数理解析研究所講究録
1526 巻 2006 年 87-95

提携に制限のあるファジィ協力ゲームに対する値

大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka University

1 はじめに

協力ゲームの理論は複数の意思決定主体の存在する意思決定状況を扱うのに有力な理論である．この理論をより現実的な問題に適用するためには，２つのファクターを考えることが有用である．そのひとつは各プレイヤーの提携への部分参加を可能にすることであり，ファジィ提携に基づくファジィ協力ゲームを考えることで取り扱うことができる．もうひとつは提携の実現可能性に制限を加えることである．ファジィ協力ゲームにおいては，実現可能ファジィ提携集合を導入することで対応することができる．本論文では，これら２つのファクターを同時に考えた提携に制限を伴うファジィ協力ゲームに対し，全体提携が形成された場合の利得のプレイヤー間配分である，ゲームの１点解としての値について考察する．

2 ファジィ協力ゲーム

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ を n 人のプレイヤーの集合とするとき，N 上の協力ゲーム（提携形ゲーム）は，その特性関数 $v: 2^N\to\mathbf{R}$ によって与えられる．ただし，通常 $v(\emptyset)=0$ と仮定する．以下では N を固定して考え，N 上の特性関数すなわちゲームをクリスプゲームと呼び，その全体を Γ^N で表す．また，以下では，$v(\{i\})=v(i)$，$S\cup\{i\}=S\cup i$，$S\setminus\{i\}=S\setminus i$ などの略記を用いる．

クリスプゲームの提携 S は N の部分集合であり，これは $i\in S$ のとき $s_i=1$ で $i\notin S$ のとき $s_i=0$ となる n 次元の２値ベクトル空間 $\{0,1\}^n$ の要素 s と同一視できる．したがってプレイヤーの提携への部分参加を考慮するためには，一般的に $[0,1]^n$ の要素 s を考えればよく，この s をファジィ提携と呼ぶ [1, 5]．s_i はプレイヤー i の提携への参加度を表すと解釈できる．よって N 上のファジィ協力ゲームは，特性関数 $\xi:[0,1]^n\to\mathbf{R}$ によって与えられる．その全体を Δ^N で表すことにする．

本論文では以下のような記法を用いる．$S\subseteq N$ に対し，ベクトル e^S を，$i\in S$ のとき $(e^S)_i=1$，$i\notin S$ のとき $(e^S)_i=0$ で定義する．特に $e^\emptyset=(0,\ldots,0)$ と $e^N=(1,\ldots,1)$ は簡単にそれぞれ 0 と 1 で，またベクトル $e^{\{i\}}$ は e^i で表す．

3 実現可能ファジィ提携集合

この章では，ファジィ提携に対する制限を表す実現可能提携ファジィ提携集合の概念と，その特別な幾つかのクラスについてまとめる．

通常の協力ゲーム（クリスプゲーム）においては，任意の提携が実現可能（許容される）としていた．しかし現実には，物理的理由，イデオロギー的理由で許容されない提携が存在する．そのような状況を一般的に取り扱うために，実現可能提携システム，すなわち実現可能な提携全体の集合 $\mathcal{F}\subseteq 2^N$ が導入されている（[2]）．さらに，実現可能提携システムには何らかの組み合わせ論的構造を仮定するのが自然である．代表的な構造としては，分割システム，マトロイド，ア

ンチマトロイドなどがある．これに対し，ファジィ協力ゲームにおいても実現可能な提携の全体を考えることは極めて自然である．

定義 1 $[0,1]^n$ の部分集合 F は次の条件を満足するとき，N における実現可能ファジィ提携集合であるといわれる：

$$0 \in F,\ 1 \in F$$

ここで，$1 = e^N \in F$ を仮定しているのは，本論文ではファジィ協力ゲーム $\xi \in \Delta^N$ において全体提携が形成されたとき，その利得 $\xi(N)$ を配分する方法を解として考えるからである．

もっとも単純な実現可能提携集合は，有限個のファジィ提携からなるものである．

定義 2 N における実現可能ファジィ提携集合 F が 3 個以上の要素を持つ（すなわち 0, 1 以外の実現可能ファジィ提携が存在する）有限集合であるとき，それは有限実現可能ファジィ提携集合 *(Finite Feasible Fuzzy Coalition Set)* であるといわれる．

注意 1 特に，有限実現可能ファジィ提携集合

$$E = \{e^S \mid S \subseteq N\}$$

とすると，ファジィゲームは実質的にクリスプゲームとなることは明らかである．すなわち，クリスプゲームは有限実現可能ファジィ提携集合 E の下でのファジィゲームとみなすことができる．

実現可能ファジィ提携集合が与えられたとき，空提携 $0 = e^{\emptyset}$ から全体提携 $1 = e^N$ へ各プレイヤーが提携への参加度を増していく系列を考えることができる．

定義 3 N における実現可能ファジィ提携集合 F が与えられたとき，F 内の実現可能点列 $\{s^0, s^1, \dots s^l\}$ とは，$s^0 = 0$, $s^l = 1$，及び $s^k \leq s^{k+1}$ $(k = 0, \dots, l-1)$ を満たすものをいう．特に s^k と s^{k+1} とでは，唯一の成分のみが異なるような実現可能点列を実現可能階段点列という．

実現可能点列は $\{s^k\}$ と表記する（簡単のため l は明記しない）．Branzei ら [4] では，実現可能階段点列のことを経路（path）と呼んでいるが，本論文では後述するように連続なものに対して経路という用語を用いるので，階段点列という言葉を用いる．

注意 2 F が N における有限実現可能ファジィ提携集合であるとき，実現可能点列の個数は有限である．したがって実現可能階段点列の数も有限であるが，存在しないこともありうる．F 内の実現可能点列および実現可能階段点列の全体をそれぞれ $\mathcal{L}(F)$, $\mathcal{M}(F)$ で表す．

注意 3 有限実現可能ファジィ提携集合 $E = \{e^S \mid S \subseteq N\}$ に対しては，その実現可能階段点列全体の集合と N の順列全体の集合 $\Pi(N)$ の間に 1 対 1 対応がつく．

実現可能点列は，離散的に全体提携が形成されていく過程を表しているが，これを連続的なものに拡張すると，次のような経路が得られる．

定義 4 N における実現可能ファジィ提携集合 F が与えられたとき，F 内の実現可能経路とは，パラメータ t に関する関数 $\sigma : [0,1] \to F$ によって表される連続曲線 $\{\sigma(t) | 0 \leq t \leq 1\}$ のことをいう．ただし，$\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$ で，$t \leq t'$ ならば $\sigma(t) \leq \sigma(t')$ が成り立つものとする．特に σ が区分的に滑らかなとき，区分的に滑らかな実現可能経路という．

以下では，関数を用いて経路 σ という言い方をする．経路に関連して次のような特別なクラスの実現可能ファジィ提携集合を導入する．

定義 5 有限個の実現可能経路のみからなる N における実現可能ファジィ提携集合を，N における有限実現可能経路集合という．有限実現可能経路集合は実現可能経路を明記して，$\bigcup_{j=1}^{l}\sigma^j$ と表される．すべての経路が区分的に滑らかであるとき，有限実現可能経路集合は区分的に滑らかであるという．

4 実現可能ファジィ提携集合の下でのファジィ協力ゲームの値

協力ゲーム理論の中心的課題は，クリスプ協力ゲームが与えられたとき，その全体提携の利得をプレイヤー間で如何に配分すれば合理的であるかの考察である．この配分法はゲームの解とも呼ばれ，さまざまなものが提案されている．大きく分けて，配分を集合の形で与える集合値解とひとつのベクトル値で与える点値（１点）解とがあり，前者にはコア，カーネル，安定集合などの概念が，後者には Shapley 値，Banzhaf 値，τ 値，仁などがある．この呼称からもわかるように，１点解はしばしば「値」という名で呼ばれている．より柔軟に解釈すると，ゲームに対し n 次元のベクトルを対応させる写像（関数）そのものを「値」と呼んでいるともいえる．この値を定めるのに中心的役割を果たすのが，プレイヤーの限界貢献度である．

本論文では，ファジィ協力ゲーム ξ に対し，n 次元ベクトル $\phi(\xi)$ を定める方法について考察し，得られるベクトルをゲーム ξ の値と呼ぶことにする．基本的に値はプレイヤーの限界貢献度に基づき構成される．提携に制限のない場合で言えば，クリスプゲームの定義域が $\{0,1\}^n$ であったのに対し，ファジィゲームのそれは $[0,1]^n$ であるから，値を定めるための情報はファジィゲームの方がはるかに多いことになる．しかし裏を返せば，情報が多すぎて，ある程度簡便に値を求めることが難しいともいえる．なお，Branzei ら [3, 4, 5] が，全体提携の形成を前提としてこのような値および，コアについて考察しているのに対し，鶴見ら [12, 13] および森谷ら [7] は，形成されるファジィ提携 s に依存した解について考察している．

Branzei ら [4] では，ここでいう階段点列に対し，各プレイヤーの貢献度の増加を考えて path solution を定義している．

実現可能階段点列 $\{s^k\}$ を考え，$I_i=\{k|s_i^{k+1}-s_i^k>0\}$ とおく．

定義 6 ファジィゲーム $\xi\in\Delta^N$ と有限実現可能ファジィ提携集合 F が与えられたとき，プレイヤー i の実現可能階段点列 $\{s^k\}$ に沿っての限界貢献度は

$$\mu_i(\xi,\{s^k\})=\sum_{k\in I_i}[\xi(s_1^k,\ldots,s_i^{k+1},\ldots,s_n^k)-\xi(s_1^k,\ldots,s_i^k,\ldots,s_n^k)]$$

で定義される．ベクトル $(\mu_1(\xi,\{s^k\}),\ldots,\mu_n(\xi,\{s^k\}))$ を $\{s^k\}$ に沿っての ξ の階段点列値という．

ここで階段点列に対しては，$k\in I_i$ ならば，$j\neq i$ に対して，$s_j^{k+1}=s_j^k$ であることに注意すると，上の定義の右辺は $\xi(s^{k+1})-\xi(s^k)$ である．

定義 7 ファジィゲーム $\xi\in\Delta^N$ と有限実現可能ファジィ提携集合 F，及び $\mathcal{L}(F)=\{\{s^{1k}\},\ldots,\{s^{lk}\}\}$ 上の重みベクトル $p=(p_1,\ldots,p_l)\geq 0$，$l=|\mathcal{L}(F)|$，$\sum_{j=1}^{l}p_j=1$，が与えられたとき，

$$\psi_i^p(\xi,F)=\sum_{j=1}^{l}p_j\mu_i(\xi,\{s^{jk}\})$$

を有限実現可能ファジィ提携集合 F のもとでのゲーム ξ に対するプレイヤー i の確率階段点列値という．ベクトル $\psi^p(\xi,F)=(\psi^p_1(\xi,F),\dots,\psi^p_n(\xi,F))$ を F のもとでのゲーム ξ の確率階段点列値という．

確率階段点列値が線形性

$$\psi^p(\alpha\xi+\beta\eta,F)=\alpha\psi^p(\xi,F)+\beta\psi^p(\eta,F),\ \ \forall\xi,\eta\in\Delta^N,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$$

を満たすことは明らかである．またすべての実行可能階段点列 $\{s^k\}$ に対し，$k\in I_i$ ならば $\xi(s^k)=\xi(s^{k+1})$ を満たすプレイヤー i を F-ナルプレイヤーと呼ぶと，このプレイヤーに対し，確率階段点列値は 0 となる．さらに，実現可能階段点列 $\{s^k\}$ に対し，

$$\xi(1)-\xi(0)=\sum_{k=0}^{l-1}(\xi(s^{k+1})-\xi(s^k))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in I_i}(\xi(s^{k+1})-\xi(s^k))=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\xi,\{s^k\})$$

が成り立つ．したがって，$\psi^p_i(\xi,F)=\xi_i(1)$ となり，確率階段点列値はいわゆる全体合理性も満足する．以上をまとめると次の結果が得られる．

定理 1 ファジィゲーム $\xi\in\Delta^N$ と有限実現可能ファジィ提携集合 F，及び $\mathcal{L}(F)=\{\{s^{1k}\},\dots,\{s^{lk}\}\}$ 上の重みベクトル $p=(p_1,\dots,p_l)\geq 0$，$l=|\mathcal{L}(F)|$，$\sum_{j=1}^{l}p_j=1$，が与えられたとき，確率階段点列値 $\psi^p(\xi,F)$ は，ゲームに関する線形性，全体合理性，ナルプレイヤーに対するゼロ評価の 3 性質を満足する．

このように階段点列値は望ましい性質をもつが，実現可能ファジィ提携集合によっては，実現可能な階段点列が存在しないことがある．また空提携から全体提携が形成されていく過程を階段点列のみに限定するのも問題があるかもしれない．したがってより一般的な実現可能点列に対する $\{s^k\}$ に対する値を次に考察する．この点列の 2 点 s^k と s^{k+1} に対して

$$J_k=\{i\in N\,|\,s_i^{k+1}>s_i^k\},\ \ k=0,\dots,l$$

と定義する．ただし J_k に属するプレイヤーがすべて，点 s^k から s^{k+1} への特性関数値の増分 $\xi(s^{k+1})-\xi(s^k)$ に寄与するわけではない．例えば $n=3$ で $\xi(s)=s_1s_2$，$s^k=(0,0,0)$，$s^{k+1}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ のとき，$J_k=\{1,2,3\}$ ではあるが，プレイヤー 3 が貢献をしていないことは明らかである．そこでベクトル s^k_{+J} を

$$(s^k_{+J})_i=\begin{cases} s_i^k & \text{if } i\notin J\\ s_i^{k+1} & \text{if } i\in J\end{cases}$$

で定義し，

$$\bar{J}_k=\bigcup\{i\in N\mid \exists J\subseteq N:\xi(s^k_{+(J\cup\{i\})})\neq\xi(s^k_{+J})\}$$

とする．このとき $\bar{J}_k$ に含まれるプレイヤー i について，この 2 点間での限界貢献度を

$$t_i(\xi,s^k)=\frac{s_i^{k+1}-s_i^k}{\displaystyle\sum_{j\in \bar{J}_k}s_j^{k+1}-s_j^k}(\xi(s^{k+1})-\xi(s^k))$$

で定義する．この点列に沿ってのプレイヤー i の貢献度は

$$\nu_i(\xi, \{s^k\}) = \sum_{k:J_k \ni i} t_i(\xi, s^k)$$

で定義される．ベクトル $(\nu_1(\xi, \{s^k\}), \dots, \nu_n(\xi, \{s^k\}))$ を点列 $\{s^k\}$ に沿っての ξ の点列値という．

定義 8 ファジィゲーム $\xi \in \Delta^N$ と有限実現可能ファジィ提携集合 F，及び $\mathcal{M}(F) = \{\{s^{1k}\}, \dots, \{s^{mk}\}\}$ 上の重みベクトル $q = (q_1, \dots, q_m) \geq 0$, $m = |\mathcal{M}(F)|$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$, が与えられたとき，

$$\Psi_i^q(\xi, F) = \sum_{j=1}^m q_j \nu_i(\xi, \{s^{jk}\})$$

を有限実現可能ファジィ提携集合 F のもとでのゲーム ξ に対するプレイヤー i の確率点列値という．ベクトル $\Psi^q(\xi, F) = (\psi_1^q(\xi, F), \dots, \Psi_n^q(\xi, F))$ を F のもとでのゲーム ξ の確率点列値という．

確率点列値に関しても次の３性質が成り立つことは明らかである．ただし，F-ナルプレイヤー i は階段点列値の場合の F-ナルプレイヤーの一般化として，任意の実行可能点列 $\{s^k\}$ に対し，$i \notin \bar{J}_k$ $\forall k$ を満たすプレイヤーとする．

定理 2 ファジィゲーム $\xi \in \Delta^N$ と有限実現可能ファジィ提携集合 F，及び $\mathcal{M}(F) = \{\{s^{1k}\}, \dots, \{s^{lk}\}\}$ 上の重みベクトル $q = (p_1, \dots, p_l) \geq 0$, $m = |\mathcal{M}(F)|$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$, が与えられたとき，確率階段点列値 $\Psi^q(\xi, F)$ 　は，ゲームに関する線形性，全体合理性，ナルプレイヤーに対するゼロ評価の３性質を満足する．

次に，区分的に滑らかな有限実現可能経路集合 F の下での，ファジィゲームの値について考える．この場合，経路 σ におけるプレイヤー i の限界貢献度を，この経路に沿っての ξ の値の変化で捉える．すなわち次の定義を与える．

定義 9 ファジィゲーム $\xi \in \Delta^N$ と実現可能経路 σ に対し，この経路上の各点 $\sigma(t) \in F$ において，ξ の s_i に関する偏微分係数（$s_i = 0$ のときは右側微係数，$s_i = 1$ のときは左側微係数）が存在するとき，プレイヤー i の経路 σ に沿ってのゲーム ξ に対する限界貢献度は，この経路に沿っての $\frac{\partial \xi(\sigma(t))}{\partial s_i}$ の積分すなわち

$$\chi_i(\xi, \sigma) = \int_0^1 \frac{\partial \xi(\sigma(t))}{\partial s_i} \frac{d\sigma_i(t)}{dt} dt$$

で与えられる．また区分的に滑らかな実現可能経路の場合には，右辺を対応する有限個の積分の和で与えればよい．ベクトル $(\chi_1(\xi, \sigma), \dots, \chi_n(\xi, \sigma)$ を経路 σ に沿っての ξ の経路値という．

注意 4 上の定義で，経路値は経路のパラメータ表示に依存しない．実際滑らかな狭義単調増加関数 ρ を用いて $t = \rho(t')$ と変数変換（ただしもちろん $\rho(0) = 0, \rho(1) = 1$）した経路を $\sigma'(t') = \sigma(\rho(t'))$ とすれば，$\mu_i(\xi, \sigma') = \mu_i(\xi, \sigma)$ となることは，積分の変数変換から明らかである．

定義 10 ファジィゲーム $\xi \in \Delta^N$ と区分的に滑らかな有限実現可能経路集合 $F = \bigcup_{j=1}^l \sigma^j$，及び各経路への重みベクトル $p = (p_1, \dots, p_l) \geq 0$, $\sum_{j=1}^l p_j = 1$ が与えられたとき，

$$\phi_i^p(\xi, F) = \sum_{k=1}^l p_j \chi_i(\xi, \sigma^j)$$

を滑らかな有限実現可能経路集合 F のもとでのゲーム ξ に対するプレイヤー i の確率経路値という．ベクトル $\phi^p(\xi, F) = (\phi^p(\xi, F), \ldots, \phi^p_n(\xi, F))$ を区分的に滑らかな有限実現可能経路集合 F のもとでのゲーム ξ の確率経路値という．

確率経路値がゲームに関する線形性

$$\phi^p(\alpha\xi + \beta\eta, F) = \alpha\phi^p(\xi, F) + \beta\phi^p(\eta, F), \ \ l\alpha, \beta > 0$$

を満たすことは明らかである．また実行可能経路上の各点 s において $\dfrac{\partial\xi(s)}{\partial s_i} = 0$ となるプレイヤーを F-ナルプレイヤーと呼ぶと，F-ナルプレイヤー i に対し確率経路値は 0 となる．また滑らかな経路 $\sigma(t)$ の場合で説明するが，区分的に滑らかな経路の場合も成り立つ結果として

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i(\xi, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial\xi(\sigma(t))}{\partial s_i}\frac{d\sigma_i(t)}{dt}dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\xi(\sigma(t))dt = \xi(\sigma(1)) - \xi(\sigma(0)) = \xi(1)$$

となる．したがって，確率経路値も全体合理性を満足する．

定理 3 ファジィゲーム $\xi \in \Delta^N$ と区分的に滑らかな有限実現可能経路提携集合 $F = \bigcup_{j=1}^{l} \sigma^j$，及び F 上の重みベクトル $p = (p_1, \ldots, p_l) \geq 0$ が与えられたとき，確率経路値 $\phi^p(\xi, F)$ は，ゲームに関する線形性，全体合理性，ナルプレイヤーに対するゼロ評価の 3 性質を満足する．

このように，経路値を考えることにすれば，点列 $\{s^k\}$ に対し s^k と s^{k+1} を例えば直線で結ぶことにより，区分的に滑らかな経路が得られる．この経路に沿っての経路値を直線結合点列値と呼ぶことにする．対応して，確率直線結合点列値を考えることも可能である．

5 クリスプゲームから拡張されたファジィゲームに対する値

ここでは，クリスプゲームから拡張されてできたファジィゲームについて，提携に制限のある場合の値について考えてみる．ここで，クリスプゲーム v を拡張して得られるファジィゲーム ξ_v とは，

$$\xi_v(e^S) = v(S), \ \ \forall S \subseteq N$$

を満たすファジィゲームのことをいう．

すでに注意したように，クリスプゲームは有限実現可能ファジィ提携集合 $E = \{e^S \mid S \subseteq N\}$ をもつファジィゲームとみなすことができる．v の拡張 ξ_v と E を組み合わせれば，もとの v を考えていることになるのは当然である．また，注意 3 に述べたように E の実現可能階段点列と N の順列が 1 対 1 対応する．よって次の結果が得られる．

定理 4 クリスプ協力ゲーム v を拡張して得られるファジィ協力ゲーム ξ_v に対し，その有限実現可能ファジィ提携集合 E のもとでの確率階段点列値ともとのゲーム v の確率順序値が 1 対 1 対応する．

さて，次に特殊な拡張について考える．よく知られているように，クリスプゲーム全体の空間 Γ^N は通常の和とスカラー倍によって $2^n - 1$ 次元の線形空間をなす．その基底となるのが満場一致ゲーム $u_T(T \neq \emptyset)$ である．すなわち，$T \subseteq N, T \neq \emptyset$ に対し，

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } S \supseteq T, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とすると，任意のクリスプゲーム $v \in \Gamma^N$ は，$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} d_T(v) u_T$ と満場一致ゲームの線形結合となる．このときの係数 $d_T(v)$ は，

$$d_T(v) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} v(S)$$

で与えられ，ゲーム v に対する T の (Harsanyi) ディヴィデンドと呼ばれる．便宜的に $d_\emptyset(v) = 0$ とおくことにすると，$v = \sum_{T \subseteq N} d_T(v) u_T$ と書くことができるので，以下ではこちらの簡明な表記の方を用いることにする．

さて，クリスプゲームを拡張してファジィゲームに得るには，何らかのルール，すなわち Γ^N から Δ^N への写像 g を用いればよい．得られたファジィゲーム $g(v)$ を以下では，記法の簡明のために ξ_v で表すことにする．写像 g が線形であれば，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，$v, w \in \Gamma^N$ に対し $\xi_{\alpha v + \beta w} = \alpha \xi_v + \beta \xi_w$ が成り立つので，

$$\xi_v = \sum_{T \subseteq N} d_T(v) \xi_{u_T}$$

となる．すなわち，満場一致ゲームのファジィ拡張を考えればよい（[8, 10, 11]）．さらに，$i \in T$ のとき $(s_{|T})_i = s_i$ で，それ以外のとき $(s_{|T})_i = 0$ となる場合の拡張を V-拡張と呼ぶ．代表的な V-拡張としては，それぞれ以下で定義される多重線形拡張（Owen [9]）と Lovász 拡張（Lovász[6]）がある．

$$m_{u_T}(s) = \prod_{i \in T} s_i, \quad l_{u_T}(s) = \min_{i \in T} s_i.$$

今ゲーム $v \in \Gamma^N$ の多重線形拡張 $m_v = \sum_{T \subseteq N} d_T(v) \prod_{j \in T} s_j$ を考え，F として唯一の滑らかな経路

$$\sigma(t) = (t, \ldots, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

からなる有限経路集合を考える．このとき，ゲーム m_v の F のもとでの確率経路値は，$\dfrac{\partial m_v(s)}{\partial s_i} = \sum_{T \ni i} d_T(v) \prod_{j \in T, j \neq i} s_j$ であることに注意すると

$$\phi_i(m_v, F) = \int_0^1 \frac{\partial m_v(t, \ldots, t)}{\partial s_i} dt = \int_0^1 \sum_{T \ni i} d_T(v) t^{|T|-1} dt = \sum_{T \ni i} \frac{d_T(v)}{|T|}$$

となるが，これはゲーム v の Shapley 値に他ならない．Shapley 値のこの表現はもちろんすでに Owen によって与えられているものであるが，ファジィ協力ゲームの実現可能経路集合のもとでの確率経路値としての解釈が可能であることが示された．

この結果は，点列値についても同様に成立する．実際，点列 $\{s^0, s^1, \ldots, s^l\}$，$s^k = (r_k, \ldots, r_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, l)$, $r_0 = 0$, $r_l = 1$ について考えると，

$$t_i(m_{u_T}, s^k) = \begin{cases} \frac{1}{|T|}(m_{u_T}(s^{k+1}) - m_{u_T}(s^k)) & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$$

であるから

$$\nu_i(m_{u_T}, \{s^k\}) = \frac{d_T(v)}{|T|}$$

となる．

次に Lovász 拡張についても同様に，同じ点列に関して

$$\nu_i(l_{u_T}, \{s^k\}) = \frac{d_T(v)}{|T|}$$

となり，Shapley 値が得られる．これは Shapley 値が対称性の公理を満たしていることを反映している．ただし，対称性のない拡張，例えば $n=2$ で $\xi_{u_N}(s) = s_1 s_2^2$ を考えると，同じ経路に対して

$$\phi_1(\xi_{u_N}, F) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \ \ \phi_2(\xi_{u_N}, F) = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}$$

となり，Shapley 値とは異なる値が得られる．これに対し，このときの点列値の方は，Shapley 値と一致する．これは，点列値には貢献したプレイヤーについてその貢献度を個別に測る力が不十分なためである．

これらの結果は以下のように一般化される．まず $\pi \in \Pi(T)$ を N 上の順列とし，$s \in [0,1]^n$ に対し次のようにおく．

$$(s^\pi)_i = \begin{cases} s_{\pi(i)}, & \text{if} \quad i \in T \\ s_i, & \text{if} \quad i \notin T. \end{cases}$$

定義 11 実現可能ファジィ提携集合 F は

$$s \in F \Longrightarrow s^\pi \in F, \ \ \forall \pi \in \Pi(N)$$

を満足するとき，対称であるという．

実現可能ファジィ提携集合が対称であれば，点列にしても経路にしても 1 つが実現可能であれば，その対称な点列，経路も実現可能となる．

定義 12 クリスプゲーム $v \in \Gamma^N$ の V-拡張 ξ_v は，すべての $T \subseteq N, T \neq \emptyset$ に対し

$$\xi_{u_T}(s^\pi) = \xi_{u_T}(s), \ \ \forall \pi \in \Pi(T)$$

を満足するとき，**対称な拡張**であるという．

定理 5 $v \in \Gamma^N$ をクリスプゲーム，ξ_v を対称な V-拡張とする．また，F は対称な有限実現可能ファジィ提携集合あるいは区分的に滑らかな有限実現可能経路集合とする．このとき，それぞれの場合の対称な重みベクトルに対する確率点列値及び確率経路値はゲーム v の *Shapley* 値に一致する．ここで重みベクトルが対称とは，互いに対称な実現可能点列あるいは実現可能経路に対する重みが等しいことをいう．

6 おわりに

本論文では，提携に制限のあるファジィ協力ゲームに対する値と題して，全体提携の得る利得のプレイヤー間での配分を考察した．空提携から全体提携への提携形成過程を考えることにより，点列に基づく確率階段点列値，確率点列値，および経路に基づく確率経路値を提案した．値の満たす性質として，ゲームに関する線形性，F-ナルプレイヤーのゼロ評価，全体合理性（有効性）が

挙げられる．さらにクリスプゲームから拡張されたファジィゲームに対し，Shapley値などのクリスプゲームに対する既存の値を，制限のあるファジィゲームの値として解釈することが可能であることを示した．今後の課題として，他の実現可能ファジィ提携集合の場合の値，値と集合値解（特にコア）の関係，値を特徴付ける公理系などがある．

なお，本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究（C）課題番号16510114による援助を受けている．

参考文献

[1] J.-P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, revised ed., North-Holland, 1982.

[2] J. M. Bilbao, *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] R. Brânzei, D. Dimitorov and S. Tijs, "Convex fuzzy games and partition monotonic allocation schemes," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 139, pp. 267–281, 2003.

[4] R. Branzei, D. Dimitorov and S. Tijs, "Hypercubes and compromise values for cooperative fuzzy games," *European Journal of Operational Research*, Vol. 155, pp. 733-740, 2004.

[5] R. Branzei, D. Dimitrov and S. Tijs, *Models in Cooperative Game Theory*, Springer-Verlag, 2005.

[6] L. Lovász L, "Submodular functions and convexity," in A. Bachem et al. (eds.), *Mathematical Programming: The State of the Art*, Springer-Verlag, pp. 235–257, 1983.

[7] A. Moritani, T. Tanino, K. Kuroki and K. Tatsumi, "Cooperative fuzzy games with restrictions on coalitions," *Proc. Third Int. Conf. Nonlin. Anal. Convex Anal.*, pp. 323–345, 2004.

[8] A. Moritani, T. Tanino and K. Tatsumi, "Cooperative fuzzy games extended from ordinary cooperative games with restrictions on coalitions," *Kybernetika*, to appear.

[9] G. Owen, "Multilinear extensions of games, *Man. Sci.*, vol. 18, pp.64-79, 1972.

[10] T. Tanino, "Cooperative fuzzy games as extensions of ordinary cooperative games," *Proc. 7th Czech-Japan Sem. Data Anal. Dec. Making under Uncertainty*, pp. 26–31, 2004.

[11] T. Tanino, A. Moritani, A. Kosugi and K. Tatsumi, "Cooperative fuzzy games extended from ordinary cooperative games with restrictions on coalitions," *Proc. 8th Czech-Japan Sem. Data Anal. Dec. Making under Uncertainty*, pp. 150–158, 2005.

[12] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, "The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games," *J. Japan Soc. Fuzzy Theory Syst.*, vol. 12, pp. 193–202, 2000.

[13] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, "A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games," *Europ. J. Oper. Res.*, vol. 129, pp. 596–618, 2001.