{z}})$ で $(P-Q)Y(\rho(z,\overline{z}))=0$ を満たすものがただ一つ存在する (強擬凸性を用いる). とくに $P(z,\partial_z)$ として $z_1,\dots,z_n,\partial_{z_1},\dots,\partial_{z_n}$ をとれば $2n$ 個の関係式

$$\begin{cases}(z_j-P_j(\overline{z},\partial_{\overline{z}}))Y(\rho(z,\overline{z}))=0,\\(\partial z_j-Q_j(\overline{z},\partial_{\overline{z}}))Y(\rho(z,\overline{z}))=0\end{cases}\quad j=1,\dots,n,$$

が得られる.

**定理 8.1** $P_j,Q_j$ を (2.2) を満たすミクロ微分作用素とするときベルグマン核は

$$\begin{cases}(z_j-P_j^*(\overline{z},\partial_{\overline{z}}))K^{\mathrm{B}}(z,\overline{z})=0,\\(-\partial_{z_j}-Q_j^*(\overline{z},\partial_{\overline{z}}))K^{\mathrm{B}}(z,\overline{z})=0\end{cases}\quad j=1,\dots,n,\tag{8.1}$$

を満たす．ここで $P_j^*, Q_j^*$ は共役作用素を表わす．

**注意** 関係式 $(P(z,\partial_z)-Q(\overline{z},\partial_{\overline{z}}))Y(\rho(z,\overline{z}))=0$ によって与えられる写像 $P\mapsto Q^*$ は $Y(\rho(z,\overline{z}))$ を母関数とする量子化接触変換と呼ばれる．定理 8.1 は $Y(\rho(z,\overline{z}))$ および $K^{\mathrm{B}}(z,\overline{z})$ を母関数とするふたつの量子化接触変換の合成が恒等変換であることを主張している．これが上で述べた核関数の合成の意味である．

ミクロ微分方程式系 (8.1) はベルグマン核の特異性を定数倍を除いて一意的に決定する．よってベルグマン核の解析はこの方程式系の解析に帰着される．

Boutet de Monvel [Bo] は Moser 標準座標を用いて (8.1) の解を与える公式を導いた．Moser の標準座標で $z$ を $\overline{z}$ を独立変数と見れば $N(A)$ は $z_n+\overline{z}_n-z'\cdot\overline{z}'-H(z,\overline{z}')=0$ の形に書くことができる．$H(z,\overline{z}')$ を用いて無限階のミクロ微分作用素をシンボル

$$P(z,\zeta)=\exp(H(z,\zeta'/\zeta_n)\zeta_n)$$

で定義すれば $Y(\rho)=P(z,\partial_z)Y(\rho_0)$ が成り立つ．このときベルグマン核は $P(z,\partial_z)^*$ の逆作用素を用いて

$$K_\Omega=P(z,\partial_z)^{*-1}K_{\Omega_0} \tag{8.2}$$

で与えられる．右辺は代数的な演算だけで求めることができる．

**注意** ここで用いた $P(z,\partial_z)$ は無限階のミクロ微分作用素なので上の演算には注意が必要である．Boutet de Monvel はミクロ微分作用に非斉次オーダーを定義し $P$ を有限階作用素のように扱うことを可能としている．

この公式を用いればベルグマン核の展開 (4.3), (6.2) に現れる普遍定数 $c_k$ を求めることができる [HKN]．これが普遍定数決定の最も高率のよい方法である (と思う)．

Boutet de Monvel は公式 (8.2) の応用としてベルグマン核の領域の変形に関する一次摂動を計算した．Moser 不変量 $A\in\mathcal{N}$ を一つとり曲面の族 $\{N(tA)\}_{t\in\mathbf{R}}$ を考える．$N(tA)$ を境界として含む強擬凸領域のベルグマン核を $K_t(z)$ とする．$K_t$ の原点の近傍での特異性は $N(tA)$ によって決定されることに注意する．このとき $u_t^{\mathrm{B}}=(\pi^n/n!\,K_t)^{-1/(n+1)}(z)$ は領域の (滑らかとは限らない) 定義関数を与える．とくに $t=0$ では $u_0^{\mathrm{B}}=\rho_0$ が成り立つ．

**定理 8.2** 定義関数の族 $u_t^{\mathrm{B}}$ は $J[u_t^{\mathrm{B}}]=1+O(t^2)$ を満たす．

これは mod $O(t^2)$ で見れば $u_t^{\mathrm{B}}$ が複素モンジュ・アンペール方程式の境界値問題の解を与えていること示している．よって (6.1) の解の一意性より $u_t^{\mathrm{MA}}-u_t^{\mathrm{B}}=O(t^2)$ がわかる (正確には局所化を考えているので高次の項には少しずれが出てくる; 定理 6.1 参照)．この結果はベルグマン核と複素モンジュ・アンペール方程式の解が変換則だけでなくもっと密接に関係していることを示唆している．

## 9 共形幾何との関係

CR 幾何と共形幾何との関係はアンビエント計量を用いて記述することができる. $\mathbf{C}^*$-バンドルを $S^1 \times \partial\Omega$ に制限するとアンビエント計量は $S^1 \times \partial\Omega$ 上の実ローレンツ計量を与える. この計量は Fefferman 計量と呼ばれる. Fefferman 計量は $\partial\Omega$ の $\mathbf{C}^n$ への埋め込みによって異なるが, その共形類は CR 構造だけから決定され共形構造を定める. Fefferman 計量の構成はその後 Burns-Diederich-Shneider [BDS] によって一般の非退化 CR 構造に対して拡張されている. さらに $\partial\Omega$ と $\partial\widetilde{\Omega}$ が CR 同値になるための必要十分条件が $S^1 \times \partial\Omega$ と $S^1 \times \partial\widetilde{\Omega}$ の共形同値性であることが示されている.

アンビエント計量の共形構造への一般化は Fefferman-Graham [FG] で与えれている. 共形多様体 $M$ に対して, その計量のクラスのなす $S^2T^*M$ の中の $\mathbf{R}_+$ バンドルを $\widetilde{M}$ を置く時, アンビエント計量は $\widetilde{M} \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上の リッチ平坦・ローレンツ計量として定義される. このアンビエント計量は $M$ が奇数次元のときには漸近的に一意に定まり, そのワイル不変量がすべてのスカラー共形不変量を与える [BEG]. 偶数次元の場合には CR の場合と同様な障害が現れ, アンビエント計量には対数項が含まれる. この場合でも CR の場合と同様な理論展開が可能であると思われる. 実際 Fefferman の共形構造に附随するアンビエント計量はこの論説で説明した $\mathbf{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上のアンビエント計量と一致する. この場合 $\widetilde{M} = \mathbf{C}^* \times \partial\Omega$ が $M = S^1 \times \partial\Omega$ 上の $\mathbf{R}_+$-バンドルになっている.

一方 Cartan 接続から共形不変量を構成する方法として Bailey-Eastwood-Gover [BEGo] は Tractor Calculus という計算方法を提案している. これは Cartan バンドルに附随するベクトル・バンドル上の接続を用いてワイル不変量を構成する方法である. Gover [Go1] は Tractor Calculus を用いて殆ど全ての (奇数次元の場合は全ての) スカラー共形不変量が ワイル不変量として構成できることを示した. この手法の特徴はウェイトが高い不変量の構成（計量の高次の微分を含む不変量）に有効であることである. 一方, アンビエント計量構成法は障害にあたるまでのウェイトの低い不変量の構成に有効である. よってこの二つの方法はお互いに補完するところがあると思われる. この理論の CR 幾何への翻訳も進められている [Go2].

### 文 献

[Ba] T. N. Bailey, Parabolic invariant theory and geometry, in “The Penrose Transform and Analytic Cohomology in Representation Theory”, Contemp. Math., 154, pp. 169–180, Amer. Math. Soc., 1993

[BEGo] T. N. Bailey T.N., M. G. Eastwood and A. R. Gover, The Thomas structure bundle for conformal, projective and related structures, *Rocky Mtn. J. Math.,* **24** (1994), 1–27

[BEGr] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariant theory for conformal and CR geometry, Ann. of Math. **139** (1994), 491–552

[Bo] L. Boutet de Monvel, Complément sur le noyau de Bergman, Séminaire EDP, École Polytech. Exposé n° XX 1985–86

[BS] D. Burns and S. Shnider, Projective connection in CR geometry, Manuscripta Math. **33** (1980), 1–26

[Ch] H. Christoffers, Thesis, Univ. of Chicago, 1980

[CY] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation , Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 507–544

[CS] S. S. Chern and S. Ji, On the Riemann mapping theorem, Ann. of Math. **144** (1996), 421–439

[CM] S. S. Chern and J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. **133** (1974), 219–271

[D] K. Diederich, Some recent developments in the theory of the Bergman kernel function: a survey, *in* "Several complex variables," Proc. Sympos. Pure Math. **30,1**, pp. 127–137, Amer. Math. Soc., 1977

[E] M. G. Eastwood, Variations on the de Rham complex. Notices Amer. Math. Soc. 46 (1999), 1368–1376

[EG] M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariants of CR densities, Proc. Sympos. Pure Math. **52**, part 2 (1991), 117–133.

[E] V. Ezhov, Triviality of scalar linear type isotropy subgroup by passing to an alternative canonical form of a hypersurface. Complex analysis and applications (Warsaw, 1997). Ann. Polon. Math. **70** (1998), 85–97.

[F1] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65

[F2] C. Fefferman, Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, Ann. of Math. **103** (1976), 395–416

[F3] C. Fefferman, Parabolic invariant theory in complex analysis, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262

[FG] C. Fefferman and C. R. Graham, Conformal invariants, in "Élie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd'hui", Astérisque, hors série (1985), 95–116

[Go1] R. Gover, Invariant theory and calculus for conformal geometries, preprint

[Go2] R. Gover, Aspects of parabolic invariant theory, The 18th Winter School "Geometry and Physics" (Srni, 1998) Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 59, (1999), 25–47.

[Gr1] C. R. Graham, Scalar boundary invariants and the Bergman kernel, in "Complex Analysis II", Lecture Notes in Math., 1276, pp. 108–135, Springer, 1987

[Gr2] C. R. Graham, Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation, Compositio Math. **64** (1987), 133–155

[Gr3] C. R. Graham, Invariant theory of parabolic geometries, in "Complex Geometry", Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 143, pp. 53–66, Dekker, 1993

[Hi1] K. Hirachi, The second variation of the Bergman kernel of ellipsoids, Osaka J. Math. **30** (1993), 457-473

[Hi2] K. Hirachi, Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel, Ann. of Math. **151** (2000), 151-191

[Hi3] K. Hirachi, CR invariants of weight 6, preprint

[HKN] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, CR invariants of weight five in the Bergman kernel, Adv. in Math. **143** (1999), 185–250.

[Hö] L. Hörmander, $L^2$ estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152

[Kas] M. Kashiwara, Analyse micro-locale du noyau de Bergman, Séminaire Goulaouic-Schwartz, École Polytech. Exposé n° VIII 1976–77

[Ku] M. Kuranishi, PDEs associated to the CR embedding theorem, in "Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997)", 129–157, Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999

[LM] J. Lee and R. Melrose, Boundary behaviour of the complex Monge- Ampère equation, Acta Math. **148** (1982), 159–192

[T] N. Tanaka, On the equivalence problem associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan **17** (1965), 103–139

[T2] N. Tanaka, On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan J. Math. **2** (1979), 131–190