数理解析研究所講究録
1523巻 2006年 184-193

Rankin-Selberg L関数, 及び symmetric square L関数の零点について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
研究生 鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

ここで扱う内容の特殊な場合が [8] に解説してある. 結果に至るまでの流れを概観するには [8] の方が見やすいと思われるので, そちらも合わせて参照願いたい. 零点分布を調べるための観点もこの小論と [8] では若干異なっている. また詳細な証明については [7] を見て頂きたい.

1. 背景：三角関数の零点

無限個の零点を持つ整関数で最もよく知られているのが正弦関数, 余弦関数であろう. これらの零点は全て実軸上にあることは良く知られている. まずこの事実の証明から始めよう.

$$f_{\pm}(s) = \varphi(s) \pm \varphi(1-s) \quad (\varphi(s) = \exp(s-1/2))$$

とする. 即ち $f_{+}(s) = 2\cos(i(s-1/2))$, $f_{-}(s) = 2\sin(i(s-1/2))$. 明らかに $f_{\pm}(s)$ は関数等式 $f_{\pm}(s) = \pm f_{\pm}(1-s)$ を満たす. $f_{\pm}$ の零点は全て関数等式の折り返し線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にある事を示す. $f_{\pm}$ を

$$f_{\pm}(s) = \varphi(s)\Big(1 \pm \frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)}\Big).$$

と分解する. このとき

(A) $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ において, $\varphi(s) \neq 0$,

(B) $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ において, $\left|\dfrac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)}\right| = e^{1-2\mathrm{Re}(s)} < 1$.

性質 (B) から直ちに次の性質 (C) を得る.

(C) $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ において, $1 + \dfrac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} \neq 0$.

性質 (A) と (C) から $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ において $f_{\pm}(s) \neq 0$ である事が従う. $f_{\pm}$ の関数等式から $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ においても $f_{\pm}(s) \neq 0$. 従って $f_{\pm}$ が零点は全て $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上になくてはならない. (証明終わり)

いま $L(s)$ を関数等式 $L(s) = L(1-s)$ を持つ $\mathbf{C}$ 上の整関数とする. 先の議論により, もし (A) と (B) を満たす $\varphi(s)$ が存在して

$$L(s) = \varphi(s) + \varphi(1-s) \tag{1.1}$$

と表示されるなら $L(s)$ の零点は全て $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ にある事が示される. この事からある具体的な $L(s)$ について, この様な分解が可能であるかを調べる事は興味ある事と思われる.

今回の結果は$PSL_2(\mathbf{Z})$に関する正則尖点形式の組に対して定義されるRankin-Selberg L関数に対して, (1.1) の様な分解を試みて得られたものである. 残念ながら, Rankin-Selberg L関数そのものに対しては (1.1) の様な分解を見つける事は出来ていないが, Rankin-Selberg L関数をある意味で近似する関数に対してはそれが概ね可能である.

2. 結果

$\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, S_kをΓに関する重さkの正則尖点形式全体の成すベクトル空間とする. 以下, 重さkを固定し, S_kの次元をdで表す. Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz), \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_g(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz) \tag{2.1}$$

を持つ正則尖点形式$f, g \in S_k$に対し, Rankin-Selberg L関数$L(s, f \times \overline{g})$が

$$L(s, f \times \overline{g}) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)\overline{a_g(n)}}{n^s} \tag{2.2}$$

により定義される. ここで$\mathrm{Re}(s) > 0$は十分大とする. $L(s, f \times \overline{g})$は$\mathbf{C}$全体へ有理型に解析接続され, $s \leftrightarrow 1-s$に関する関数等式を持つことが知られている.

S_kの Petersson 内積に関する正規直交基底$\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_d\}$を一つ固定し, 各$f_i$の Fourier 展開を

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz) \tag{2.3}$$

とする. また$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d)$を正整数を成分とするベクトルで, 各成分が$0 < m_1 < \cdots < m_d$と順序付けられているものとする. このとき行列$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}$を

$$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} a_1(m_1) & \cdots & a_d(m_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(m_d) & \cdots & a_d(m_d) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

と定義する. 行列$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}$が正則であるとき, $A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}^{-1}$の$(i, j)$成分を$\alpha_{ij}$で表す:

$$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le d}. \tag{2.5}$$

行列$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}$が正則である事は Poincaré 級数 (§4 参照)

$$P_{m_1}(z), P_{m_2}(z), \cdots, P_{m_d}(z)$$

がS_kの基底となる事と同値である (Petersson [3, 4]).

定理 1. $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_d\}$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d)$を上記の通りとする. $\mathbf{m}$は$A_{\mathcal{F},\mathbf{m}}$が正則となる様に選ばれていると仮定する. このとき, 帯領域$|\mathrm{Re}(s) - 1/2| < (k/2) - 1$内で点$s = 1/2$を除いて, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\omega_k^{-1} \pi^{-s} (4\pi)^{-s-k+1} \Gamma(s+k-1) \Gamma(s)\, L(s, f_i \times \overline{f_j}) \\ &= (4\pi)^{-s-k+1} \Gamma(s+k-1)\, \zeta^*(2s) D_{\mathbf{m},ij}(s) + (4\pi)^{s-k} \Gamma(k-s)\, \zeta^*(2s-1) D_{\mathbf{m},ij}(1-s) \\ &\quad + (4\pi)^{-k+1} \Gamma(s+k-1) \Gamma(k-s) \left\{ W_{\mathbf{m},ij}^{+}(s) + W_{\mathbf{m},ij}^{-}(s) \right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで$\omega_k=(4\pi)^{k-1}/\Gamma(k-1)$, $\zeta^*(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$で$\zeta(s)$はRiemannゼータ関数,

$$D_{\mathrm{m},ij}(s)=\sum_{h=1}^{d}\frac{\alpha_{jm}\,a_i(m_h)}{m_h^s}, \tag{2.7}$$

$$W^+_{\mathrm{m},ij}(s)=\sum_{h=1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{jm}\,a_i(m_h+n)\frac{\tau_{s-1/2}(n)}{\sqrt{n}}\,P^{1-k}_{s-1}\left(\frac{2m_h+n}{n}\right), \tag{2.8}$$

$$W^-_{\mathrm{m},ij}(s)=\sum_{h=1}^{d}\sum_{n=1}^{m_h-1}\alpha_{jm}\,a_i(m_h-n)\frac{\tau_{s-1/2}(n)}{\sqrt{n}}P^{1-k}_{s-1}\left(\frac{2m_h-n}{n}\right). \tag{2.9}$$

但し$\tau_\nu(n)=n^\nu\sum_{d|n}d^{-2\nu}$とし, $P^\mu_\nu(z)$は第一種Legendre陪関数

$$P^\mu_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\nu+1,1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)\quad(z-1\in\mathbf{C}\backslash(-\infty,0]).$$

定義(2.8)において, 右辺の級数は帯領域$|\operatorname{Re}(s)-1/2|<(k/2)-1$内で絶対収束する.

定理1で$s=1/2$のときの右辺の値を$s\to1/2$の極限の意味で解釈すると次が得られる.

系 1. 記号は定理1と同様とする. このとき

$$\begin{aligned}L(1/2,\,f_i\times\overline{f_j})=\omega_k\sum_{h=1}^{d}\frac{\alpha_{jh}a_i(m_h)}{\sqrt{m_h}}&\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(k-\frac{1}{2}\right)+\log\frac{e^\gamma}{16\pi^2m_h}\right\}\\&+\;4\pi^k\frac{\Gamma(2k-2)}{\Gamma(k-1)^2}\left\{W^+_{\mathrm{m},ij}(1/2)+W^-_{\mathrm{m},ij}(1/2)\right\}.\end{aligned}$$

ここでγはEuler定数,

$$W^+_{\mathrm{m},ij}(1/2)=\frac{1}{\Gamma(k)}\sum_{h=1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{jm}\,a_i(m_h+n)\Big(\frac{m}{m+n}\Big)^{\frac{k-1}{2}}\frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}}F\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},k;-\frac{m}{n}\Big),$$

$$W^-_{\mathrm{m},ij}(1/2)=\frac{1}{\Gamma(k)}\sum_{h=1}^{d}\sum_{n=1}^{m_h-1}\alpha_{jm}\,a_i(m_h-n)\Big(\frac{m-n}{m}\Big)^{\frac{k-1}{2}}\frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}}F\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},k;1-\frac{m}{n}\Big).$$

定理1の系として, symmetric square L関数に対しても同様の表示が得られる. 正規化されたHecke eigenform

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)n^{\frac{k-1}{2}}e(nz)\in S_k$$

に対し, symmetric square L関数$L(s,\mathrm{sym}^2 f)$はEuler積

$$L(s,\mathrm{sym}^2f)=\prod_p\left[(1-\alpha_p^2p^{-s})(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\beta_p^2p^{-s})\right]^{-1} \tag{2.10}$$

で与えられる. ここで$\alpha_p+\beta_p=a_f(p)$, $\alpha_p\beta_p=1$で$\operatorname{Re}(s)>0$は十分大とする. $L(s,f\times\overline{f})$と$L(s,\mathrm{sym}^2f)$は$\zeta(s)\,L(s,\mathrm{sym}^2f)=L(s,f\times\overline{f})$という関係にある. これから次の系が得られる.

系 2. $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots .f_d\}$ を正規化された Hecke eigenforms から成る S_k の直交基底とする. S_k の Petersson 内積を $(\,,\,)$ として, $f_i^* = f_i/(f_i, f_i)^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{F}^* = \{f_1^*, \cdots .f_d^*\}$ とする. また m を $A_{\mathcal{F}^*,\mathrm{m}}$ が正則となる様に選ぶ. このとき任意の $1 \le j \le d$ に対し, 帯領域 $|\operatorname{Re}(s) - 1/2| < (k/2) - 1$ 内で点 $s = 1/2$ を除いて, 次の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\omega_{k,i}^{-1}\,\pi^{-s}(4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta(s)\,L(s, \mathrm{sym}^2 f_i) \\
&\quad = (4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1)\,\zeta^*(2s)D_{\mathrm{m},ii}(s) + (4\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\,\zeta^*(2s-1)D_{\mathrm{m},ii}(1-s) \\
&\quad\quad + (4\pi)^{-k+1}\Gamma(s+k-1)\Gamma(k-s)\{W_{\mathrm{m},ii}^{+}(s) + W_{\mathrm{m},ii}^{-}(s)\}.
\end{aligned}
$$

ここで $\omega_{k,i} = (4\pi)^{k-1}(f_i, f_i)/\Gamma(k-1)$. $D_{\mathrm{m},ii}(s)$, $W_{\mathrm{m},ii}^{+}(s)$, $W_{\mathrm{m},ii}^{-}(s)$ は $\mathcal{F}^*$, m に対して定理 1 と同様に定義された級数とする.

注 1. S_k の次元が 1 のとき, 系 2 は Noda [2] により発見された等式

$$
\begin{aligned}
&-\tau_k(n)\left\{(2\pi)^{-2\rho}\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(k)}{\Gamma(k-\rho)}\zeta(2\rho)\,n^{1-2\rho} + \frac{2^{2\rho-2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\Gamma(k)}{\Gamma(k-1+\rho)}\zeta(2\rho-1)\right\} \\
&\quad = \sum_{0<m<n}\tau_k(m)\,\sigma_{1-2\rho}(n-m)F\left(1-\rho, k-\rho, k; \frac{m}{n}\right) \\
&\quad\quad + \sum_{n<m}\tau_k(m)\left(-\frac{n}{m}\right)^{k-\rho}\sigma_{1-2\rho}(n-m)F\left(1-\rho, k-\rho, k; \frac{n}{m}\right) \quad (\forall n \in \mathbf{Z})
\end{aligned}
$$

を導く. ここで ρ は $\zeta(s)$ または $L(s, \mathrm{sym}^2\Delta_k)$ の零点を表し, Δ_k は Fourier 展開 $\Delta_k(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\tau_k(n)e(nz)$ を持つ S_k の生成元である.

ここで定理 1 を利用して, $L(s, f_i \times \overline{f_j})$ を近似する関数 $L_{\mathrm{m},N}(s, f_i \times \overline{f_j})$ を導入する. まず $L_{\mathrm{m},0}(s, f_i \times \overline{f_j})$ を

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{m},0}(s\,; f_i \times \overline{f_j}) &= (4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1)\,\zeta^*(2s)D_{\mathrm{m},ij}(s) \\
&\quad + (4\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\,\zeta^*(2s-1)D_{\mathrm{m},ij}(1-s).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

と定義する. 次に $N \ge 1$ に対し

$$
W_{\mathrm{m},ij}^{+,N}(s) = \sum_{h=1}^{d}\sum_{n=1}^{N}\alpha_{jm}\,a_i(m_h+n)\frac{\tau_{s-1/2}(n)}{\sqrt{n}}P_{s-1}^{1-k}\left(\frac{2m_h+n}{n}\right) \tag{2.12}
$$

と定め, $L_{\mathrm{m},N}(s, f_i \times \overline{f_j})$ を

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{m},N}(s, f_i \times \overline{f_j}) &= (4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1)\,\zeta^*(2s)D_{\mathrm{m},ij}(s) \\
&\quad + (4\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\,\zeta^*(2s-1)D_{\mathrm{m},ij}(1-s) \\
&\quad + (4\pi)^{-k+1}\Gamma(s+k-1)\Gamma(k-s)\{W_{\mathrm{m},ij}^{+,N}(s) + W_{\mathrm{m},ij}^{-}(s)\}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

により定義する. 各 $L_{\mathrm{m},N}(s\,; f_i \times \overline{f_j})$ が関数等式

$$
L_{\mathrm{m},N}(s, f_i \times \overline{f_j}) = L_{\mathrm{m},N}(1-s, f_i \times \overline{f_j}).
$$

を満たしている事が $\zeta(s)$, $\tau_{s-1/2}(n)$, $P_{s-1}^{\mu}(x)$ の関数等式から従う.

定理 2. $\mathcal{F}=\{f_1,\cdots,f_d\}$, m は定理1と同様とする. いま, ある正数 $\delta=\delta_{\mathcal{F},\mathrm{m}}$ が存在して, Dirichlet 多項式 $D_{\mathrm{m},ij}(s)$ が右半平面 $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2-\delta$ に零点を有限個しか持たないと仮定する. このとき任意の整数 $N\geq 0$ と任意の正数 $a>0$ に対し, 正定数 $C_{N,a}>0$ が存在して, $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f}_j)$ は領域

$$\frac{\log\{C_{N,a}\log^{1/2}(|t|+1)\}}{\log(|t|+1)}<\left|\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}\right|<a \tag{2.14}$$

内に零点を持たない. 即ち, 帯領域 $|\mathrm{Re}(s)-1/2|<a$ 内の零点は全て

$$\left|\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{\log\{C_{N,a}\log^{1/2}(|t|+1)\}}{\log(|t|+1)}. \tag{2.15}$$

内にある. 特に勝手な $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ に対し $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f}_j)$ は帯領域 $\varepsilon_1\leq|\mathrm{Re}(s)-1/2|\leq\varepsilon_2$ 内に有限個の零点しか持たない.

注 2. Selberg の molification method を用いる事により, 任意の正値で無限大へ増加する関数 $\eta(t)$ に対し, $L(s,f_i\times\overline{f}_j)$ の殆ど全ての零点は

$$\left|\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{\eta(t)}{\log(|t|+1)}$$

内にある事が知られる. $L(s,f_i\times\overline{f}_j)$ の近似関数 $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f}_j)$ に対する定理2はこの事の類似とも見なせる.

注 3. Dirichlet 多項式 $D_{\mathrm{m},ij}(s)$ が定理2の条件を満たすか否かを確かめる事は一般的に難しい問題と思われる. しかし S_k の次元が低い場合はベクトル m を定理2の条件を満たすように取れることを証明できる.

もし, ある N_0 が存在して全ての $N\geq N_0$ に対し $L_{\mathrm{m},N}(s,,f_i\times\overline{f}_j)$ が垂直帯領域

$$0<\left|\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$

内に零点を持たないことが言えれば, それは Rankin–Selberg L 函数 $L(s,f_i\times\overline{f}_j)$ に対する Riemann 予想が正しいことを意味する. 従って f_i と f_j が Hecke eigenform であるとき, その様な結果が得られれば喜ばしい. ところが, 定理2の証明は f_i と f_j が Hecke eigenform であることを必要としない. 従って上記の様なより望ましい結果を得るためには, f_i と f_j の Fourier 係数のより詳しい数論的性質を必要とする新しいアイディアが必要となる.

3. 2つの簡単な例

• **$k=12$ の場合.** S_{12} は1次元で Ramanujan デルタ関数 $\Delta(z)=e(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-e(nz))^{24}$ で生成される事はよく知られている. $\mathcal{F}=\{\Delta/(\Delta,\Delta)^{\frac{1}{2}}\}$, $\mathrm{m}=(m)$ とすると $A_{\mathcal{F},\mathrm{m}}$ が正則であることは $\tau(m)\neq 0$ に他ならない. ここで $\tau(m)$ は Ramanujan τ 関数 (Δ の m 番目の Fourier 係数). 例えば最初の数個は $\tau(1)=1$, $\tau(2)=-24$, $\tau(3)=252$, $\tau(4)=-1472$, $\tau(5)=4830$ だから, これらに対しては定理1, 系1を適用する事ができる. また Lehmer

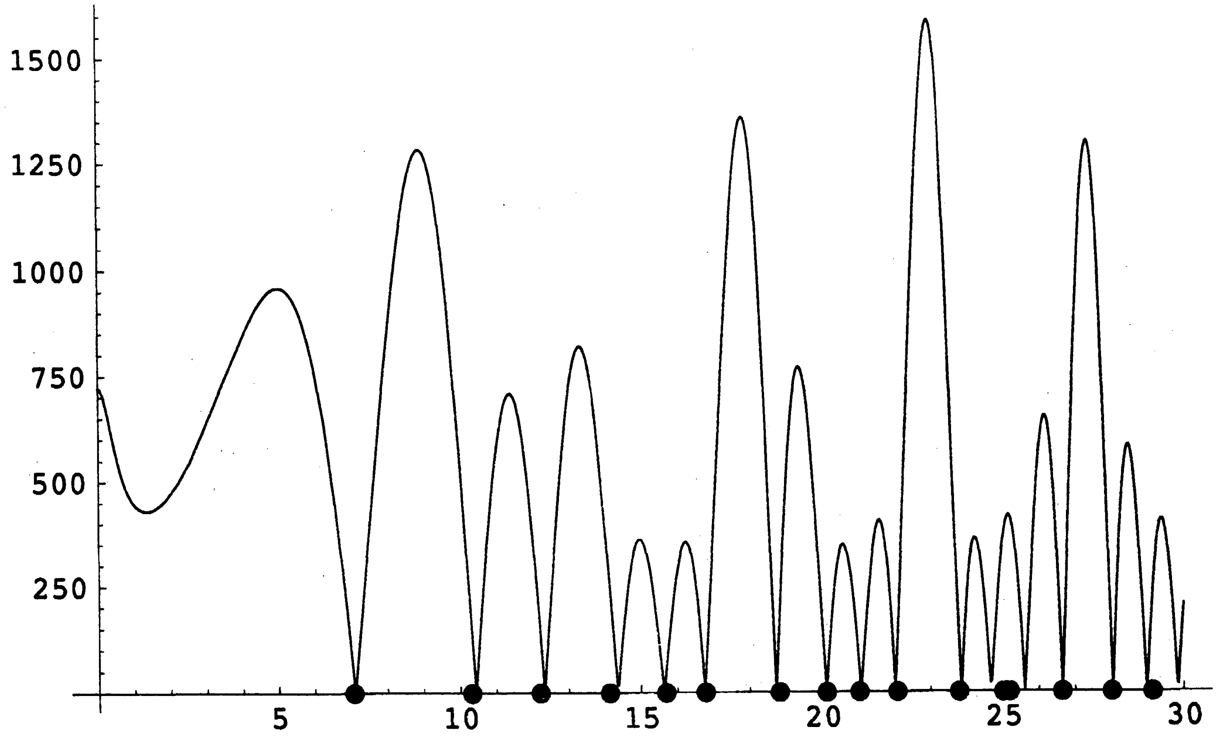

FIGURE 1. $0 \le t \le 30$ での $|L_{(1),0}(1/2+it,\, \Delta\times\Delta)/(\Gamma\text{-因子})|$ のグラフ．
点 ● は $L(s,\Delta\times\Delta)$ の $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上の零点．

予想 $(\tau(m)\neq 0, \forall m\ge 1)$ を仮定すれば全ての $m\ge 1$ に対して定理 1, 系 1 が適用可能である．系 1 を $m=1$ に対して適用したものを用いて計算すると

$$L(1/2,\Delta\times\Delta) = -7.25563\cdots\times 10^2.$$

また $D_{(m),11}(s)=m^{-s}$ が容易に分る．従って定理 2 の $D_{(m),11}(s)$ に対する仮定は常に満たされている．Figure 1 を見ると，$L(s,\Delta\times\Delta)$ の低い位置にある零点は $L_{(1),0}(s,\Delta\times\Delta) = (4\pi)^{-s-11}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)+(4\pi)^{s-12}\Gamma(12-s)\,\zeta^*(2s-1)$ でよく近似されていることが観察される．もちろん $|\mathrm{Im}(s)|$ が大きいところでは，よい近似を得るためには N を大きくとる必要があるのだが，$L(s,\Delta\times\Delta)$ の低い位置にある零点が Riemann ゼータ関数のみでよく近似されるということは少し面白い現象ではないかと思う．以上の事柄は S_k が 1 次元ならば同様に成り立つ．

• **$k=24$ の場合．** S_{24} は 2 次元で，基底の一つは正規化された Hecke eigenforms

$$f(z) = E_{12}(z)\Delta(z)+\lambda^{+}\Delta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_f(n)e(nz)$$

$$g(z) = E_{12}(z)\Delta(z)+\lambda^{-}\Delta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_g(n)e(nz)$$

で与えられる [5]. ここで E_{12} は重さ 12 の正則 Eisenstein 級数, $\lambda^{\pm}=12\left(\frac{27017}{691}\pm\sqrt{144169}\right)$.
$\mathcal{F}=\{f/(f,f)^{\frac{1}{2}},\ g/(g,g)^{\frac{1}{2}}\}$, $\mathfrak{m}=(m_1,m_2)$, とすると

$$\det A_{\mathcal{F},\mathfrak{m}}=\frac{A_f(m_1)A_g(m_2)-A_f(m_2)A_g(m_1)}{(m_1m_2)^{\frac{23}{2}}\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}}.$$

これから $\det A_{\mathcal{F},\mathfrak{m}}$ が計算できる. $\det A_{\mathcal{F},(1,2)}\neq 0$ が分るので, 系 1 を $m=(1,2)$ に対して適用して計算すると

$$L(1/2,f\times f)=-3.07917\cdots,\quad L(1/2,f\times g)=+9.79843\cdots\times 10^{-3},$$
$$L(1/2,g\times g)=-2.55952\cdots.$$

また $\mathfrak{m}=(m_1,m_2)$ に対し, $D_{\mathfrak{m}}=A_f(m_1)A_g(m_2)-A_f(m_2)A_g(m_1)$ とおくと,

$$D_{\mathfrak{m},11}(s)=\frac{1}{D_{\mathfrak{m}}}\left\{\frac{A_f(m_1)A_g(m_2)}{m_1^s}-\frac{A_f(m_2)A_g(m_1)}{m_2^s}\right\}.$$

これにから $D_{\mathfrak{m},11}(s)$ の零点は全てある垂直線上にある事が分る. 例えば $\mathfrak{m}=(1,2)$ のとき $\mathrm{Re}(s)=+0.343579\ldots$, $\mathfrak{m}=(2,3)$ のとき $\mathrm{Re}(s)=-5.69519\ldots$, $\mathfrak{m}=(3,5)$ のとき $\mathrm{Re}(s)=+1.72665\ldots$. これらの例から, $D_{\mathfrak{m},ij}(s)$ の零点の位置は $\mathfrak{m}$ の選択にかなり依存している事が見て取れる.

4. 証明の概略

まず定理 1 の証明に必要となる C^{∞} modular forms, Poincaré 級数, 実解析的 Eisenstein 級数について簡単に述べる (4.1, 4.2 は Strum [6], 4.3 は Noda [2] に従う). その後, 定理 1 と定理 2 の証明の概略を述べる.

4.1. C^{∞} **modular forms.** 上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbf{C}$ 値 C^{∞} 級関数 F が変換法則

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^kF(z)\quad\forall\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma.$$

を満たすとき, F は重さ k の C^{∞} modular form と呼ばれる. 二つの重さ k の C^{∞} modular form F と G について, Petersson 内積 (F,G) が

$$(F,G)=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}F(z)\overline{G(z)}y^{k-2}dxdy,$$

により定義される. ここで右辺の積分は絶対収束するものとする. 重さ k の C^{∞} modular form F が増大度条件

$$\int_0^{\infty}\int_0^1|F(z)|y^{k-2}e^{-\varepsilon y}dxdy<\infty\quad(\forall\varepsilon>0)$$

を満たすとき, F は bounded growth であると言う.

4.2. **Poincaré 級数.** 各正整数 m に対し, 重さ k の Poincaré 級数 P_m が

$$P_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, z)^{-k} e(m\gamma z)$$

により定義される. ここで $j((\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}), z) = cz + d$, $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\infty = \infty\}$. F を重さ k の bounded growth な C^∞ modular form で,

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(y) e(nx)$$

を Fourier 展開に持つとする. また $\mathcal{F}$ を S_k の正規直交基底の一つとする. このとき Petterson 内積 (F, P_m) は次の二通りの表示を持つ.

$$(F, P_m) = \int_0^\infty a_m(y) e^{-2\pi m y} y^{k-2} dy, \tag{4.1}$$

$$(F, P_m) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathcal{F}} (F, f) a_f(m) m^{-\frac{k-1}{2}}. \tag{4.2}$$

二番目の表示で $a_f(m)$ は f の m 番目の Fourier 係数を表す.

4.3. **実解析的 Eisenstein 級数.** Γ に関する実解析的 Eisenstein 級数は

$$E_s^*(z) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\operatorname{Im} \gamma z)^s \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

で定義される. $E_s^*(z)$ は z の関数として Γ の作用に関して不変で, s の函数として一位の極 $s = 0, 1$ を除いた全平面に正則に解析接続され, 関数等式 $E_s^*(z) = E_{1-s}^*(z)$ を持つことが知られている.

補題 1 (Noda). 勝手な $f \in S_k$ と $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ を満たす任意の複素数 s に対して, $f(z)E_s^*(z)$ は重さ k の bounded growth な C^∞ modular form である.

4.4. **定理 1 の証明の概略.** 定理 1 は Petersson 内積 (fE_s^*, P_{m_h}) を fE_s^* の Fourier 展開を用いて直接的に計算する事により得られる. 補題 1 から $f(z)E_s^*(z)$ は重さ k の bounded growth な C^∞ modular form. 各 (fE_s^*, P_{m_h}) $(h = 1, \ldots d)$ を (4.1), (4.2) を用いて二通りに計算する事により,

$$(4\pi)^{-k+1}\Gamma(k-1) A_{\mathcal{F},\mathrm{m}} \mathcal{L}_{\mathcal{F},f}(s) = \mathcal{N}_{\mathrm{m},f}(s).$$

ここで $A_{\mathcal{F},\mathrm{m}}$ は (2.4) で定義される行列, $\mathcal{L}_{\mathcal{F},f}(s) = {}^t(L^*(s, f \times \overline{f_1}), \ldots, L^*(s, f \times \overline{f_d}))$, 但し $L^*(s, f \times g) = \pi^{-s}(4\pi)^{-s-k-1}\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)L(s, f \times \overline{g})$ とおいた. $\mathcal{N}_{\mathrm{m},f}(s)$ は

$$\begin{aligned}
&N_f(s, m_h) \\
&= a_f(m_h)\Big[(4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1)\,\zeta^*(2s)\,m_h^{-s} + (4\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\,\zeta^*(2s-1)\,m_h^{s-1}\Big] \\
&+ (4\pi)^{-k+1}\Gamma(s+k-1)\Gamma(k-s) \sum_{n=1}^{m_h-1} a_f(m_h - n) \frac{\tau_{s-1/2}(n)}{\sqrt{n}} P_{s-1}^{1-k}\Big(\frac{2m_h - n}{n}\Big) \\
&+ (4\pi)^{-k+1}\Gamma(s+k-1)\Gamma(k-s) \sum_{n=1}^{\infty} a_f(m_h + n) \frac{\tau_{s-1/2}(n)}{\sqrt{n}} P_{s-1}^{1-k}\Big(\frac{2m_h + n}{n}\Big).
\end{aligned}$$

として, $\mathcal{N}_{\mathrm{m},f}(s) = {}^t(N_f(s,m_1),\ldots,N_f(s,m_d))$ で与えられる. 整数ベクトル m に対する仮定から, 逆行列 $A_{\mathcal{F},\mathrm{m}}^{-1}$ が存在するので

$$(4\pi)^{-k+1}\Gamma(k-1)\,\mathcal{L}_{\mathcal{F},f}(s) = A_{\mathcal{F},\mathrm{m}}^{-1}\mathcal{N}_{\mathrm{m},f}(s).$$

両辺の第 j 成分を比較して

$$(4\pi)^{-k+1}\Gamma(k-1)\,L^*(s,f\times\overline{f_j}\,) = \sum_{h=1}^{d}\alpha_{jh}N_f(s,m_h).$$

ここで $f=f_i$ と取れば定理 1 の等式が得られる.

4.5. **定理 2 の証明の概略.** 定理 2 の証明の方針は「1. 背景」での議論を $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f}_j)$ に対して行う事である. まず

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= (4\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1)\,\zeta^*(2s)D_{\mathrm{m},ij}(s),\\ w_N(s) &= (4\pi)^{-k+1}\Gamma(s+k-1)\Gamma(k-s)\{W_{\mathrm{m},ij}^{+,N}(s)+W_{\mathrm{m},ij}^{-}(s)\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

とおく. $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f}_j)$ の定義 (2.11), (2.13) から直ちに

$$L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f_j}) = \varphi(s)\left(1+\frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)}+\frac{w_N(s)}{\varphi(s)}\right). \tag{4.4}$$

Dirichlet 多項式 $D_{\mathrm{m},ij}(s)$ に対する仮定から,

(i) $\varphi(s)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s)>1/2$ に零点を有限個しか持たない.

更に次が示される.

(ii) 勝手な $a>0$ に対し, ある $T_a>0$ が存在して, $0<\mathrm{Re}(s)-1/2<a$, $|\mathrm{Im}(s)|\geq T_a$ において

$$L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f_j}) = \varphi(s)\left(1+O(\,|t|^{1-2\sigma}\,)+O(\,|t|^{1-2\sigma}\log|t|\,)\right). \tag{4.5}$$

主張 (i), (ii) から, ある $C_{N,a}>0$ が存在して領域

$$\frac{\log\{C_{N,a}\log^{1/2}\log|t|\}}{\log|t|} < \mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2} < a \tag{4.6}$$

において $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f_j})\neq 0$. 従って関数等式 $L_{\mathrm{m},N}(s,f_i\times\overline{f_j}) = L_{\mathrm{m},N}(1-s,f_i\times\overline{f_j})$ から定理 2 の主張を得る.

主張 (ii) は Lagarias-Suzuki [1] の, $\mathrm{Re}(s)>1/2$ において $|\zeta^*(1-s)/\zeta^*(s)|<1$ という結果と, ガンマ関数に対する Stirling の公式, Watson [9] にある Legendre 陪関数の漸近展開から初等的に得られる. 詳細は [7], [8] を参照されたい. (ii) の評価を導く際, $W_{\mathrm{m},ij}^{+,N}(s)$ が有限和である事が本質的である. $\mathrm{Re}(s)>1/2$ において $|W_{\mathrm{m},ij}^{+}(s)|$ は $|\varphi(s)|$ より本質的に大きくなるため, $W_{\mathrm{m},ij}^{+}(s) = W_{\mathrm{m},ij}^{+,\infty}(s)$ に対しては上記の議論は適用できない.

REFERENCES

[1] J.C. Lagarias, M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, to appear in J.Number Theory.

[2] T. Noda, *An application of the projections of C^∞ automorphic forms*, Acta Arith. **72** (1995), 229–234.

[3] H. Petersson, *Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **12** (1938), 414–472.

[4] ———, *Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **49** (1939), 49–75.

[5] R.A. Rankin, *The scalar product of modular forms*, Proc. London Math. Soc. (3) **2** (1952), 198–217.

[6] J. Strum, *The critical values of zeta functions associated to the symplectic group*, Duke Math. J. **48** No.2 (1981), 327–350.

[7] M. Suzuki, *On the zeros of the approximate function of the Rankin-Selberg L-functions* , preprint.

[8] ———, *Ramanujan のデルタ関数に付随する Rankin-Selberg L 函数の零点について*, 数理研講究録「解析的整数論」, 掲載予定.

[9] G.N. Watson, *Asymptotic expansions of hypergeometric functions*, Trans. Cambridge Phi-los. Soc. **22** (1918), 277–308.

Masatoshi Suzuki,
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
Japan
e-mail address:m99009t@math.nagoya-u.ac.jp