

局所体上のリジッド空間の ℓ 進コホモロジーへの Weil 群の作用について

東京大学大学院数理科学研究科 三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

0 はじめに

本稿の目標は、局所体上のリジッド空間のコンパクト台エタールコホモロジーに現れる Galois 表現について最近得られた結果 ([M1], [M2]) を報告することである。このような Galois 表現は局所 Langlands 対応との関係 ([Ca]) もあり数論的に興味深い対象であると思われる。

K を局所体、すなわち剰余体 F が有限体 \mathbb{F}_q であるような完備離散付値体とし、 ℓ を q と互いに素な素数とする。 K, F の分離閉包をそれぞれ \bar{K}, \bar{F} と書く。 $\text{Fr}_q \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ を F の幾何学的 Frobenius 元 (q 乗写像の逆写像) とし、 Fr_q で生成される部分群 $\langle \text{Fr}_q \rangle \subset \text{Gal}(\bar{F}/F)$ の自然な全射 $\varphi: \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F)$ による逆像を W_K とおく。 W_K は K の Weil 群と呼ばれる。さらに、 $\sigma \in W_K$ に対し $n(\sigma) \in \mathbb{Z}$ を $\varphi(\sigma) = \text{Fr}_q^{n(\sigma)}$ となるよう定め、 $W_K^+ = \{\sigma \in W_K \mid n(\sigma) \geq 0\}$ と定義する。

X を K 上の準コンパクトかつ分離的なリジッド空間とすると、コンパクト台エタールコホモロジー $H_c^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を定義することができる ([Hu3], [Hu5])。これは $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の表現となり、したがって W_K の表現となる。主定理は次の通りである。

定理 0.1

次の 2 条件のうちのいずれかを仮定する：

- X は K 上滑らかである。
- K の標数は 0 である。

このとき、任意の $\sigma \in W_K^+$ に対して次が成立する：

- ([M1, Theorem 1.1]) σ の $H_c^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用 σ_* の固有値は代数的整数である。さらに、各固有値 α に対して非負整数 m が存在して、任意の体同型 $\iota: \bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ に対して $|\iota(\alpha)| = q^{m/2}$ となる。
- ([M2, Theorem 1.1]) σ_* の跡の交代和 $\sum_{i=0}^{2 \dim X} (-1)^i \text{Tr}(\sigma_*; H_c^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である。

i) は有限体上のスキームに対する Weil 予想の類似であり、実際それに帰着することで証明される。ii) は ℓ 独立性と呼ばれる性質である。局所体上のスキームに対するこれらの性質は落合氏により得られている ([Oc, Proposition 2.1, Theorem 2.4]。この場合滑らかさおよび K の標数に対する仮定は不要である)。[Oc] では de Jong の alteration ([dJ]) と次元の帰納法を組み合わせることにより性質 i), ii) を導いているが、リジッド空間の底空間

は Noether 空間ではないため、この証明をそのまま転用することはできない。[M2] では斎藤毅氏による ℓ 独立性に関するより強い結果 ([Sa]) の証明を参考にすることで ii) を証明している。

主定理の i) と ii) を比較すると、i) の証明の方がはるかに簡単である。そのため、本稿では ii) の証明を重点的に紹介することにし (§1, 2), i) については最後の補足 (§3) において軽く触れることにした。

記号 上でも既に述べたように、 K を局所体、 $F = \mathbb{F}_q$ をその剰余体とする。また、 \mathcal{O}_K を K の整数環とする。 ℓ は常に q と素な素数を表すものとする。

K 上のリジッド空間とは $\text{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$ 上局所有限型の adic 空間を指すものとする。adic 空間についての詳細は [Hu1], [Hu2], [Hu3] などを参照されたい。 K 上位相的有限生成である位相環 A に対して、 $\text{Spa}(A, A^\circ)$ を $\text{Sp} A$ と書くことにする。

$A \rightarrow B$ を環準同型とし X を A 上のスキームとすると、 $X_B = X \times_{\text{Spec} A} \text{Spec} B$ とする。特に \mathcal{O}_K 上のスキーム X に対し X_K は X の一般ファイバーを、 X_F は X の特殊ファイバーを表す。

スキームはイタリック書体 (例: X) で、形式スキームはカリグラフィック書体 (例: \mathcal{X}) で、リジッド空間はサンセリフ書体 (例: X) で表すことにする。

1 ℓ 独立性の証明：滑らかな場合

本節では、主定理の ii) の部分について、まず X が K 上滑らかな場合の証明を説明する。

1.1 代数化可能な場合への帰着

次の定理により、 K 上滑らかなリジッド空間は局所的に代数化可能であることが分かる：

定理 1.1

X を K 上滑らかなリジッド空間とする。このとき、任意の $x \in X$ に対して、準コンパクトな x の開近傍 $U \subset X$ および \mathcal{O}_K 上有限型かつ滑らかな一般ファイバーを持つスキーム U が存在して、 $U \cong (U^\wedge)^{\text{rig}}$ となる。ここで $^\wedge$ は特殊ファイバーに沿った完備化、 $^{\text{rig}}$ は Raynaud 一般ファイバーを表す。

このような U を代数化可能なリジッド空間と呼ぶことにする。

定理 1.1 は位相環に対する次の命題から従う：

命題 1.2

A を K 上位相的有限生成である位相環とし、 $f_1, \dots, f_n \in A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ とする。さらに $\det(\partial f_i / \partial T_j)$ は $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (f_1, \dots, f_n)$ で可逆であるとする。このとき $0 \in A$ のある開近傍 V が存在して、 $g_1, \dots, g_n \in A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ が $g_i \in f_i + V$ を満たすならば次の 2 つが成立するようにできる：

- $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (f_1, \dots, f_n) \cong A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (g_1, \dots, g_n)$ (位相環として).
- $\det(\partial g_i / \partial T_j)$ は $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (g_1, \dots, g_n)$ で可逆.

命題の証明は [Hu3, Proposition 1.7.1] 参照. 命題を認めて定理を示そう. K 上滑らかなリジッド空間は局所的には

$$\mathrm{Sp} K\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (f_1, \dots, f_m) \quad (m \leq n)$$

という形であるから, $A = K\langle T_{m+1}, \dots, T_n \rangle$ として命題 1.2 を適用すると, 多項式 $g_1, \dots, g_m \in K\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ が存在して

- $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (f_1, \dots, f_m) \cong A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (g_1, \dots, g_m)$,
- $\det(\partial g_i / \partial T_j)$ は $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (g_1, \dots, g_m)$ で可逆

となることが分かる. 分母を払うことで $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}_K$ としてよい. k を十分大きくとり, $U = \mathrm{Spec} \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}] / (g_1, \dots, g_m, T_{n+1} \Delta - \pi^k)$ とすれば定理の条件を満たす ($\Delta = \det(\partial g_i / \partial T_j)$ とおいた).

この命題により, K 上滑らかな準コンパクトリジッド空間 X に対して, 有限個の代数化可能なリジッド開部分空間 U_1, \dots, U_n からなる開被覆が存在する. さらに次の補題により, これらのうちいくつかの交わり $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ もまた代数化可能であることが分かる:

補題 1.3

X を代数化可能な準コンパクトリジッド空間とし, U をその準コンパクト開部分空間とする. このとき, U も代数化可能である.

証明 \mathcal{O}_K 上有限型で一般ファイバーが滑らかであるようなスキーム X の完備化 X^\wedge として表される形式スキームを「代数化可能」と呼ぶことにする. 次の 3 点に注意すればよい:

- 代数化可能な形式スキームの認容ブローアップは代数化可能 (認容イデアルが代数的であるため).
- 代数化可能な形式スキームの開部分スキームは代数化可能 (易しい).
- リジッド空間 $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ (\mathcal{X} は $\mathrm{Spf} \mathcal{O}_K$ 上有限型の形式スキーム) の準コンパクト開部分空間 U に対し, 認容ブローアップ $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ および開部分形式スキーム $U \subset \mathcal{Y}$ が存在して, $U^{\mathrm{rig}} \cong U$ ([BL, Lemma 4.4]).

したがって, 開被覆 $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ についての Čech スペクトル系列

$$E_1^{-s,t} = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} H_c^t((U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_s})_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \implies H_c^{-s+t}(X_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

において, E_1 項には代数化可能なリジッド空間しか現れない. このことから, ℓ 独立性は X が代数化可能である場合に帰着することができる.

次の定理の通り、代数化可能なリジッド空間のコンパクト台エタールコホモロジーは隣接サイクル $R\psi Q_\ell$ を用いて表すことができる：

定理 1.4 ([Hu3, Theorem 5.7.6])

X を \mathcal{O}_K 上有限型であるスキームとするとき、次の $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ 同変な同型がある：

$$H_c^i((X^\wedge)_{\bar{K}}^{\text{rig}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H_c^i(X_{\bar{F}}, R\psi Q_\ell).$$

注意 1.5

右辺 $H_c^i(X_{\bar{F}}, R\psi Q_\ell)$ は X が \mathcal{O}_K 上固有ならば一般ファイバーの (コンパクト台) コホモロジー $H_c^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と同型であるが、一般にはこの2つは同型にはならない。例えば、 X の特殊ファイバーが空である場合には前者は0であるが後者は0になるとは限らない。

なお、この定理はスキームのエタールコホモロジーとリジッド空間のエタールコホモロジーの比較定理の最も本質的な部分である (まずこの定理を証明し、 X が \mathcal{O}_K 上固有である場合は上記の同型と組み合わせることで比較定理を示す。固有でない場合は例えば Deligne のトリックを使って固有の場合に帰着する)。

以上より、主定理 ii) は次の純代数幾何的な定理に帰着されたことになる：

定理 1.6

X を \mathcal{O}_K 上有限型で一般ファイバーが滑らかであるようなスキームとする。このとき、任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し、 $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\sigma_*; H_c^i(X_{\bar{F}}, R\psi Q_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である。

1.2 強準安定スキームへの帰着

ここでは、de Jong の alteration により定理 1.6 を X が \mathcal{O}_K 上強準安定である場合に帰着することを考える。ただしスキーム X が \mathcal{O}_K 上強準安定であるとは、Zariski 局所的に $\text{Spec } \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n]/(T_0 \cdots T_r - \pi)$ (π は K の素元, $0 \leq r \leq n$) 上エタールであることをいう。

この帰着を行うためには、定理 1.6 を次のように代数的対応付きの場合に一般化しておくのがよい：

定理 1.7

X を \mathcal{O}_K 上有限型であるスキームとし、一般ファイバーが純 d 次元かつ滑らかであると仮定する。 Γ を $X \times_{\mathcal{O}_K} X$ の閉部分スキームで合成 $\Gamma \hookrightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} X \xrightarrow{\text{pr}_1} X$ が固有であり、一般ファイバーが純 d 次元であるものとする。このとき、任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し、 $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^* \circ \sigma_*; H_c^i(X_{\bar{F}}, R\psi Q_\ell))$ は ℓ に依存しない有理数である。

注意 1.8

合成 $\Gamma \hookrightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} X \xrightarrow{pr_i} X$ を p_i と書くと, Γ^* は

$$\begin{aligned} R\Gamma_c(X_{\overline{F}}, R\psi_X \mathbb{Q}_\ell) &\xrightarrow{(*)} R\Gamma_c(\Gamma_{\overline{F}}, p_1^* R\psi_X \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow R\Gamma_c(\Gamma_{\overline{F}}, R\psi_\Gamma \mathbb{Q}_\ell) = R\Gamma_c(X_{\overline{F}}, Rp_{2!} R\psi_\Gamma \mathbb{Q}_\ell) \\ &\longrightarrow R\Gamma_c(X_{\overline{F}}, R\psi_X Rp_{2!} \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow R\Gamma_c(X_{\overline{F}}, R\psi_X \mathbb{Q}_\ell) \end{aligned}$$

が H_c^i に誘導する射として定義される. $(*)$ を定義するために p_1 が固有であるという仮定が必要である.

注意 1.9

定理 1.7 で $\Gamma = \Delta_X$ とすることで定理 1.6 が従う. なお, 後に述べるように (補足参照 主定理 i) は ii) よりも容易に証明できるので, ここでは σ_* の固有値が代数的整数であることは既に得ていると想定している. このため, 跡の交代和が有理数であることさえ証明できれば定理 1.6 の「整数」の部分は自動的に従う.

注意 1.10

X が \mathcal{O}_K 上固有である場合の定理 1.7 は斎藤毅氏の結果 ([Sa, Theorem 0.1]) に他ならない.

定理 1.7 は [Sa, §3] と類似の方法によって X が強準安定な場合にほぼ帰着できる. 概要は次の通りである. [dJ, Theorem 6.5] より, 体の有限次拡大 $L \supset K$, \mathcal{O}_L 上の強準安定スキーム Y および alteration $f: Y \rightarrow X$ が存在する. L 内での K の非分離閉包を K' とし, K を K' に, X を $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$ に置き換えることで $L \supset K$ は分離拡大であるとしてよい. さらに [Sa, Lemma 1.11] により $L \supset K$ は Galois 拡大であるとしてよい. L の剰余体を E とおく.

$\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対し, $Y^\tau = Y \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L / \sigma$ とし, $f^\tau: Y^\tau \rightarrow X$ を f によって誘導される射とする. このとき,

$$(Y_K)_L = \prod_{\tau \in \text{Gal}(L/K)} Y_L^\tau, \quad H_c^i(Y_{\overline{F}}, R\psi \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\tau \in \text{Gal}(L/K)} H_c^i(Y_E^\tau, R\psi \mathbb{Q}_\ell)$$

となる.

$\Gamma_K \subset X_K \times X_K$ の $f_K \times f_K$ での「引き戻し」を Γ'_K とする (厳密には Fulton-MacPherson による refined Gysin map を用いる. [Ful, §6, §8] 参照). これは $Y_K \times Y_K$ のサイクルである. Γ'_K を L へ底変換することで, $(Y_K \times Y_K)_L = \prod_{\tau, \tau' \in \text{Gal}(L/K)} Y_L^\tau \times Y_L^{\tau'}$ のサイクル Γ'_L が得られる. これの (τ, τ') 成分の $Y^\tau \times Y^{\tau'}$ における閉包を $\Gamma'_{\tau, \tau'}$ とおく.

このとき, $\sigma \in W_K^+$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^* \circ \sigma_*; H_c^i(X_{\overline{F}}, R\psi \mathbb{Q}_\ell)) \\ = \frac{1}{\deg f} \sum_{\tau \in \text{Gal}(L/K)} \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma'_{\sigma\tau, \tau} \circ \sigma_*; H_c^i(Y_E^\tau, R\psi \mathbb{Q}_\ell)). \end{aligned}$$

したがって、定理 1.7 は次の定理に帰着される ($X = Y^\tau$ として適用) :

定理 1.11

L を K の Galois 拡大とし, $\sigma \in W_K^+$ とする. X を \mathcal{O}_L 上有限型であるスキームとし, 一般ファイバーが純 d 次元かつ滑らかであると仮定する. Γ を $X^\sigma \times_{\mathcal{O}_L} X$ の閉部分スキームで合成 $\Gamma \hookrightarrow X^\sigma \times_{\mathcal{O}_L} X \xrightarrow{\text{Pr}_1} X^\sigma$ が固有であり, 一般ファイバーが純 d 次元であるものとする. このとき, $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^* \circ \sigma_*; H_c^i(X_{\overline{F}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない有理数である.

1.3 強準安定の場合 : ウェイトスペクトル系列の類似

X が強準安定の場合には, 隣接サイクルコホモロジーは次のスペクトル系列によって記述することができる :

定理 1.12

X を \mathcal{O}_K 上強準安定である相対純 d 次元スキームとし, D_1, \dots, D_m を $X_{\overline{F}}$ の既約成分とする. $\{1, \dots, m\}$ の部分集合 I に対し $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ とおき, 非負整数 p に対し $D^{(p)} = \coprod_{I \subset \{1, \dots, m\}, \#I=p+1} D_I$ とおく. このとき, 次のスペクトル系列がある :

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \geq \max(0, -s)} H_c^{t-2i}(D_{\overline{F}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)) \implies H_c^{s+t}(X_{\overline{F}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell). \quad (*)$$

このスペクトル系列は偏屈層 $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ のモノドロミーフィルトレーションを用いて構成することができる. モノドロミーフィルトレーションは惰性群 I_K の $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ への作用を用いて [Sa, §2.1, 2.2] で定義されている.

注意 1.13

スペクトル系列 (*) はウェイトスペクトル系列 ([RZ], [Sa]) の類似であるが, E_1 項は純ではなく, 収束先に定まるフィルトレーションはウェイトフィルトレーションとは異なる. また, このスペクトル系列は $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ のモノドロミーフィルトレーションを用いて構成されるが, 収束先に定まるフィルトレーションはモノドロミーフィルトレーションとも異なる.

[Sa, Proposition 2.20] と同様, スペクトル系列 (*) に対しても代数的対応の作用についての関手性を証明することができる :

定理 1.14 ([M2, Theorem 5.5.3])

X, D_i 等を定理 1.12 の通りとする. また, X' を別の相対純 d' 次元の準安定スキームとし, これに対しても D'_i 等を同様に定める. Γ を $X \times_{\mathcal{O}_K} X'$ の閉部分スキームで一般ファイバーが純 d' 次元であるものとし, 合成 $\Gamma \hookrightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} X' \xrightarrow{\text{Pr}_1} X$ が固有であると仮定する. このとき, 各非負整数 p に対して $D^{(p)} \times D'^{(p)}$ の純 $d' - p$ 次元閉部分スキーム

$\Delta \Gamma^{(p)}$ で合成 $\Gamma^{(p)} \hookrightarrow D^{(p)} \times D^{(p)} \xrightarrow{\text{Pr}_1} D^{(p)}$ が固有であるものが存在して、次のようなスペクトル系列間の準同型が構成できる：

$$\begin{array}{ccc} E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \geq \max(0, -s)} H_c^{t-2i}(D_{\overline{F}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)) & \Longrightarrow & H_c^{s+t}(X_{\overline{F}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell) \\ \downarrow \oplus \Gamma^{(s+2i)*} & & \downarrow \Gamma^* \\ E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \geq \max(0, -s)} H_c^{t-2i}(D'_{\overline{F}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)) & \Longrightarrow & H_c^{s+t}(X'_{\overline{F}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell). \end{array}$$

この定理が ℓ 独立性の証明において最も本質的な部分である。大まかな方針は [Sa] と同様、引き戻し、カップ積、押し出しの 3 つに分けてそれぞれについて関手性を証明するというものであるが、次に挙げるような変更点がある：

- 代数的対応に「第一射影との合成が固有である」という条件が付くため、全空間の Chow 群の中で考えるのではなく、ある程度台についての情報を覚えておく必要がある。例えば上記定理中の代数的対応 $\Gamma^{(p)}$ を定義するのに refined Gysin map および局所化された Chern 指標を用いる必要がある。
- X が \mathcal{O}_K 上固有でない場合は射影 $X \times_{\mathcal{O}_K} X \rightarrow X$ は固有になるとは限らない。コンパクト台コホモロジーは固有射でないとき引き戻せないので、部分的に台の条件を課した「部分台コホモロジー」を考え、その場合にもウェイトスペクトル系列の類似を構成し、引き戻しについての関手性を証明する必要がある。
- カップ積との可換性についても定式化を変更する必要がある。[M2] では、特殊ファイバーのコホモロジー類のみに注目して議論を行っている。

詳細は [M2] を参照されたい。

さて、定理 1.14 により、隣接サイクルコホモロジーへの代数的対応の作用は E_1 項では有限体上滑らかなスキームのコンパクト台コホモロジーへの代数的対応の作用となる。また、 σ_* は E_1 項ではある代数的対応の作用と $\bar{\sigma}_*$ の合成になる ($\bar{\sigma}$ は $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)$ での σ の像)。 $\text{Fr}_X: X \rightarrow X$ を q 乗 Frobenius 射とすると $\bar{\sigma}_* = (\text{Fr}_X^*)^{n(\sigma)}$ であるから、結局 $\Gamma^* \circ \sigma_*$ はある代数的対応の作用としてスペクトル系列 (*) の E_1 項に現れる。このことから、定理 1.11 は有限体上の滑らかなスキームについての次の定理に帰着される：

定理 1.15

X を F 上滑らかな純 d 次元スキームとする。 Γ を $X \times X$ の純 d 次元閉部分スキームとし、 $\Gamma \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\text{Pr}_1} X$ が固有であると仮定する。このとき、 $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^*; H_c^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない有理数である。

証明 $\Gamma^{(n)} = (\text{Fr}_X^n \times 1)_*(\Gamma)$ とおく。藤原氏の跡公式 ([Fuj, Proposition 5.3.4, Proposition 5.4.1]. [Var] も参照されたい) により、ある自然数 N が存在して、 $n \geq N$ のとき

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^* \circ (\text{Fr}_X^n)^n; H_c^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \text{deg}(\Delta_X \cap \Gamma^{(n)})$$

が成立する ($\Delta_X \cap \text{Fr}_X^n(\Gamma)$ が n が十分大きいとき F 上固有になることも証明できる). 右辺は ℓ に依存しない整数であるから左辺もそうである. あとは Γ^* と Fr_X^* が可換であることに注目すると容易に Γ^* についての ℓ 独立性がいえる (Fr_X^* の固有値は p 進付値が 0 であるとは限らないため, $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^*; H_c^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))$ が整数であることはこの議論からは証明できない. $\mathbb{Z}[1/p]$ に属することはいえる). ■

注意 1.16

実はこの定理における $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\Gamma^*; H_c^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は整数であることが証明できる (したがって定理 1.7 の「有理数」も「整数」とできる). しかし書かれた証明は現在のところ Bloch-Esnault によるモチヴィックコホモロジーを用いるもの ([BE, Proposition 3.4]. この論文では X がよいコンパクト化を持つ場合にのみ証明しているが, 一般の場合は alteration によってその場合に帰着できる) しかないようであり, また主定理の証明のためには「有理数」でも問題がないこともあり, ここでは割愛した.

以上で X が K 上滑らかな場合の証明が完結した.

2 ℓ 独立性の証明 : 一般の場合

以下では K の標数が 0 であると仮定し, 主定理 ii) を一般の X に対して証明する.

2.1 Huber の有限性定理とその応用

一般の場合の証明の鍵となるのは, 次に述べる Huber の有限性定理である :

定理 2.1 ([Hu4, Theorem 2.1])

X, Y を K 上のリジッド空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を準コンパクトかつ分離的な射とする. $\text{char } K = 0, \dim Y \leq 1$ であると仮定する. このとき, X 上の準構成可能 \mathbb{Z}/ℓ^n 加群層 F に対し, $R^i f_! F$ は Y 上の準構成可能 \mathbb{Z}/ℓ^n 加群層である.

準構成可能加群層については [Hu4, Definition 1.1] 参照. 定数層 \mathbb{Z}/ℓ^n は準構成可能 \mathbb{Z}/ℓ^n 加群層である. K の標数についての仮定は p 進 Riemann の存在定理を用いるために必要である. なお, $\dim Y \geq 2$ の場合は上記定理には反例がある ([Hu4, Example 2.2]).

この定理から次の重要な結果が導かれる :

系 2.2 ([Hu4, Corollary 2.7])

$\text{char } K = 0$ とする. X を K 上準コンパクトかつ分離的なリジッド空間, $Y \subset X$ をその解析的閉部分空間とし $U = X \setminus Y$ とする. さらに $\varepsilon \in |K^\times|$ に対し開集合 $U(\varepsilon) \subset U$ を X から Y の「太さ ε の閉管状近傍」を除いたもの (正確な定義は [Hu4, 2.6] 参照. そこでは $Q(\varepsilon)$ という記号が用いられている) とする. U は準コンパクトとは限らないが $U(\varepsilon)$ は準コンパクトである.

このとき、各 l に対して実数 $\varepsilon_l > 0$ が存在して、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ ならば自然な準同型 $H_c^i(U(\varepsilon)_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は同型である。

証明 まず \mathbb{Q}_l 係数の代わりに \mathbb{Z}/l 係数で証明すれば十分であることに注意する (\mathbb{Z}/l 係数で同型ならば \mathbb{Z}/l^n 係数でも同型であることが帰納的に分かる)。このときはまず Y が大域的な定義方程式を持つ場合に帰着する。さらに、ブローアップすることで Y が 1 つの方程式 f で定義されている場合に帰着する。 f は準コンパクトかつ分離的な射 $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$ を誘導し、 $0 \in \mathbb{A}^1$ のファイバーが Y となる。定理 2.1 より $F = R^i f_* \mathbb{Z}/l$ は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $\mathbb{B}(\varepsilon) \setminus \{0\}$ 上局所定数層になる。このような F に対し $H_c^i(\mathbb{D}(\varepsilon)_{\overline{K}} \setminus \{0\}, F) = 0$ となることが証明でき、系はこれより従う (ここで $\mathbb{B}(\varepsilon)$ は半径 ε の開円板 (境界の ある 円板)、 $\mathbb{D}(\varepsilon)$ は半径 ε の閉円板 (境界の ない 円板) を表す)。 ■

系 2.3

$\text{char } K = 0$ とする。 X を K 上準コンパクトかつ分離的なリジッド空間、 $Y \subset X$ をその解析的閉部分空間とし $U = X \setminus Y$ とするとき、次の長完全系列がある：

$$\cdots \rightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^{i+1}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow \cdots$$

証明 まず \mathbb{Z}/l^n 係数の場合、[Hu3, Remark 5.5.11 iv)] より完全系列

$$\cdots \rightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow H_c^{i+1}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow \cdots$$

がある。さらに定理 2.1 より $H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)$, $H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)$ は有限生成 \mathbb{Z}/l^n 加群であり、したがって $H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)$ も有限生成 \mathbb{Z}/l^n 加群である。これより射影系 $\{H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)\}_n$, $\{H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)\}_n$, $\{H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)\}_n$ は Mittag-Leffler 条件を満たすことが分かり、

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \varprojlim_n H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) &\rightarrow \varprojlim_n H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow \varprojlim_n H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \\ &\rightarrow \varprojlim_n H_c^{i+1}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

の完全性が従う。

一方、[Hu5, Theorem 3.3] より $H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \cong \varprojlim_n H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n)$ である (これは定義ではない。証明には系 2.2 が必要である)。また、[Hu5, Theorem 3.1] より X, Y についても同様のことが成立する。したがって

$$\cdots \rightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow H_c^{i+1}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow \cdots$$

が完全系列であることが分かり、 \mathbb{Q}_l をテンソルすることで求める完全系列を得る。 ■

注意 2.4

リジッド空間上の ℓ 進層のコンパクト台コホモロジーは取り扱いに注意を要する. 例えば, X を K 上固有なリジッド空間とし, $j: U \hookrightarrow X$ をその開部分空間とするとき, $H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(X_{\overline{K}}, j_! \mathbb{Q}_\ell)$ となるとは限らない. $X = \mathbb{P}^1$, $U = \Omega^1$ (Drinfeld 上半平面. \mathbb{P}^1 から K 有理点を全て除いたもの) の場合が反例であることが [Hu5, Example 2.7] に書かれている. なお, この例においても $H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n) \cong H^i(X_{\overline{K}}, j_! \mathbb{Z}/\ell^n)$ は成立する.

2.2 ℓ 独立性の証明

前小節の結果を用いて ℓ 独立性を $\dim X$ についての帰納法で証明しよう. X は被約であるとよい. このとき, X の特異点全体のなす解析的閉部分集合を Y とすると, $\dim Y < \dim X$ が成立する. $U = X \setminus Y$ とおくとこれは準コンパクトとは限らないが滑らかなリジッド空間である. 系 2.3 と帰納法の仮定から, U について ℓ 独立性を示せば十分である.

ℓ, ℓ' を q と互いに素な 2 つの素数とし, $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell'})$, $U' = U(\varepsilon_0)$ とする. このとき

$$H_c^i(U'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell), \quad H_c^i(U'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_{\ell'}) \xrightarrow{\sim} H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_{\ell'})$$

である. また, U' は K 上準コンパクトかつ滑らかであるから, 既に証明した場合より任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\sigma_*; H_c^i(U'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ と $\sum_i (-1)^i \text{Tr}(\sigma_*; H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ はともに整数であり, 一致する. これより U についての ℓ 独立性が直ちに従い, 証明が完了する.

3 補足

最後に, 主定理の i) の部分について簡単に述べる. 基本的な方針は ii) と同様であるが, 次のような理由でより簡単に証明できる:

- i) は各固有値についての主張であるから, スペクトル系列の E_1 項が有限個を除いて消えている必要はなく (ℓ 独立性の場合は跡についての主張であるから E_1 項「全て」にわたり跡の交代和をとる必要があった), したがってコホモロジー降下のスペクトル系列が利用できる.
- i) は体を拡大して証明すれば十分である ([M1, Lemma 4.3]).

証明の方針は以下の通りである.

ℓ 独立性と同様, まず滑らかな場合に示す. 定理 1.1 により, X が代数化可能である場合に帰着できる. 超被覆によるコホモロジー降下が使えるため, 補題 1.3 は不要であることに注意しておく. 次に alteration を用いて強準安定の場合に帰着する. コホモロジー降下を用いることができること, および体を拡大して証明すれば十分であることから, ℓ 独立性のときのような代数的対応付きの場合への拡張は不要である. なお, alteration により構成される単体的スキームが隣接サイクルコホモロジーについて「コホモロジー降下可能」であることは証明を要する. [M1] ではリジッド空間の固有射に対してコホモロジー降下が可能であることを用いている.

強準安定の場合にはやはりウェイトスペクトル系列の類似を用いる。今回は定理 1.11 のように Galois 群による捻りを考える必要はなく、また代数的対応の作用を見る必要もないため、スペクトル系列の関手性 (定理 1.14) は不要である。Weil 群の作用がスペクトル系列の E_1 項では Frobenius の冪になっていることから、主張は直ちに有限体上の滑らかなスキームに対する Weil 予想 ([De, Corollaire 3.3.3, Corollaire 3.3.4]) に帰着される。

$\text{char } K = 0$ という条件のもとでの一般の X に対する主張は ℓ 独立性と全く同様にして証明することができる。

参考文献

- [BE] S. Bloch, H. Esnault, *Künneth projectors for open varieties*, preprint, math.AG/0502447, 2005.
- [BL] S. Bosch, W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry I. Rigid spaces.*, Math. Ann. 295 (1993), no. 2, 291–317.
- [Ca] H. Carayol, *Nonabelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 15–39, Perspect. Math., 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [dJ] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 83 (1996), 51–93.
- [De] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137–252.
- [Fuj] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. 127 (1997), no. 3, 489–533.
- [Ful] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Hu1] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. 212 (1993), no. 3, 455–477.
- [Hu2] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. 217 (1994), no. 4, 513–551.
- [Hu3] R. Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [Hu4] R. Huber, *A finiteness result for the compactly supported cohomology of rigid analytic varieties*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), no. 2, 313–357.

- [Hu5] R. Huber, *A comparison theorem for ℓ -adic cohomology*, *Compositio Math.* 112 (1998), no. 2, 217–235.
- [M1] Y. Mieda, *On the action of the Weil group on the ℓ -adic cohomology of rigid spaces over local fields*, preprint, math.NT/0508509, 2005.
- [M2] Y. Mieda, *On ℓ -independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields*, preprint, math.AG/0601100, 2006.
- [Oc] T. Ochiai, *ℓ -independence of the trace of monodromy*, *Math. Ann.* 315 (1999), no. 2, 321–340.
- [RZ] M. Rapoport, Th. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, *Invent. Math.* 68 (1982), no. 1, 21–101.
- [Sa] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ* , *J. Inst. Math. Jussieu* 2 (2003), no. 4, 583–634.
- [Var] Y. Varshavsky, *Lefschetz-Verdier trace formula and a generalization of a theorem of Fujiwara*, preprint, math.AG/0505564, 2005.