数理解析研究所講究録
1534巻 2007年 1-6

Square root closed C^*-algebras

千葉大学自然科学研究科　山本 宗宏 (Munehiro Yamamoto)
Graduate School of Science and Technology,
Chiba University

0 序論

1960年代に，D. Deckard と C. Peacy[1, 2] は，「可換な AW^* 環 M に対して，M 値係数のどんな代数方程式も M に解を持つ.」ことを示しました.

同様な問題を必ずしも可換でない C^* 環に対して考えます. 特に，2次方程式 $(x^2=a)$ に制限した設定で問題を据えることにします. つまり，以下のような定義を考えます：

定義 C^* 環 A が**平方根を持つ** (square root closed) とは，任意の正規元 $a \in A$ に対して，$a=b^2$ となるような正規元 $b \in A$ が存在するときをいう.

C^* 環 A が**近似的な平方根を持つ** (approximately square root closed) とは，任意の $\varepsilon > 0$ と正規元 $a \in A$ に対して，$\|a-b^2\| < \varepsilon$ となるような正規元 $b \in A$ が存在するときをいう.

可換 C^* 環 $A(\cong C(X))$ の場合は，空間 X の "次元" が低い場合には，

$$\pi_1(X): \text{基本群} \longleftrightarrow K_1(C(X)): K_1\ \text{群}$$

が対応します. 具体的には $C([0,1])$ と $C(\mathbb{T})$ を比較しますと，下表のようになります.

	平方根	K_1 群
$C([0,1])$	持つ	0
$C(\mathbb{T})$	持たない	$\mathbb{Z}$

ここで，$\mathbb{T}=\{z \in \mathbb{C} : \|z\|=1\}$.

実際に，A が安定階数1であることと X の被覆次元が1以下であることが同値であり，

A が安定階数 1 ならば，A が近似的に平方根を持つことと $K_1(A)$ が 2 で割れることが同値であることが分かります．

非可換な場合は，$M_n(C([0.1]))$ は平方根を持ちませんが，近似的な平方根を持つことが言えますので，「平方根を持つ」ことと「近似的に平方根を持つ」ことに差がある具体例となります．

論文 [5] で以下の結果を得られました．

(1) AI 環は近似的な平方根を持つ．

(2) 単位元を持つ C^* 環 A に対して，$A \otimes M_{2^\infty}$ は近似的な平方根を持つ．

(3) $\mathbb{T}$ 上の Goodearl 型 C^* 環 A に対して，A が近似的な平方根を持つことと，$K_1(A)$ が 2 で割れることが同値．

(4) 純粋無限，単純，単位元を持つ C^* 環 A に対して，A が近似的な平方根を持つことと，$K_1(A)$ が 2 で割れることが同値．

この報告集では，(4) を紹介します．

1 純粋無限，単純，単位元をもつ C^* 環

定理 A を純粋無限，単純，単位元を持つ C^* 環とする．このとき以下は同値．

(1) A が近似的な平方根を持つ．

(2) $K_1(A)$ が 2 で割れる．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) の証明は，A の純粋無限性と単純性より，$K_1(A) \cong U(A)/U_0(A)$ ($U_0(A)$ は A のユニタリ群 $U(A)$ の中で，単位元と連結なユニタリからなる閉正規部分群.) となるので，A のユニタリに対して考えれば十分となり，(1) の仮定からすぐに帰結します．

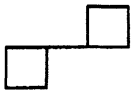
(2) $\Rightarrow$ (1) の証明は，議論が長くなりますので，その概略を説明します．

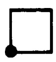
以下，元 a, b と $\varepsilon > 0$ に対して，記号 $a \underset{\text{unitary}}{\approx} b$ を，あるユニタリ u が存在して uau^* と b が十分に近いことを表すことにします．

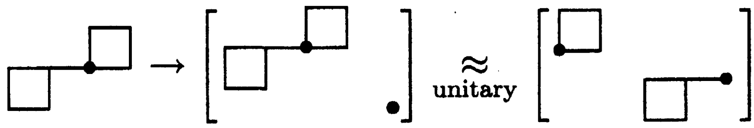
任意の正規元 $x \in A$ と十分小さな $\varepsilon > 0$ を与えます．P. Friis と M. Rørdam の結果 [3, Proposition 3.4] より，

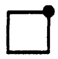
$$\mathrm{Sp}(z) \subset \{a + b\sqrt{-1} : a \in \varepsilon\mathbb{Z} \text{ または } b \in \varepsilon\mathbb{Z}\}, \quad \|x - z\| < \varepsilon$$

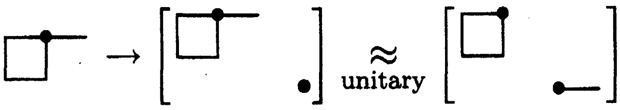
となるような正規元 $z \in A$ を取ることができます．大雑把に説明をするために，

$\mathrm{Sp}(z) =$ 

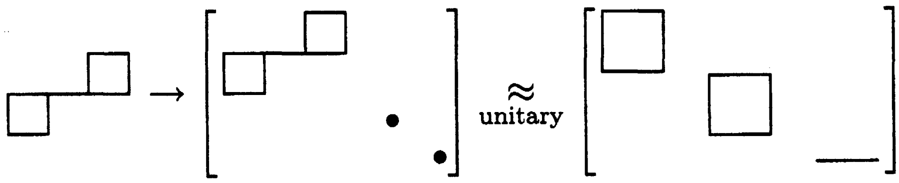
とします．z に対して，まず操作 (I) を行うことにより，， をスペクトルに持つ正規元がそれぞれ存在して

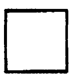
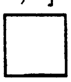
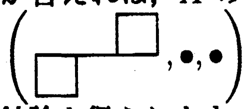
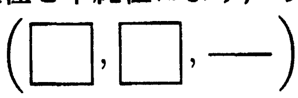
(I): 

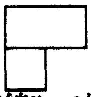
とすることができます．次に操作 (II) を行うことにより，， をスペクトルに持つ正規元がそれぞれ存在して

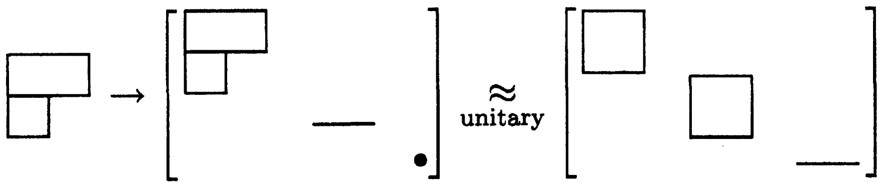
(II): 

とすることができます．操作 (I) と (II) を合わせると，

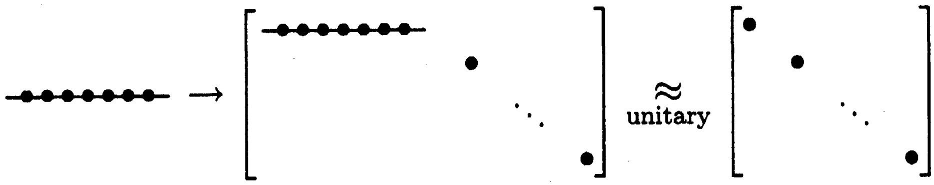
(I) + (II): 

となります．このとき  $\cong \mathbb{T}$ の内側に原点を含まないスペクトルを持つ正規元と —— $\cong [-1,1]$ をスペクトルに持つ正規元は，それぞれ平方根を持ちます．したがって，もし「 $\cong \mathbb{T}$ の内側に原点を含むスペクトルを持つ正規元が平方根を持つ」ことが言えれば，A の純粋無限性と単純性により，ある射影 r で切った rAr の中に，diag  と diag  のコピーを取ることができるので，結論を得られます． □

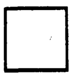
一般には，例えば $\mathrm{Sp}(z) =$  のような場合，操作 (I) や (II) のような "点" で切る操作と同じようにして，"直線" で切る操作を行うことができて，



となり，左の行列に —— をスペクトルに持つ正規元が現れてしまいます．そこでこの —— をスペクトルに持つ正規元に対して，操作 (I)，(II) のような "点" で切る操作を繰り返し行うことにより，



とできますので，結局 (I) + (II) の場合に帰着されます．

後は，「 $\cong \mathbb{T}$ の内側に原点を含むスペクトルを持つ正規元が平方根を持つ」ことが言えればよいのですが，そのためには次の命題を示せれば十分です．

命題 A を純粋無限，単純，単位元を持つ C^* 環，$u \in A$ を $[u] \in K_1(A)$ が 2 で割れるようなユニタリとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left\| u - v^2 \right\| < \varepsilon$$

となるようなユニタリ $v \in A$ が存在する．

この命題の証明では，A の実階数 0 と同値な条件である「性質 (HP)」と「性質弱 (FU)」が，それぞれ行列につみあげる射影を作る前半の議論，ユニタリのスペクトルを行列に積み上げたところで有限スペクトル分解（ある種の "点" で切る操作）をする後半の議論で効いています．また前半で作った射影で行列に積み上げたところの元を，元の A の世界に戻す議論は上記の定理の証明 (2) ⇒ (1) と同様で，A の純粋無限性と単純性により引き戻します．

命題の証明. 十分小さな ε に対し，$\mathrm{Sp}(u)=\mathbb{T}$ の ε 稠密な有限部分集合を F （つまり，任意の $\xi\in\mathbb{T}$ に対して，$|\xi-\eta|<\varepsilon$ となるような $\eta\in F$ が存在する.）とすると，ある $\delta>0$ が存在して

$$S_\eta=\{\xi\in\mathbb{T}:|\xi-\eta|<\delta\}\quad(\eta\in F),\quad i\neq j\Rightarrow S_{\eta_i}\cap S_{\eta_j}=\emptyset$$

となるような $\mathbb{T}$ の開部分集合族 $\{S_\eta\}_{\eta\in F}$ がとれます．このとき，各 $\eta\in F$ に対して，連続関数 $f_\eta\colon\mathbb{T}\to[0,1]$ を，

$$\xi=\eta\Rightarrow f_\eta(\xi)=1,\quad \xi\notin S_\eta\Rightarrow f_\eta(\xi)=0$$

をみたすように定めます．A は性質 (HP) を持つので，u の十分近くにユニタリ $u_0\in A$ と互いに直交する射影の族 $\{e_\eta\}_{\eta\in F}$ を

$$e_\eta u_0=u_0e_\eta=\eta e_\eta\quad(\eta\in F)\tag{$*$}$$

となるように取ることができます．実際に，H. Lin の結果 [4, Lemma 2] を適用すると，

$$\left\|\left\{\sum_\eta\eta e_\eta+\left(1-\sum_\eta e_\eta\right)u\left(1-\sum_\eta e_\eta\right)\right\}-u\right\|<\varepsilon$$

をみたす互いに直交するような射影の族 $\{e_\eta\}_{\eta\in F}$ を取れます．$e=1-\sum_\eta e_\eta$ とおくと，十分近くで eue をユニタリ $u_1\in eAe$ に取り換えられて，

$$\left\|\left(\sum_\eta\eta e_\eta+u_1\right)-u\right\|<\varepsilon$$

とすることができます．ユニタリ $\sum\eta e_\eta+u_1$ を u_0 とおけば，($*$) をみたします．

$[u_1]=[u]\in K_1(A)$，$K_1(A)\cong K_1(eAe)$ から，$[u_1]=-2[v]$ となるようなユニタリ $v\in eAe$ が存在します．特に $\mathrm{diag}(u_1,v^2)\in U_0(M_2(eAe))$ なので，$M_2(eAe)$ が実階数 0 であることと $F\subset\mathbb{T}$ から，$\mathrm{diag}(u_1,v^2)$ の十分近くに有限スペクトルをもつユニタリ $\sum_{i=1}^n\eta_iq_i$ （$\eta_i\in F$，$q_i\in eAe$）が取れます．ここで A の純粋無限性と単純性を用いて，$[r_i]=[q_i]\in K_0(A)$ となるような射影 $r_i\le e_{\eta_i}$ が取れるので，それらの和を $r=\sum_i r_i$ とおくと，rAr の中に $\mathrm{diag}(u_1,v^2)$ のコピーを取れます．そのユニタリを $u_2\in rAr$ とします．したがって，ユニタリ $u_3=(u_1+u_2)+(1-e-r)u_0\in A$ を考えれば，u_1+u_2 は

$$\begin{bmatrix}u_1&&\\&u_1&\\&&v^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&u_1&\\e&&\\&&e\end{bmatrix}^2\in M_3(eAe)$$

となり，$(1-e-r)u_0$ は有限スペクトルを持つので，結局，u_3 は近似的なユニタリの平方根を持つことが分かります． □

以上により，目的の定理を示すことができます．

参考文献

[1] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322–328.

[2] ———, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 259–263.

[3] P. Friis and M. Rørdam, *Almost commuting self-adjoint matrices — a short proof of Huaxin Lin's theorem*, J. Reine Angew. Math. **479** (1996), 121–131.

[4] H. Lin, *Approximation by normal elements with finite spectra in simple AF-algebra*, J. Operator Theory **31** (1994), 33–98.

[5] H. Matui, M. Nagisa, and M. Yamamoto, *Square root closed C^*-algebras*, preprint.