数理解析研究所講究録
1526 巻 2006 年 181-188

収益率にいくつかの可能性を考慮したポートフォリオ選択問題

大阪大学大学院　情報科学研究科　情報数理学専攻
蓮池　隆(Takashi Hasuike)，石井　博昭(Hiroaki Ishii)
Information Physics and Science,
Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University

1. 序論

本論文では株式等の金融資産における，将来の収益率に関するシナリオを想定したポートフォリオ選択問題およびその問題を解く際に必要となる非線形計画問題の大域最適解導出法の提案を行う.

株式投資などの金融資産選択問題は通常ポートフォリオ選択問題と呼ばれ，これまでにさまざまな研究が行われてきた. 数理的なアプローチとしては Markowitz[1]が提唱した平均分散モデルに始まり，W.Sharp[2,3]らの市場均衡下での株式投資のリターンが株式市場全体のリターンと関連を示す理論である，CAPM（資本資産価格付けモデル）と発展を遂げた。これらの理論は収益率を確率変数としてとらえ，その期待値，分散を用いることで取り扱いやすい理論となっていることから，多くの投資家はこれを基にして株式等の将来の収益率を予測しており，現在でもさまざまな場面で基本的なツールとして用いられている.

しかし近年，これらの理論では説明できないような現象が市場で確認されるようになった. 伝統的なポートフォリオ理論がシンプルな数式表現として書かれることや，その成り立つ仮定（効率市場仮説）が強すぎることもこの理論では説明できない現象が現れた要因となっていると考えられる. よってこの現象を他のアプローチで説明することはできないかといった観点から，現在さまざまな分野で研究が進められ，行動ファイナンス[4,5]や，経済物理学[6]と新たな分野が研究され始めている. またこれまでの伝統的なポートフォリオ理論をうまく拡張することによりこれらの現象を説明できるのではないかといった観点からも研究が進められている[7].

一方，伝統的なポートフォリオ理論で扱われている数理計画の観点から，数理計画のモデル式の係数などに不確実・不確定な要素を導入することによる，より柔軟なポートフォリオ選択問題の研究も進められている. 例えば，従来の CAPM に対し，曖昧さやさまざまな不確実さを導入したモデルも提案されている[8,9].

また収益率に関して，「将来この収益率になる可能性はかなり大きい.」，「あの収益率になる可能性も十分にある.」といったようなさまざまな可能性（シナリオ）をもつことも現実には十分ありうる. この場合，可能性がさまざまに存在するので収益率は不確定となり，確率計画問題だけのモデルや. 不確実性・不確定性両方を考慮してはいるもののファジィランダム計画問題のようなモデルと同等の数理計画問題にはならない. そこでこのモデルを十分に表現するために可能性を表現するシナリオを用いたポートフォリオ選択問題として考察を行う. これらの不確実性・不確定性を含むような問題は非線形計画問題となり，大域最適解を導出することは困難であることが多い. よって本論文ではこのような非線形計画問題に対し，大域最適解を導出できるような導出法の提案を行う.

2. 収益率シナリオの設定

本論文では 3 つの可能性が存在する場合を考察する．将来の収益率に関しては通常，好況と不況という 2 パターンではなく，その中間的な収益を考えることも重要であり，また投資対象となる群を考えた場合，ある 1 部分が上がれば他方は下がる，またその逆となる，余り変化を起こさないといったように，3 つのシナリオを考えることによりその適用範囲が格段に増えるものと考えられる．金融以外の分野においても，シナリオを考える際に 3 パターンを用意しておくことが，おかれている将来の状況をもっとも反映しながらシンプルに表現できるものとして考えられている．そのような観点から，3 つの可能性が存在する場合を考察していく．

以上のことを考慮して，将来の収益率に関するシナリオを次のように表す．

$$\mathbf{r} = \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \{r_{11}, r_{21}, \ldots, r_{n1}\}, & Pos(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1) = \mu_1 \\ \mathbf{r}_2 = \{r_{12}, r_{22}, \ldots, r_{n2}\}, & Pos(\mathbf{r} = \mathbf{r}_2) = \mu_2 \\ \mathbf{r}_3 = \{r_{13}, r_{23}, \ldots, r_{n3}\}, & Pos(\mathbf{r} = \mathbf{r}_3) = \mu_3 \end{cases} \tag{1}$$

ここでそれぞれの収益率は，$r_{ij} \sim N\left(\overline{r_{ij}}, \sigma_{ij}^2\right)$ となる正規分布に従うものとする．またそれぞれの収益率間の共分散に関しては，多くの場合，ある資産群と正の相関，または負の相関を示す場合が多い。よってそれらの相関は相関係数を用いて，次のような形で示される．

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \sigma_{ik}^2 & i = j \\ \rho\sigma_{ik}\sigma_{jk} & i \neq j, \text{ positive relation} \\ -\rho\sigma_{ik}\sigma_{jk} & i \neq j, \text{ negative relation} \end{cases}, \quad k = 1,2,3 \tag{2}$$

3. 3 つの可能性を考慮したポートフォリオ選択問題

本論文で示す 3 つの可能性を考慮したポートフォリオ選択問題は，収益率が可能性と確率要素両方を含んでいるため，すべての場合においてある可能性以上で，ある確率以上を満たすような利益最大化を目的とした，次のような数理計画問題として定式化される．

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad f \\ &s.t. \quad \text{Pos}\left\{\Pr\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i x_i \geq f\right\} \geq \beta\right\} \geq \alpha \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, \quad 0 \leq x_i \leq p_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{3}$$

本論文では 3 つのシナリオすべてを考慮した場合のポートフォリオ選択問題を考察する．3 つのシナリオごとに可能性の度合いが付加されているため，その可能性の度合いに応じた重みをつけた単一目的の数理計画問題を以下のように定式化する．

$$
\mathrm{P}: \quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \ W_1\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{r_{i1}}x_i + K_{\beta}\sqrt{(ax)'V_1ax}\right) + W_2\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{r_{i2}}x_i + K_{\beta'}\sqrt{(ax)'V_2ax}\right) \\
&\quad +W_3\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{r_{i3}}x_i + K_{\beta''}\sqrt{(ax)'V_3ax}\right) \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b,\ \ 0 \le x_i \le p_i,\ \ i=1,2,\ldots,n,\ \ W_1+W_2+W_3=1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

この数理計画問題は根号を含んだ凸計画問題となるため，大域最適解が存在することはわかるが，実際に最適解を求めることが困難である。よって最適解を導出しやすい形に主問題との整合性を失うことなく変形していく．まず上記の問題を見やすくするため，次のように線形項と非線形項に分けて記述する．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \ -\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i + W_1\sqrt{y'V_1y} + W_2\sqrt{y'V_2y} + W_3\sqrt{y'V_3y} \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ \ 0 \le y_i \le b_i,\ \ i=1,2,..,n
\end{aligned}
\tag{5}
$$

次に上の数理計画問題において，次のような補助問題P^1を導入する．

$$
P^1: \quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \ -R_1\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i + \frac{W_1}{2}\left(y'V_1y\right) + R_1W_2\sqrt{y'V_2y} + R_1W_3\sqrt{y'V_3y} \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ \ 0 \le y_i \le b_i,\ \ i=1,2,..,n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

この補助問題と主問題との間には次の定理が成り立つ．

定理 3.1　主問題 P と補助問題$P^1(R_1)$は，$P^1(R_1)$の最適解y_i^{1*}が$R_1 = \sqrt{y_1^{*\prime}V_1y_1^{*}}$を満たすとき，最適解が一致する．

<証明>

主問題 P と補助問題$P^1(R_1)$の KKT 条件を比較することで明らか．　□

以下同様に補助問題P^2およびP^3を導入する．

$$
P^2: \quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \ -R_1R_2\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i + R_2\frac{W_1}{2}\left(y'V_2y\right) + R_1\frac{W_2}{2}\left(y'V_1y\right) + R_1R_2W_3\sqrt{y'V_3y} \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ \ 0 \le y_i \le b_i
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
P^3: \quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \ -R_1R_2R_3\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i + R_2R_3\frac{W_1}{2}\left(y'V_1y\right) + R_1R_3\frac{W_2}{2}\left(y'V_2y\right) + R_1R_2\frac{W_3}{2}\left(y'V_3y\right) \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{n} y_i = b,\ \ 0 \le y_i \le b_i
\end{aligned}
\tag{8}
$$

これら2つの補助問題についても次の定理が成り立つ.

定理 3.2　補助問題P^1と補助問題P^2は，P^2の最適解y_i^{2*}が$R_2=\sqrt{y_2^{*\prime}V_2y_2^*}$を満たすとき，最適解が一致する.

定理 3.3　補助問題P^2と補助問題P^3は，P^3の最適解y_i^{3*}が$R_3=\sqrt{y_3^{*\prime}V_3y_3^*}$を満たすとき，最適解が一致する.

<証明>

どちらの場合においても，それぞれ補助問題P^1と補助問題P^2，補助問題P^2と補助問題P^3のKKT条件を比較することで明らか.　□

よって補助問題P^3の最適解を導出すれば，主問題の最適解も導出されることがわかる．また補助問題P^3はパラメータを含む形ではあるが，2次計画問題であり大域最適解が解析解の形で求めることができる．よってこれ以下は補助問題P^3の最適解導出について考察していく．ここでこのR_3に対して次の補題が成り立つ[10].

補題 3.1　$-R_1R_2\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i+R_2\frac{W_1}{2}\left(y'V_1y\right)+R_1\frac{W_2}{2}\left(y'V_2y\right)$は$R_3$に対して単調減少である.

補題 3.2　yV_3yはR_3に対して単調増加である.

以上の2つの補題3.1，3.2から，次の定理が成り立つ.

定理 3.4　P_3の最適解y_i^*とし，$K(R_3)=R_3-\sqrt{y^{*\prime}V_3y^*}$とおくと次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
R_3^*>R_3 &\Leftrightarrow K(R_3)<0\\
R_3^*=R_3 &\Leftrightarrow K(R_3)=0\\
R_3^*<R_3 &\Leftrightarrow K(R_3)>0
\end{aligned}$$

よって補助問題P_3は$R_3=R_3^*$のときのみ主問題の最適解となり，ただ1つに決定される.

以上のことをふまえて補助問題P_3の最適解を導出する．まず補助問題P^3のラグランジュ関数とKKT条件は次のように書くことができる.

（ラグランジュ関数）

$$L=-R_1R_2R_3\left(\sum_{i=1}^{n}\left(W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}\right)y_i\right.$$
$$\left.-\frac{W_1}{2R_1}\left(y'V_1y\right)-\frac{W_2}{2R_2}\left(y'V_2y\right)-\frac{W_3}{2R_3}\left(y'V_3y\right)\right)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-b\right)+\sum_{i=1}^{n}u_i\left(y_i-b_i\right)-\sum_{i=1}^{n}v_iy_i \tag{9}$$

（KKT 条件）

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -R_1R_2R_3\left(\left(W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}}\right) - \sum_{k=1}^{3}\frac{W_k}{R_k}\left(\widehat{\sigma_{ik}}^2 y_i + \rho\widehat{\sigma_{ik}}\sum_{i\neq j}^{n}\widehat{\sigma_{jk}}y_j\right)\right) + \lambda + u_i - v_i = 0 \quad (10)$$

$$u_i\left(y_i - b\right) = 0,\quad v_i y_i = 0,\quad i = 1,2,\ldots,n$$

この KKT 条件を解きやすくするため，KKT 条件の方程式を $R_1R_2R_3\,(>0)$ で割り，$R_j' = \dfrac{1}{R_j}$，$(j = 1,2,3)$ といったパラメータに関する変数変換を行う。すると KKT 条件は次のように書き直すことができる．

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\left(W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}}\right) + \sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k\left(\widehat{\sigma_{ik}}^2 y_i + \rho\widehat{\sigma_{ik}}\sum_{i\neq j}^{n}\widehat{\sigma_{jk}}y_j\right) + \lambda' + u_i' - v_i' = 0$$

$$u_i\left(y_i - b\right) = 0,\quad v_i y_i = 0,\quad i = 1,2,\ldots,n,\quad \lambda' = \frac{\lambda}{R_1R_2R_3}, u' = \frac{u}{R_1R_2R_3}, v' = \frac{v}{R_1R_2R_3} \quad (11)$$

またこの KKT 条件を次のように変形することができる。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\left(W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}}\right) + \sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k\left((1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2 y_i + \rho\widehat{\sigma_{ik}}t_k\right) + \lambda' + u_i' - v_i' = 0$$

$$u_i\left(y_i - b\right) = 0,\quad v_i y_i = 0,\quad i = 1,2,\ldots,n,\quad \lambda' = \frac{\lambda}{R_1R_2R_3}, u' = \frac{u}{R_1R_2R_3}, v' = \frac{v}{R_1R_2R_3} \quad (12)$$

$$t_k = \sum_{j=1}^{n}\widehat{\sigma_{jk}}y_j,\quad k = 1,2,3$$

よってこの KKT 条件を解くことにより，次のパラメータを含む最適解が得られる．

$$y_i^* = \begin{cases} b_i & \left(\lambda' \leq A_i\right) \\ \dfrac{W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}} - \rho\sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k\widehat{\sigma_{ik}}t_k - \lambda'}{\sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k(1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2} & \left(A_i \leq \lambda' \leq B_i\right) \quad i = 1,2,\ldots,n \\ 0 & \left(B_i \leq \lambda'\right) \end{cases}$$

$$A_i = W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}} - \sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k\left((1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2 b_i + \rho\widehat{\sigma_{ik}}t_k\right) \quad (13)$$

$$B_i = W_1\overline{r_{i1}} + W_2\overline{r_{i2}} + W_3\overline{r_{i3}} - \rho\sum_{k=1}^{3}R_k'^2 W_k\widehat{\sigma_{ik}}t_k$$

上記のように，この最適解はいくつかのパラメータを含んでいるため完全形の最適解ではない．しかしλの値または最適解となる場合の存在領域が決定されれば，他のパラメータの値も決定され，完全な形での大域最適解が求められることになる．そのためにまず最適解をとる場合にλが存在する範囲を決定する．これが決定されればどの資産がどのような形の最適解をとるかといったことが確定する．ここで上記の$t_k,(k=1,2,3)$およびλに関して，次の方程式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{l}\widehat{\sigma_{ik}}b_i+\sum_{i=l+1}^{m}\widehat{\sigma_{ik}}\left(\frac{W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}-\rho\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k\widehat{\sigma_{ik}}t_k-\lambda'}{\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k(1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2}\right)=t_k,\quad k=1,2,3 \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{l}b_i+\sum_{i=l+1}^{m}\left(\frac{W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}-\rho\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k\widehat{\sigma_{ik}}t_k-\lambda'}{\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k(1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2}\right)=b \tag{15}$$

この連立方程式(14)において，t_kに関する連立1次方程式となり，パラメータR_k',$(k=1,2,3)$の値が確定していればt_kやλの値を求めることは容易である．よってそれぞれのパラメータの値および各資産の最適解がどのような形を取るかを決定するために，本論文では二分法による最適解の解法を提案する．ここで次の補題を導入する．

補題 3.3 任意のj，$(j=1,2,3)$において，次の関数を導入する．

$$g(R_j)=\sum_{i=1}^{k}\widehat{\sigma_{ij}}^2\widehat{b_i}^2+\sum_{i=k+1}^{m}\widehat{\sigma_{ij}}^2\left(\frac{W_1\overline{r_{i1}}+W_2\overline{r_{i2}}+W_3\overline{r_{i3}}-\rho\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k\widehat{\sigma_{ik}}t_k-\lambda'}{\sum_{k=1}^{3}R_k'^2W_k(1-\rho)\widehat{\sigma_{ik}}^2}\right)^2$$

この関数$g(R_j)$に関して，

$$R_j^2-g(R_j)\to\alpha<0,\quad \text{for}\,R_1\to 0$$
$$R_j^2-g(R_j)\to\infty,\quad \text{for}\,R_1\to\infty$$

が成り立つ．

また定理3.4と$R_j^2-g(R_j)=0$が成り立つようなR_jの値はただ1つであることがそれぞれのパラメータについて独立に成り立つことから，次の最適解の方向性に関する定理が成り立つ．

定理 3.5 最適解への方向性について

① $R_j^2 - g\left(R_j\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad R_j$ ：減少方向

② $R_j^2 - g\left(R_j\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad R_j$ ：増加方向

③ この方向性に関する条件が，それぞれのパラメータ R_1, R_2, R_3 に対して独立に成り立つ．

この定理を用いた二分法による大域最適解の導出法は次の通りである．

アルゴリズム

STEP1：初期値として $i \leftarrow 0$ で，$R_j^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{b'V_j b}, \left(j = 1,2,3\right)$ を設定する．

STEP2：$R_j^{(i)}, \left(j = 1,2,3\right)$ を連立方程式(14)，(15)に代入し，$t_k^{(i)}$ および λ の値を決定する．

STEP3：STEP2 で決定されたパラメータの値の下で，$R_j^2 - g\left(R_j''\right), j = 1,2,3$ を計算する．

STEP4：STEP3 の値から定理 3.5 を考慮して，$R_j^{(i)}, \left(j = 1,2,3\right)$ の値を $\frac{3}{2}R_j^{(i)}$ または $\frac{1}{2}R_j^{(i)}$ に更新する．

STEP5：STEP 3 と STEP 4 を繰り返す．すなわち STEP4 で与えたパラメータ $R_j^{(i)}, \left(j = 1,2,3\right)$ の値に対し，STEP 3 での連立方程式を解くことにより $t_k^{(i)}$ および λ の値を求めることを繰り返す．最終的に $R_j^2 - g\left(R_j\right) = 0$ となれば，その値がそのときの値が最適値を決定するパラメータの値となり，大域最適解も決定される．

4. 結論

本論文では将来の収益率に関して，3 つのシナリオを想定したポートフォリオ選択問題で，特にそれぞれの収益率群に対しての相関も考慮したモデルを提案し，その際に問題が非線形計画問題となることから，その最適解導出法として平面内の交点からの最適解への方向性を考慮した解法を開発した．今後はより複雑な相関をもった場合や，最適解が離散値をとる場合の収益率に可能性を含んだポートフォリオ選択問題の考察を行う必要があると考えられる．

参考文献

[1] H.Markowits, *Portfolio Selection*, A Cowles Foundation Monograph(1959).

[2] W.F.Sharpe, "A simplified model for portfolio analysis", *Management Science*, **9**(1963) 277-293

[3] W.F.Sharpe, "Capital Asset Prices" : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of

Risk, *Journal of Finance*, **19**(1964)425-442

[4] Kahneman, Daniel, A.Tversky, "Prospect Theory: An Analysis of Decision Making Under Risk", *Econometrica*, **47** No.2 (1979) 263-291

[5] H.Shefrin, *Beyond Greed and Fear, Understanding Behavioral Finance and the Psychology of Investing*, Oxford University Press,(2002)

[6] H.Takayasu, *Application of Econophysics*, Springer Verlag, (2003)

[7] Fama, Eugene, "Efficient Survives the Attack of the Anomalies" GSB Chicago, (1998) 14-16

[8] M.Inuiguchi and J.Ramik, "Possibilisitc linear programming: A brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem", *Fuzzy Sets and Systems*, 111 (2000) 3-28.

[9] H.Katagiri, M.Sakawa and H.Ishii, "A study on fuzzy random portfolio selection problems using possibility and necessity measures", *Scientiae Mathematicae Japonocae*, **65** No.2 (2005) 361-369

[10] 蓮池　隆, 様々なポートフォリオ選択問題に関する数理的研究, 大阪大学大学院修士論文 (2006)