数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 67-73

On the finite extinction time of the Ricci flow on certain 3-manifolds
~T. H. Colding と W. P. Minicozzi II の論文から~

名古屋大学・多元数理科学研究科　川上　裕 (Yu Kawakami)[1]
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

1 序

向き付けられた閉3次元多様体 M^3 の分類を意味する Thurston の幾何化予想（有名な Poincaré 予想はこれに含まれている）を解決する手法として，1980年代に Richard Hamilton により Ricci flow を用いた幾何解析的手法が導入され，幾つかの興味深い結果が示された．その研究結果から提唱された，いわゆる "Hamilton program" に関して近年 Grisha Perelman により画期的な結果（[Pe1], [Pe2], [Pe3]）が提出され，現在その議論の正当性を示す幾つかの検証論文（例えば [CZ], [KL], [MT] などが挙げられる）が出されている．ところで，Ricci flow の解は時間局所的には常に存在するが，一般には有限時間内に特異性が生じる．この特異性を活かして，多様体の分解を考えるのが Hamilton program の主張の1つである．その際，"surgery" と呼ばれる手法を用いるのだが，この "surgery" を伴う Ricci flow が有限時間内に extinction するかどうかは Ricci flow と topology との関係を調べる上で非常に重要である（ここで flow が <u>extinction</u> するとは，各点でのスカラー曲率が発散することを意味している）．実際，Perelman は論文 [Pe2] で次のことを証明している．

定理 1.1 (Perelman [Pe2]). M^3 上の 1-parameter 計量 $g(t)$ が Ricci flow の方程式

$$\partial_t g = -2Ric_{M_t} \tag{1}$$

をみたし，有限時間内で extinction するならば，初期時間における3次元多様体 $(M^3, g(0))$ は3次元球面 S^3 の商空間と $S^2 \times S^1$ との連結和で表される多様体と微分同相になる．

今回紹介する Colding と Minicozzi II の論文 [CM] の主結果は，この定理の逆にあたるものである．Colding たちがこの問題を取り組むきっかけとなったのは Perelman による次のような質問である（[CM] の序文にそのときのことについて記してある）．

> 3次元球面上のかってな計量で Ricci flow を走らせたらどのようなことが起こるのか？特に flow は有限時間内に extinction するのではないか？

[1] *E-mail Address*: m02008w@math.nagoya-u.ac.jp

この質問を理解する上で重要な例を1つあげる．

例 1.2 (標準計量の有限時間特異性)．3次元球面 S^3 の標準計量 g_{can} を初期値とする 1-parameter metric $g(t)=r(t)g_{can}$ （但し $r(0)=1$） を考えると，Ricci tensor が $R_{ij}(t)=2g_{ij}$ （但し，g_{ij} は標準計量 g_{can} の成分） となるので，これを Ricci flow の方程式 (1) に代入すれば，$r(t)=1-4t$ を得，$t=1/4$ で計量がつぶれることがわかる．このときの計量 $g(t)$ のスカラー曲率は

$$R(t)=\frac{3}{2\{(1/4)-t\}}$$

となり，$t=1/4$ で発散する．従って，この flow は有限時間内で extinction する．

今回紹介する主結果はその質問の答えである．

定理 1.3 (Colding-Minicozzi [CM], Perelman [Pe3])．M^3 を，$g=g(0)$ を初期計量にもつホモトピー球面とする．この多様体で Ricci flow $g(t)$ を考えたとき，$g(t)$ は必ず有限時間内で extinction する．

注意 1.4. この結果は non-aspherical （ある $k>1$ に対して $\pi_k(M)\neq 0$ となる多様体） で素な向き付けられた閉3次元多様体に対しても成り立つ．

本稿では, Colding-Minicozzi がこの主結果の証明のために用いた "width" と呼ばれる量の評価式とその証明の概略を紹介する．

2 widthの定義と主結果の証明について

この節では，主結果を示すための "width" と呼ばれる量の定義とその評価式について述べる．向き付けられた閉3次元多様体 M^3 が non-aspherical であるとき，球面定理や Hurewicz isomorphism theorem といった topology の結果から $\pi_3(M)\neq 0$ であることがわかり，さらにそのことから2次元球面 S^2 から M への写像の成す (Sobolev) 空間が単連結ではないことがわかる（詳しくは論文 [MM] 参照）．よって，この多様体に対して "width" という量を定義することができる．

定義 2.1 (Colding-Minicozzi [CM])．$\beta(0)$ と $\beta(1)$ が定値写像であり，かつ非自明なホモトピー類 $[\beta]$ に属する連続写像 $\beta\colon[0,1]\to C^0\cap L^2_1(S^2,M)$ を1つ固定する．このとき，"width" $W(g)=W(g,[\beta])$ を次のように定義する．

$$W(g)=\min_{\gamma\in[\beta]}\max_{s\in[0,1]}\mathrm{Energy}(\gamma(s))\,. \tag{2}$$

注意 2.2. "width" の定義 (2) ではエネルギー汎函数を用いて定義しているが面積汎函数を用いて定義しても同じ量になる．このことから，"width" と呼ばれる量の幾何学的意味は『sweep-out の中で切り口 (slice) が最大となるものを考え，その中でできる面積最小曲面（極小曲面）の面積』であると解釈することができる．

さて，Ricci flow の解 $g(t)$ によって定義される width の微分に関して次の評価式が成り立つ．

定理 2.3 (Colding-Minicozzi [CM]). M^3 を $g = g(0)$ を初期計量にもつ non-aspherical な向き付けられた閉 3 次元多様体とする．この多様体上の 1-parameter 計量 $g(t)$ が Ricci flow の方程式 (1) をみたすならば，その計量に関する width $W(g(t))$ は次の式をみたす．

$$\frac{\bar{d}}{dt}W(g(t)) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)}W(g(t))\,. \tag{3}$$

但し，

$$\frac{\bar{d}}{dt}W(g(t)) = \limsup_{h\to+0}\frac{W(t+h)-W(t)}{h}$$

である．

注意 2.4. この評価式 (3) に現れる量はそれぞれ幾何的な結果によって生じるものである．実際，-4π は Gauss-Bonnet の定理から生じ，$3/4$ は Ricci flow のスカラー曲率が従う発展方程式の解の最小値（下限）から生じるものである．C は初期計量に依存した定数であるが，実際の値はこの結果には重要ではない．

この評価式から主結果である定理 1.3 を導くことができる．実際、評価式 (3) より，

$$\frac{\bar{d}}{dt}W(t)(t+C)^{-3/4} = (t+C)^{-3/4}\Big(\frac{\bar{d}W(t)}{dt} - \frac{3W(t)}{4(t+C)}\Big) \leq -4\pi(t+C)^{-3/4}\,.$$

よって，両辺を t に関して 0 から T まで積分すると，

$$(T+C)^{-3/4}W(g(T)) \leq C^{-3/4}W(g(0)) - 16\pi\{(T+C)^{1/4} - C^{1/4}\} \tag{4}$$

が成り立つ．定義より $W \geq 0$ であり，(4) の右辺は T が十分大きいとき負の値になることから定理 1.3 の結果が従う．よって，定理 2.3 の width に関する評価式 (3) を証明すれば定理 1.3 の証明が完成することになる．以後の節ではこの評価式 (3) の証明について述べることにする．

3　minimal 2-sphere の面積増大度の評価

この節では，この後の証明で用いられる non-aspherical な閉 3 次元多様体内の minimal 2-sphere の面積増大度の評価式について述べる．今 $\Sigma \subset M^3$ を単なる closed immersed surface とし，$g(t)$ を Ricci flow の式 (1) をみたす M^3 上の 1-parameter 計量とする．このとき，次の式が成り立つ（詳しくは [Ha] の 38 ページから 41 ページを参照）．

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area_{g(t)}(\Sigma) = -\int_{\Sigma}[R - Ric_M(\mathbf{n},\mathbf{n})]\,, \tag{5}$$

但し R, Ric_M はそれぞれ M のスカラー曲率，リッチ曲率（3 次元球面 S^3 に対して $R=6$, $Ric=2$ となるように正規化しておく），$\mathbf{n}$ を Σ に対する単位法ベクトルとする．さらに，Σ が closed minimal immersed surface のとき，次の式が成り立つ．

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area_{g(t)}(\Sigma) = -\int_\Sigma K_\Sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma (|A|^2 + R)\,, \tag{6}$$

但し，K_Σ, K_M はそれぞれ M, Σ の Gauss 曲率，A は Σ の第 2 基本形式（つまり $|A|^2$ は主曲率の平方の和となる）である．実際，リッチ曲率とスカラー曲率の定義から導くことができる

$$R = 2K_M + 2Ric_M(\mathbf{n},\mathbf{n})$$

とガウス方程式と Σ の極小性（主曲率の和が 0）から導くことができる

$$K_\Sigma = K_M - \frac{1}{2}|A|^2$$

を (5) に代入することで (6) を得ることができる．式 (6) から次の結果を得る．

補題 3.1 (Colding-Minicozzi [CM]). $\Sigma \subset M^3$ を分岐した closed minimal immersed sphere（以後これを分岐した minimal 2-sphere と呼ぶことにする）としたとき，次の式が成り立つ．

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area_{g(t)}(\Sigma) \le -4\pi - \frac{Area_{g(0)}(\Sigma)}{2}\min_M R(0)\,. \tag{7}$$

Proof. 集合 $\{p_i\}$ を Σ の分岐点の集合とし，$b_i > 0$ を p_i における branching order とする．このとき (6) と分岐点を伴う閉曲面に対する Gauss-Bonnet の定理から

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area_{g(t)}(\Sigma) \le -\int_\Sigma K_\Sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma R = -4\pi - 2\pi\sum_i b_i - \frac{1}{2}\int_\Sigma R\,.$$

よって，この補題が示された．□

また，Ricci flow の解 $g(t)$ のスカラー曲率 R は発展方程式

$$\partial_t R = \Delta R + 2|Ric|^2 \ge \Delta R + \frac{2}{3}R^2 \tag{8}$$

をみたすので，弱最大値原理（詳しくは [To] 参照）から次の補題が成り立つ．

補題 3.2. Ricci flow の式 (1) をみたす M^3 上の 1-parameter 計量 $g(t)$ のスカラー曲率 $R=R(t)$ に対して，ある定数 C が存在し，$t>0$ のとき次の不等式が成り立つ．

$$R(t) \ge -\frac{3}{2(t+C)}\,. \tag{9}$$

式 (7) と (9) を組み合わせることで，次の式が得られる．

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area_{g(t)}(\Sigma) \le -4\pi + \frac{3Area_{g(0)}(\Sigma)}{4(t+C)}\,. \tag{10}$$

4 widthの増大度の評価式の証明について

この節では，前節で示したminimal 2-sphereの面積増大度の評価を用いて，定理2.3を証明する．まず，width $W(g)$ とminimal 2-sphereとの関係について，次の結果が知られている．

命題 4.1 (Jost[Jo], Micallef-Moore[MM], Siu-Yau[SY]). non-asphericalな閉3次元多様体M^3上で与えられた計量gと非自明なホモトピー類$[\beta] \in \pi_1(C^0 \cap L_1^2(S^2, M), M)$に対して，ある$[\beta]$に属するsweep-outの列$\gamma^j\colon [0,1] \to C^0 \cap L_1^2(S^2, M)$が存在し，

$$W(g) = \lim_{j\to\infty} \max_{s\in[0,1]} Energy(\gamma_s^j)\,.$$

さらに，ある点列$s_j \in [0,1]$とindexが高々1の分岐したconformal minimal immersion $u_0, u_1, \ldots, u_m\colon S^2 \to M$が存在し，$j \to \infty$のとき，写像の列$\gamma_{s_j}^j$は$S^2 \backslash \{x_1, \ldots, x_k\}$上のコンパクト部分集合で一様にかつ$u_0$に$L_1^2$の意味で弱収束し，次の式が成り立つ．

$$W(g) = \sum_{i=0}^{m} Energy(u_i) = \lim_{j\to\infty} Energy(\gamma_{s_j}^j)\,.$$

最後に，各$i > 0$に対して，点列$\{x_{k_i}\}$とx_{k_i}におけるconformal dilation $D_{i,j}\colon S^2 \to S^2$が存在して，写像$\gamma_{s_j}^j \circ D_{i,j}$が$u_i$に収束する．

さらに上手く変形することによって，命題4.1で述べたsweep-out γ_jのmin-max列に対して，次の性質を付け加えることができる．

性質 4.2. 次のような性質をみたす列$\{\gamma_j\}$が存在する: 与えられた$\epsilon > 0$に対して，あるJとgとγ_jに依存する$\delta > 0$が存在し，もし$j > J$で

$$Energy(\gamma_s^j) > W(g) - \delta \tag{11}$$

ならば，indexが高々1の分岐したminimal 2-sphereの集まり$\{\Sigma_i\}$が存在し，次の式が成り立つ．

$$d_{var}(\cup_i \Sigma_i, \gamma_s^j) < \epsilon\,. \tag{12}$$

但し，d_{var}とはvarifold distanceのことを意味する（定義などの詳しいことは[CL]の第4章を参照）．

上の性質を端的に言えば，『Energy($\gamma_{s_k}^k$)がwidth $W(g)$とほぼ同じ大きさであれば，$\gamma_{s_k}^k$はindexが高々1の分岐したminimal 2-sphereの和集合にvarifoldの意味で近づく』ということである．これから証明に用いることは式(12)から容易に導くことができる次のことである: FをM上の2次形式，γ_s^jをΓで表すと次の式が成り立つ．

$$\left| \int_\Gamma [Tr(F) - F(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma)] - \sum_i \int_{\Sigma_i} [Tr(F) - F(\mathbf{n}_{\Sigma_i}, \mathbf{n}_{\Sigma_i})] \right| < C\epsilon \|F\|_{C^1} Area(\Gamma)\,. \tag{13}$$

以上の準備を踏まえて，定理2.3を証明する．時間τを1つ固定し，$\gamma_j(\tau)$を命題4.1の性質をみたす計量$g(\tau)$の sweep-out の列とし，$\delta > 0$とJを(11), (12), (13)をみたすものとする．今，$j > J$で$Energy_{g(\tau)}(\gamma_s^j(\tau)) > W(g) - \delta$であると仮定し，$\cup_i \Sigma_{s,i}^j(\tau)$を性質4.2内の分岐した minimal 2-sphere の集まりとする．式(13)で$F = Ric$とすると，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} Area_{g(\tau)}(\gamma_s^j(\tau)) &\le \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} Area(\cup_i \Sigma_{s,i}^j(\tau)) + C\epsilon \|Ric_M\|_{C^1} Area_{g(\tau)}(\gamma_s^j(\tau)) \\
&\le -4\pi + \frac{3Area_{g(\tau)}(\gamma_s^j(\tau))}{4(t+C)} + C_a\epsilon \\
&\le -4\pi + \frac{3\max_{s\in[0,1]} Energy_{g(\tau)}(\gamma_s^j(\tau))}{4(t+C)} + C_a\epsilon\,.
\end{aligned}$$

よって，$Area_{g(t)}(\gamma_s^j(t))$を$t = \tau$付近で order 2 の Taylor 展開をすることで，τとjによらない十分小さいhに対して次の式が成り立つ．

$$\frac{Area_{g(\tau+h)}(\gamma_s^j) - Area_{g(\tau)}(\gamma_s^j)}{h} \le -4\pi + \frac{3\max_{s\in[0,1]} Energy_{g(\tau)}(\gamma_s^j)}{4(t+C)} + C_a\epsilon + C_b h \tag{14}$$

また，一般に$Area_{g(t)}(\gamma_s^j) \le Energy_{g(t)}(\gamma_s^j)$であり，$j \to \infty$としたとき

$$\max_{s\in[0,1]} Energy_{g(t)}(\gamma_s^j) \to W(g(t))$$

であることより，

$$\frac{W(g(\tau+h)) - W(g(\tau))}{h} \le -4\pi + \frac{3}{4t+C} W(g(\tau)) + C_a\epsilon + C_b h \tag{15}$$

上の式(15)の上極限をとり，$\epsilon \to 0$とすれば式(3)を得る．また，$Energy(\gamma_s^j(\tau)) \le W(g) - \delta$のとき，計量$g(t)$の連続性から$h$を十分小さくとることによって(14)を得ることができるので，この場合にも式(3)を得ることができる．これで定理2.3を証明することができた．

5 追記

今回紹介したのは Colding-Minicozzi による証明であるが，Perelman のプレプリント [Pe3] にはこれとは別のやり方（例えば，Perelman は minimal 2-sphere ではなく minimal disk を考えている．）で有限時間内の extinction を証明している．Perelman による証明に関しては Morgan-Tian のプレプリント [MT] に詳しく記されている．ちなみに，Morgan-Tian からみると Colding-Minicozzi による証明は Perelman のものより技術的に少し難しく感じるようである．(Colding-Minicozzi の論文 [CM] には Perelman の証明の方が技術的に難しいと記してある．)

参考文献

[CL] T. H. Colding and C. De Lellis, *The min-max construction of minimal surfaces*, Surveys in differential geometry, Vol. VIII, International Press, Somerville, MA, 2003, math.AP/0303305.

[CM] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 561–569.

[CZ] H. D. Cao and X. P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. of Math. **10** (2006), 169–492.

[Ha] R. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II, International Press, Cambridge, MA, 1995.

[Jo] J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, J. Wiley and Sons, Chichester, N.Y. (1991).

[KL] B. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's paper*, preprint, math.DG/0605667.

[MM] M. J. Micallef and J. D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), 199-227.

[MT] J. W. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, preprint, math.DG/0607607.

[To] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 325, Cambridge, 2006.

[Pe1] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, math.DG/0211159.

[Pe2] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, math.DG/0303109.

[Pe3] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, math.DG/0307245.

[SY] R. Schoen and S. T. Yau, *Lecture on harmonic maps*, International Press, 1994.