数理解析研究所講究録
1535巻 2007年 82-95

Stability of delay difference equations and its applications

東京理科大学理学部　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

変数遅れを持つ非線形差分方程式

$$\begin{cases} x(n+1) = qx(n) - \sum_{j=0}^{m} a_j(n) f_j(x(n-j)), & n = 0, 1, 2, \cdots, \\ x(j) = x_j, \quad -m \le j \le 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ここで，$0 < q \le 1$ かつ，$f(x)$ は $(-\infty, +\infty)$ での狭義単調増加関数で，

$$\begin{cases} f(0) = 0, \quad 0 < \frac{f_j(x)}{f(x)} \le 1, \quad x \ne 0, \quad 0 \le j \le m, \\ f(x) \ne x, \text{ ならば, } \lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ は有限.} \end{cases} \tag{1.2}$$

また，$a_j(n) \ge 0$, $0 \le j \le m$ は $\sum_{j=0}^{m} a_j(n) > 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j(n) = +\infty$ を満たすとする．

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは，任意の $\varepsilon > 0$ と非負の整数 n_0 に対して，(1.1) の解 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が $|x(n)| < \varepsilon$, $n = n_0, n_0+1, \cdots$ を満たす $\max\{|x(n_0-j)| \mid j = -k, -k+1, \cdots, 0\} < \delta$ となる $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在することである．

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域吸引性**を持つとは，(1.1) のすべての解が $n \to \infty$ に対し，0 に収束することである．

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域漸近安定**であるとは，一様安定であり，かつ大域吸引性を持つことである．

特に $q = 1$ の場合，(1.1) の零解が大域漸近安定であるための十分条件として，たとえば，$f(x) = x$ に対しては Yu (1998), Matsunaga, Hara, Sakata [20]，一般化 Yorke 条件を満足する場合には Tkachenko, Trofimchuk [29] 等の $\sup_{n \ge 0} \sum_{j=0}^{m} a_j(n) \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2(m+1)}$ が知られている．その他にも Muroya, Ishiwata, Guglielmi [24] や Uesugi, Muroya, Ishiwata [30] 等が従来の結果を大幅に拡張している．

さらに，$0 < q < 1$ の場合 (詳細は Tkachenko, Trofimchuk [28]，室谷，石渡 [21] 参照) や Volterra 積分方程式から得られる非有界遅れを持つ差分方程式にまで応用可能である．

本報告では頁数の制約もあるので，1つ目の話題として，2節では Clark モデルについて紹介する (主に Muroya, Ishiwata [22] 参照)．これは (1.1) に関して $q = 1$ の場合の結果を $0 < q \le 1$ まで拡張するきっかけになった問題であり，Nicolson blowflies モデル等の unimodal タイプで $f(x)$ の単調性を仮定しない場合を考えている．

一方，2つ目の話題として，途中で遅れがなくなる場合のモデルの代表である比例的遅れを持つパンタグラフ方程式 (Fox 他 [12], Iserles [13] 参照)

$$y'(t) = ay(t) + by(qt) + f(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 < q < 1$$

に対する数値解析に関する結果を3節で紹介する (主に Ishiwata, Muroya [15] 参照)．

2 $x_{n+1} = qx_n + (1-q)g(x_{n-k})$ に対する大域吸引性

ここで次の離散 Clark モデル (Clark [7] 参照):

$$\begin{cases} x_{n+1} = qx_n + (1-q)g(x_{n-k}), & n = 0, 1, 2, \cdots, \\ x_{-j} = \phi_{-j} \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, k, & \phi_0 > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

に対する $g(x)$ の不動点 x^* の大域漸近安定性の十分条件について考える．ただし，$0 < q < 1$, $g(x) \in C(0, \infty)$ かつ $g(x) > 0$, $x > 0$ とする．

次の定理 2.1-2.4 と補題 2.1 が成り立つ．

定理 2.1 任意の $x > 0$ に対して $g(x) < x$ ならば，(2.1) のすべての解 x_n は 0 に収束する．

次式を満たすとき，(2.1) の正の解 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は *persistent* と呼ばれる．

$$0 < \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < +\infty. \tag{2.2}$$

$(0, \infty)$ において，

$$x = qx + (1-q)g(x), \quad \text{すなわち} \quad x = g(x) \tag{2.3}$$

が唯一の正の解 $x = x^*$ を持つと仮定するとき，x^* は (2.1) の正の平衡点となる．

定理 2.2 (Giang, Huong [10]) $g(x)$ は単調増加関数で

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} < 1 \quad \text{かつ} \quad \liminf_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} > 1 \tag{2.4}$$

を仮定する．このとき，(2.1) のすべての解 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき，x^* に収束する．

定理 2.3 (Karakostas, Philos, Sficas [17]) $g(x)$ は単調増加関数とし，$\alpha = g(\beta)$, $\beta = g(\alpha)$ が唯一の解 $\alpha = \beta = x^*$ を持つと仮定する．このとき，(2.1) のすべての解 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき，x^* に収束する．

Kocić, Ladas [18, p.47] と同様な議論で容易に次の補題を得る (El-Morshedy [8, p.754] 参照)．

補題 2.1 $g(x)$ が 2 周期の点を持つとし，

$$\underline{y} = \inf\{x > 0 \mid g(g(x)) = x\}, \quad \text{かつ} \quad \bar{y} = \sup\{x > 0 \mid g(g(x)) = x\}$$

とおく．このとき，$\underline{y} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \bar{y}$ が成り立つ．

ここで，ある $\hat{y} > 0$ に対して，$g(\hat{y}) = \max_{x\geq 0} g(x)$ かつ $[0, \hat{y}]$ では $g(x)$ は増加し $(\hat{y}, \infty)$ では減少するとする．この関数 $g(x)$ は *unimodal* と呼ばれる．

$g(\hat{y}) > \hat{y}$ を仮定し，I を区間 $[0, g(\hat{y})]$ とすると明らかに，関数 g は I 自分自身への写像となる．$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq g(\hat{y})$ から，すべての n に対して，$x_n \in I$ は有界である．

定理 2.4 (Singer [26])．$g(x) \in C^3(0, \infty)$ かつ $|g'(x^*)| \leq 1$，また $g(x)$ の *Schwarz* 微分

$$Sg(x) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

が $I - \{\hat{y}\}$ において負であることを仮定する．このとき，(2.1) のすべての解が x^* に収束する．

注意 2.1 $Sg(x^*) < 0$ は $|g'(x^*)| < 1$，つまり，x^* の漸近安定性を示している．

上記の既知の結果に加えて，Nicholson's blowflies 方程式の場合，Tkachenko, Trofimchuk [28] は一般化 Yorke 条件の下で微分方程式の結果を適用し，大域吸引性を満たす十分条件を与えた．これを適用すると，$2 < p < p_A = \frac{\beta(1+\gamma)}{q+\beta-1}$ ならば，(2.1) の正の平衡点が大域吸引性を持つことが得られている (ただし，$\gamma = \gamma(q)$ は $q^{k+1} = \gamma \ln \frac{\gamma^2+\gamma}{\gamma^2+1}$ により定義される)．ところが，単調でない非線形 Mackey-Glass 方程式 (2.18) の場合は [28] の定理 2 が適用できずに定理 11 を得るに留まっている．

これに対し，本報告では unimodal 関数 $g(x)$ に対して，(2.1) の正の平衡点の大域吸引性の新たな十分条件を導き，Mackey-Glass 方程式に条件を適用できることを示す．

ここではまず，unimodal 関数 $g(x)$ に対して，大域安定性に対する遅れの影響を調べる．g は $g(\hat{y}) = \max_{x\geq 0} g(x) > \hat{y}$ となるので，これより，$\hat{y} < x^* < g(\hat{y})$ かつ $g(g(\hat{y})) < g(\hat{y})$ となる．

(2.1) から，次の関係が得られる．

$$\begin{cases} x_{n+1} &= qx_n + (1-q)g(x_{n-k}), \\ qx_n &= q^2 x_{n-1} + q(1-q)g(x_{n-k-1}), \\ q^2 x_{n-1} &= q^3 x_{n-2} + q^2(1-q)g(x_{n-k-2}), \\ &\vdots \\ q^k x_{n-k+1} &= q^{k+1}x_{n-k} + q^k(1-q)g(x_{n-k-k}). \end{cases}$$

ゆえに次式を得る (たとえば，El-Morshedy [8] の (2.7) を参照)．

$$x_{n+1} = q^{k+1}x_{n-k} + (1-q)g(x_{n-k}) + (1-q)\sum_{j=1}^{k} q^j g(x_{n-j-k}), \qquad n \geq 2k.$$

これは次のように書き直される．

$$x_{n+1} = \varphi(x_{n-k}) + (1-q)\sum_{j=1}^{k} q^j g(x_{n-k-j}), \qquad n \geq 2k, \tag{2.5}$$

ただし，

$$\varphi(x) = q^{k+1}x + (1-q)g(x), \qquad x > 0 \tag{2.6}$$

であり，

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + q(1-q^k)g(x), \qquad x > 0 \tag{2.7}$$

とおくと，

$$\bar{\varphi}(x) = q^{k+1}x + (1-q^{k+1})g(x), \qquad x > 0.$$

ここで，任意の $0 < x < x^*$ に対して，$g(x) > x^*$ ならば，$x_* = 0$ とおく．そうでないとき，$x_* < x^*$ は $g(x) = x^*$ の最小正解とする．

このとき，基本となる次の補題を得る ([28, Lemmas 17 and 18] を参照)．

補題 2.2 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を (2.1) の解とする．x_n がある時刻よりずっと x^* より大きい (小さい) ならば，x_n はある時刻より減少 (増加) し，$\lim_{x\to\infty} x_n = x^*$ となる．一方で，$n \geq k$ に対し，$x_{n+1} > x_n$ となるならば，$x_n \leq x^*$ もしくは $x_{n-k} \leq x^*$ が成り立つ．また，$x_* < x_{n+1} < x_n$ となるならば，$x_n \geq x^*$ もしくは $x_{n-k} \geq x^*$ が成り立つ．

ここで，次のようにおく．

$$\underline{x} = \liminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{かつ} \quad \bar{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

補題 2.2 により，$\underline{x} < x^* < \bar{x}$ となること，および $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は x^* の周りで振動する場合のみを調べればよい．そこで，$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ を証明する．

(2.1) より，$m_0 = \min_{0\le j\le k} x_j > 0$，$M_0 = \max_{0\le j\le k} x_j$ なので，

$$x_n \ge \min(m_0, g(m_0), g(g(\hat{y}))) > 0 \quad \text{かつ} \quad x_n \le \max(M_0, g(M_0), g(\hat{y})), \quad n \ge k+1$$

となる．また，$0 < \underline{x} < x^* < \bar{x} < +\infty$ が成り立つ．ゆえに，$\underline{x} < g(\underline{x})$ と (2.1) から，$\underline{x} \ge q\underline{x} + (1-q)\min(g(\underline{x}), g(\bar{x}))$ となる．このように，$\underline{x} \ge \min(g(\underline{x}), g(\bar{x})) = g(\bar{x})$ となる．同様に，$\underline{x} < g(\underline{x})$ は $\underline{x} < \tilde{\varphi}(\underline{x})$ を意味するので，$\underline{x} \ge \min(\tilde{\varphi}(\underline{x}), \tilde{\varphi}(\bar{x})) = \tilde{\varphi}(\bar{x})$ といえる．

$g(x) \in C^1(0,\infty)$ および

$$\varphi(x) \text{ が唯一の極値点をもち，} \hat{x} \text{ は } (0, x^*) \text{ での極小点} \tag{2.8}$$

を仮定し，$g(\hat{y}) = \max_{x>0} g(x) > \hat{y}$ となる唯一の $\hat{y} > 0$ が存在すると仮定すると $g'(\hat{y}) = 0$ を得る．

加えて，(2.6) と仮定 (2.8) により，$\varphi'(\hat{y}) = q^{k+1} > 0 = \varphi'(\hat{x})$ を得て，$\hat{y} < \hat{x} < x^*$ となる．

さらに，$[0, \hat{z}]$ では増加関数で $[\hat{z}, +\infty)$ では減少関数となるような関数 $\tilde{\varphi}(x)$ について，$\hat{y} < \hat{z} < \hat{x}$ を満たす $\tilde{\varphi}'(x) = 0$ の唯一の解 $\hat{z}$ が存在する．これは $\hat{y} < \hat{x} < x^*$，$g'(\hat{z}) = \frac{-q^{k+1}}{1-q} < 0$，$\tilde{\varphi}'(\hat{y}) = q^{k+1} > 0$ および $\tilde{\varphi}'(\hat{x}) = r_2 g'(\hat{x}) < 0$ となることからいえる．

ここで，

$$M = \varphi(\hat{x}) + r_2 g(\hat{y}), \quad r_2 = (1-q)\sum_{j=1}^{k} q^j = q(1-q^k) \quad \text{かつ} \quad m = \tilde{\varphi}(M) > 0 \tag{2.9}$$

とおくとき，$\underline{x}, \bar{x}$ の評価として，Liz, Tkachenko, Trofimchuk [19, p.608-609] の結果を改良する次の補題を得る．

補題 2.3 次の関係が成り立つ．

$$m \le \underline{x} \le \bar{x} \le M. \tag{2.10}$$

ここで，

$$g_1(x) = \bar{q}x^* + (1-\bar{q})g(x), \quad M = \bar{q}\hat{x} + (1-q)g(\hat{x}) + q(1-q^k)g(\hat{y}) < g_1(\hat{y}) < g(\hat{y})$$

と次の関係に注意せよ ([19, Lemma 5.1] 参照)．

$$m > \tilde{\varphi}(g_1(\hat{y})) = \bar{q}g_1(\hat{y}) + (1-\bar{q})g(g_1(\hat{y})) > \bar{q}x^* + (1-\bar{q})g(g_1(\hat{y})) = g_1(g_1(\hat{y})) > g(g_1(\hat{y})).$$

簡単のため，以後，$m > x_*$ を仮定した場合のみを考える．

$\varepsilon < m$ と $g(m-\varepsilon) > g(x_*) = x^*$ を満たす十分に小さな定数 $\varepsilon > 0$ をとると，補題 2.3 より，任意の $n \ge n_0$ に対して，$m - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$ となる十分大きな $n_0 \ge 0$ が存在する (この n_0 は初期条件に依存することに注意)．

さらに，g の仮定から，任意の $x \in [m-\varepsilon, x^*]$ に対して，$g(x) \ge x^*$，および，任意の $x \in [x^*, M+\varepsilon]$ に対して，$g(x) \le x^*$ を得る．

$$\bar{g}(x) = \max_{x\le s\le x^*} g(s) \quad \text{かつ} \quad \underline{g}(x) = \min_{x^*\le s\le x} g(s) \tag{2.11}$$

とし，Uesugi, Muroya, Ishiwata [30, Lemma 2.2] と同様に，補題 2.2 を (2.5) に適用すると，次の基本となる補題を得る．

補題 2.4 $m-\varepsilon \le x \le x^*$ に対して,

$$F(x) \equiv \varphi(\varphi(\max\{\hat{x},x\})+r_2\bar{g}(x))+r_2\underline{g}(\varphi(\max\{\hat{x},x\})+r_2\bar{g}(x)) \tag{2.12}$$

とするとき, 任意の $m-\varepsilon \le x < x^*$ に対し,

$$F(x) > x \tag{2.13}$$

ならば, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ が成り立つ.

ここで,

$$\begin{cases} \varphi(\hat{x})+r_2g(x) > \varphi(x^*)+r_2g(x^*)=\tilde{\varphi}(x^*)=x^*, & m-\varepsilon \le x \le x^*, \\ \varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{y}) > \varphi(x^*)+r_2g(x^*)=\tilde{\varphi}(x^*)=x^*. \end{cases}$$

となるので,

$$F(x)=\tilde{\varphi}(Q(x))=\varphi(Q(x))+r_2g(Q(x)), \qquad m-\varepsilon \le x \le x^*$$

である. ただし,

$$x^* \le Q(x) = \begin{cases} \varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{y}), & m-\varepsilon \le x \le \hat{y}, \\ \varphi(\hat{x})+r_2g(x), & \hat{y} \le x \le \hat{x}, \\ \tilde{\varphi}(x), & \hat{x} \le x \le x^*. \end{cases}$$

副区間 $m-\varepsilon \le x \le \hat{x}$ に対する (2.13) の十分条件について, 次の補題を得る.

補題 2.5 仮定 (2.8) に加えて, 次を仮定する.

$$\begin{cases} F(\hat{x}) > \hat{x}, & \hat{y} \le x \le \hat{x}, \\ F'(x) = \{q^{k+1}+(1-q^{k+1})g'(\varphi(\hat{x})+r_2g(x))\}r_2g'(x) \le 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

ここで,

$$F(x)=\tilde{\varphi}(\varphi(\hat{x})+r_2g(x)), \qquad \hat{y} \le x \le \hat{x}. \tag{2.15}$$

このとき, 任意の $m-\varepsilon \le x \le \hat{x}$ に対して, $F(x) > x$ が成り立つ.

ただし, $m=F(\hat{y}) > \hat{y} > x_*$ となることに注意.

注意 2.2 $\hat{y} < x < \hat{x}$ に対して, $g(x) \in C^2[\hat{y},\hat{x}]$ かつ $g''(x) < 0$ ならば, 定義および $\hat{z} < \hat{x} < x^*$ より, 任意の $\hat{y} < x < \hat{x}$ に対して, $0=g'(\hat{y}) > g'(x) > g'(\hat{x})$ かつ

$$\varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{y}) > \varphi(\hat{x})+r_2g(x) \ge \varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{x}) = \tilde{\varphi}(\hat{x}) > \tilde{\varphi}(x^*)=x^* > \hat{y}$$

を得る. このとき,

$$q^{k+1}+(1-q^{k+1})g'(\varphi(\hat{x})+r_2g(x)) > q^{k+1}+(1-q^{k+1})g'(\varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{y})).$$

これより, 次のように (2.14) の十分条件を得る.

$$F(\hat{x}) > \hat{x} \quad \text{かつ} \quad \{q^{k+1}+(1-q^{k+1})g'(\varphi(\hat{x})+r_2g(\hat{y}))\}r_2g'(\hat{x})-1 \le 0. \tag{2.16}$$

$\hat{y} < \hat{z} < \hat{x}$ および $\tilde{\varphi}'(\hat{z})=0$ なので, $\tilde{\varphi}(x)$ は $[\hat{x},\tilde{\varphi}(\hat{x})]$ における狭義単調減少関数であり, $\hat{x} \le x \le x^*$ に対して, $\tilde{\varphi}(\hat{x}) \ge \tilde{\varphi}(x) \ge \tilde{\varphi}(x^*)=x^*$ となる. さらに, $F(\hat{x}) > \hat{x}$ より, $x^* \le x \le \tilde{\varphi}(\hat{x})$ に対して, $\hat{x} < F(\hat{x}) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(\hat{x})) \le \tilde{\varphi}(x) \le \tilde{\varphi}(x^*)=x^*$ となる. ゆえに, $\tilde{\varphi}([\hat{x},\tilde{\varphi}(\hat{x})]) \subset [\hat{x},\tilde{\varphi}(\hat{x})]$ となる.

補題 2.5 より, $n \ge n_1$ に対して $\hat{x} \le x_n \le \tilde{\varphi}(\hat{x})$ となる十分に大きな整数 $n_1 \ge n_0$ が存在する. そこで, $[\hat{x},\tilde{\varphi}(\hat{x})]$ における $\tilde{\varphi}(x)$ の Schwarz 微分 $S\tilde{\varphi}(x)$ を用いて, 次の主定理を得る ([8, Theorem 3.1] および [19, Proposition 3.3] 参照).

定理 2.5 補題3.5で条件 (2.8) および (2.14) を仮定し，

$$\tilde{\varphi} \in C^3[\hat{x}, \tilde{\varphi}(\hat{x})], \quad \text{かつ} \quad \text{すべての } x \in [\hat{x}, \tilde{\varphi}(\hat{x})] \text{ に対し，} \quad S\tilde{\varphi}(x) < 0 \tag{2.17}$$

とするとき，任意の $\hat{x} \le x < x^*$ に対して $F(x) > x$ となり，$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ が成り立つ．

定理2.5の条件によって，補題2.4の条件 (2.13) が成り立つ．

注意 2.3 $\tilde{\varphi}'(x) = q^{k+1} + (1-q^{k+1})g'(x)$, $\tilde{\varphi}''(x) = (1-q^{k+1})g''(x)$ および，$\tilde{\varphi}'''(x) = (1-q^{k+1})g'''(x)$ となるので，

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'(x^*) = q^{k+1} + (1-q^{k+1})g'(x^*), \\ S\tilde{\varphi}(x)(\tilde{\varphi}'(x))^2 = (1-q^{k+1})^2 Sg(x)(g'(x))^2 + q^{k+1}(1-q^{k+1})g'''(x) \end{cases}$$

が成り立つ．よって，$|\tilde{\varphi}'(x^*)| \le 1$ の必要十分条件は $-1 - \frac{2q^{k+1}}{1-q^{k+1}} \le g'(x^*) \le 1$ であり，注意2.1 より，(2.17) は $|\tilde{\varphi}'(x^*)| \le 1$ を表す．さらに，$\tilde{\varphi}'(x) \ne 0$ かつ $S\tilde{\varphi}(x) < 0$ の必要十分条件は $Sg(x)(g'(x))^2 < -\frac{q^{k+1}}{1-q^{k+1}}g'''(x)$ となる．

unimodal 関数 $g(x)$ に対し，仮定 (2.8) の下で定理2.5は [10] と [28] を改良している．

2.1 応用例

応用として，次の bobwhite quail population モデルを取り上げよう．これは単調でない非線形 Mackey-Grass 方程式である (詳細は [10], [28, Theorem 11] 参照):

$$x_{n+1} = qx_n + \frac{\beta x_{n-k}}{1 + x_{n-k}^p}, \quad 0 < q < 1, \quad \beta, p > 0. \tag{2.18}$$

$q + \beta \le 1$ ならば，定理2.1 より $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となることを [10] は示している．ここで

$$g(x) = \frac{\beta x}{(1-q)(1+x^p)}$$

とおき，$q + \beta > 1$ を仮定しよう．

$g'(x) = \beta\frac{1+(1-p)x^p}{(1-q)(1+x^p)^2}$ より，$p \le 1$ ならば，$g'(x) > 0$ となり，$g(x)$ は増加関数となる．さらに定理2.2 と $g(0) = 0$ によって，

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0 < 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{\beta}{1-q} > 1.$$

これより，$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ を得る．ただし，$x^* = \sqrt[p]{\frac{q+\beta-1}{1-q}}$ である．

次に $p > 1$ と仮定すると，$g(x)$ は unimodal であり，$\hat{y} = \sqrt[p]{\frac{1}{p-1}}$ かつ $g(\hat{y}) = \frac{(p-1)\beta}{(1-q)p}\hat{y}$ である．$1 < p \le \frac{\beta}{q+\beta-1}$ ならば，$g(\hat{y}) \le \hat{y}$, $g'(x^*) = \frac{1}{\beta}\{\beta - p(q+\beta-1)\} \ge 0$ であり，かつ，定理2.3 より，$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ を得る (Gopalsamy, Trofimchuk, Bantsur [11] 参照).

今から，$p > \frac{\beta}{q+\beta-1}$ を仮定する．このとき，$g(\hat{y}) > \hat{y}$ かつ $g'(x^*) = \frac{1}{\beta}\{\beta - p(q+\beta-1)\} < 0$ となるので，

$$p \le \frac{2\beta}{q+\beta-1} \tag{2.19}$$

ならば，$|g'(x^*)| \leq 1$となる．

$$Sg(x) = -\frac{p(p-1)x^p\{(p-1)(p-2)x^p + 2(p+1)\}}{2x^2\{(p-1)x^p - 1\}^2}$$

なので，

$$\begin{cases} p \geq 2 \text{ ならば，すべての } x > 0 \text{ に対して，} Sg(x) < 0 \\ 1 < p < 2 \text{ かつ } \frac{\beta}{1-q} \leq \sqrt[p]{\frac{2(p+1)}{2-p}}\frac{p}{p-1} \text{ ならば，すべての } 0 < x < g(\hat{y}) \text{ に対して，} Sg(x) < 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

を得る．このように定理2.4から，条件(2.19)と(2.20)は$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$を意味する．

一方で，[28, Theorem 11]には次の結果がある．

定理 2.6 (Tkachenko, Trofimchuk [28]) $\beta > 1-q$とする．このとき，次の条件のいずれかが成り立てば，(2.18)の正の平衡点は大域吸引性を持つ．

(a) $0 < p \leq 2$;

(b) $2 < p \leq \frac{\beta}{q+\beta-1}$;

(c) $2 < p < p_A$, ただし$\gamma = \gamma(q)$は$q^{k+1} = \gamma \ln \frac{\gamma^2+\gamma}{\gamma^2+1}$で定義され，$p_A = \frac{\beta(1+\gamma)}{q+\beta-1}$である．

ここで，(2.18)に対し，[28, Theorem 2]の条件(5)は次の条件と同等である．

$$p \leq p_B = \frac{2\beta}{q+\beta-1}\left(1 + \frac{q^{k+1}}{1-q^{k+1}}\right). \tag{2.21}$$

しかしながら，[28]では(2.18)に対するこの条件については調べておらず，本報告の表2.1の数値実験結果から，$p_A < p_B$が示される．

$$p_B = \frac{2\beta}{(1-q^{k+1})(q+\beta-1)} < \frac{2\beta}{(1-q)(q+\beta-1)}$$

であり，さらに$p < \frac{2\beta}{(1-q)(q+\beta-1)}$ならば，正の平衡点$y^*$が局所的に漸近安定であることをMilton, Belair(1990)が証明していることに注意する．

一方で，$S\bar{\varphi}(x^*) < 0$は$|\bar{\varphi}'(x^*)| \leq 1$を表し，これは

$$\frac{\beta}{q+\beta-1} < p \leq p_B \tag{2.22}$$

と同等である．ここで，

$$\begin{cases} g''(x) = -\dfrac{\beta p x^{p-1}\{(1+p)+(1-p)x^p\}}{(1-q)(1+x^p)^3}, \qquad \hat{y} < x < \hat{x}, \\ S\bar{\varphi}(x) = \dfrac{-f_S(x)}{2\{(1-q)q^{k+1}(1+x^p)^2 + \beta(1-q^{k+1})(1-(p-1)x^p)\}^2}, \\ f_S(x) = \beta p(1-q^{k+1})x^{p-2}[\beta(p-1)(1-q^{k+1})(2+2p+2x^p-3px^p+p^2x^p) \\ \qquad +2(1-q)q^{k+1}\{-(1+x^p)^2 + p^2(1-4x^p+x^{2p})\}]. \end{cases}$$

が成り立ち，[11]より，$x \neq \hat{y}$に対して$Sg(x) < 0$を得る．

(2.18)と(2.22)に対して，条件(2.8)と補題2.5の(2.14)および，定理2.5の(2.17)を数値的に満たす例を調べ，条件を満たした場合が表2.1に示されている．これらの例は$g''(x) < 0$と$S\bar{\varphi}(x) < 0$を満たしており，これは定理2.5の十分条件が実用面で有効であることを表している．(2.18)についてβに独立な条件として，[28]では$0 < p \leq \hat{p}_A = 1+\gamma$を得ており，我々は$0 < p \leq \hat{p}_B = \frac{2}{1-q^{k+1}}$

を得た．ここで，$\hat{p}_A < \hat{p}_B$ である．これにより，(2.18) の正の平衡点が大域吸引性を持つための十分条件について，我々は [28] の条件の幾つかを改良できたことになる．

なお現在，Clark モデルに関連する論文が非常に多く発表されており (たとえば，Saker [25] 等)，同様に数値実験によりパラメータを動かしながら条件の改良を図っているものもある．特にごく最近出版された El-Morshedy, Liz [9] の Theorem 1 は，本報告の結果を大幅に改善するものとして注目に値する．

表 2.1 (2.18) に対する数値例

q	k	β	p_A	p_B	$p_B - p_A$	$\max g''(x)$	$\max S\tilde{\varphi}(x)$
0.6	2	0.6	7.5113...	7.6530...	0.1417...	-11.1132...	-68.3956...
		0.5	12.5188...	12.7551	0.2363...	-16.428...	-282.876...
	3	0.6	6.8435...	6.8933...	0.0498...	-9.7755...	-57.5158...
		0.5	11.4059...	11.489...	0.0831...	-14.6872...	-237.027...
0.7	3	0.52	6.0814...	6.2209...	0.1395...	-9.7662...	-33.4367...
		0.5	6.4323...	6.5798...	0.1475...	-9.2887...	-48.8071...
		0.4	10.2917...	10.5277...	0.236...	-14.2421...	-175.776...
		0.35	18.0104...	18.4235...	0.4131...	-22.4498...	-702.486...
	4	0.55	5.2269...	5.2888...	0.0619...	-7.9448...	-21.099...
		0.5	5.9397...	6.0101...	0.0704...	-9.1013...	-34.4132...
		0.4	9.5035...	9.6161...	0.1126...	-12.8775...	-148.546...
		0.32	38.0142...	38.4648...	0.4506...	-42.7684...	-3436.29...
0.8	5	0.35	6.1586...	6.3246...	0.1660...	-8.4373...	-40.9394...
		0.3	7.9182...	8.1316...	0.2134...	-11.9458...	-98.8649...
	6	0.35	5.8013...	5.9050...	0.1037...	-8.0281...	-34.0045...
		0.3	7.4588...	7.5922...	0.1334...	-11.0068...	-82.5045...
		0.25	12.4315...	12.6537...	0.2222...	-16.2892...	-345.005...
0.9	20	0.2	4.4678...	4.4914...	0.0236...	-3.5883...	-19.2685...
		0.187	4.8016...	4.8270...	0.0254...	-4.3061...	-26.8332...
	21	0.2	4.4178...	4.4369...	0.0191...	-4.0808...	-16.7367...
		0.17	5.3644...	5.3877...	0.0233...	-6.0850...	-38.6821...
	22	0.2	4.3735...	4.3889...	0.0154...	-4.4500...	-15.0931...
		0.15	6.5602...	6.5834...	0.0232...	-9.0257...	-73.5334...
		0.147	6.8394...	6.8636...	0.0242...	-9.5283...	-83.9048...

3 比例的遅れを持つ微分方程式に対する選点法での最適達成精度

パンタグラフ方程式と呼ばれる比例的遅れのある微分方程式

$$y'(t) = ay(t) + by(qt) + f(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 < q < 1 \tag{3.1}$$

と Volterra 積分方程式に対して，Brunner [3] は m 次の選点法を用いた際に第一区間での誤差の最適達成精度について問題点を提起した．この問題点の解決と条件の一般化として，$f(t) \equiv 0$ の場合は Takama, Muroya, Ishiwata [27]，$f(t) \not\equiv 0$ の場合は Muroya, Ishiwata, Brunner [23] がある (石渡 [14] も参照)．

一方，第一区間以降の大域的誤差解析に関する分点の選び方について，Brunner, Hu, Lin [5] は比例的遅れを持つ第二種 Volterra 積分方程式に対して，q に応じて区分的選点多項式を用いた geometrical mesh による改良を示している．また，(3.1) に対する選点法の超収束について，Bellen [1] は s-段階の連続的 RK 法で quasi-geometric mesh を提案し，遅れの項の近似について，p 次の最適達成精度を得た．

このように選点法は計算に便利であるが，これらの分点の選び方には問題点もある．終点 $t = T$ が大きい場合は，最終区間幅の大きさに比べて，第一区間近くの区間幅は著しく小さくなる．これは全体の計算量が多くなることを意味する．

この問題の解決策の一つとして，本節では (3.1) に対する m 次選点法に対して，区分的 $(2m, m)$ 有理関数近似を用いた"quasi-uniform mesh"を提案し，任意の $0 \le t \le T$ に対して大域誤差が $O(h^{2m})$ となることを示す (Ishiwata, Muroya [15] 参照). T が大きいとき，これは今までの方法よりも分点の個数が少なくて済むため，計算の効率が良いといえる．

現在では，さらに一様な分点の選び方 ([5], [15]) や超収束性 (室谷, 石渡, Brunner[16], Brunner, Hu [6], Bellen, Brunner, Maset, Torelli [2]) 等の研究が続けられている．

3.1 選点法と区分的 $(2m, m)$-有理関数近似

$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} t^k \in C^{\infty}[0, \infty)$ を仮定すると，(3.1) の解 $y(t)$ は $C^{\infty}[0, \infty)$ で唯一存在し，$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k t^k$, ≥ 0 で与えられる．ここで，$\psi_0 = y_0$ であり，ψ_k, $k = 1, 2, \cdots$ は次の通りである．

$$\psi_k = \frac{(a + bq^{k-1})\psi_{k-1} + \frac{f_{k-1}}{(k-1)!}}{k}$$
$$= \frac{1}{k!}\left\{ (\prod_{j=0}^{k-1} (a + bq^j) y_0 + f_{k-1} + (a + bq^{k-1}) f_{k-2} + \prod_{j=k-2}^{k-1} (a + bq^j) f_{k-3} + \cdots + \prod_{j=1}^{k-1} (a + bq^j) f_0 \right\}.$$

まず，選点解 $v(t)$ と $0 \le t \le h$ での $y(t)$ の $(2m, m)$-有理関数近似 $\bar{Q}_{2m,m}(t)$ との関係を示そう (詳細は Muroya, Ishiwata, Brunner [23, Theorem 2.2] 参照). $v(t)$ を $y(t)$ に対する選点とし，選点多項式が

$$M_m(t) \equiv \frac{M_m}{m!} t^m + \frac{M_{m-1}}{(m-1)!} t^{m-1} + \cdots + \frac{M_1}{1!} t + M_0 \tag{3.2}$$

で与えられるとき，次の $(2m, m)$-有理関数近似を考えよう ([23, Theorem 2.1] 参照).

$$\bar{Q}_{2m,m}(h) = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 h + \Gamma_2 h^2 + \cdots + \Gamma_{2m} h^{2m}}{\Lambda_0 + \Lambda_1 h + \Lambda_2 h^2 + \cdots + \Lambda_m h^m}.$$

ここで，$A^{-1} = (a_{i,j}^{(-1)})$ は $(m-1) \times (m-1)$ 上三角行列 $A = (a_{ij})$ の逆行列とし，その成分は

$$a_{ij} = \begin{cases} \binom{m+i}{i} M_{m+i-j}, & i \le j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

となる．このとき，$a_{i,j}^{(-1)} = 0$, $1 \le j \le i-1$, $a_{i,i}^{(-1)} = \frac{1}{a_{i,i}} = \frac{1}{\binom{m+i}{i} M_m}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ である．

$$\begin{cases} c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1-i-j} (\prod_{l=i+k+1}^{i+k+j} (a + bq^l)) \binom{i+k}{i} \frac{M_k}{(i+j+k+1)!}, & 0 \le i \le m-1, \quad 0 \le j \le m-1-i, \\ d_{0,m+1} = -\psi_{m+1}(m+1)!, & \\ d_{i,j} = -\left(\prod_{l=m-j+1}^{m} (a + bq^l) \right) \binom{m-j}{i} M_{m-i-j}, & 1 \le i \le m, \quad 0 \le j \le m-i, \\ e_{i,j} = -a_{i,j-(m+1)}^{(-1)} f_{j-1}, & m+i+1 \le j \le 2m \end{cases}$$

と

$$\begin{cases} \bar{d}_{0,m+j} = d_{0,m+1} c_{0,j-1}, & 1 \le j \le m, \\ \bar{d}_{i,j} = (d_{i,0} c_{0,j} + d_{i,1} c_{0,j-1} + \cdots + d_{i,j} c_{0,0}) + (c_{i,0} \Lambda_j + c_{i,1} \Lambda_{j-1} + \cdots + c_{i,j} \Lambda_0), & \\ \qquad 1 \le i \le m-1, \quad 0 \le j \le m-i-1, & \\ \bar{e}_{i,j} = e_{i,j} \bar{d}_{i,0} + e_{i,j-1} \bar{d}_{i,1} + \cdots + e_{i,m+i+1} \bar{d}_{i,j-(m+i+1)}, & 1 \le i \le m-1, \quad m+i+1 \le j \le 2m \end{cases}$$

とおく．ただし，

$$\begin{cases} \Lambda_0 = M_m, \qquad \Lambda_l = (\displaystyle\prod_{j=m-l+1}^{m}(a+bq^j))M_{m-l}, \qquad l=1,2,\cdots,m, \\ \Gamma_l = \displaystyle\sum_{k=0}^{l}\psi_{l-k}\Lambda_k, \qquad l=0,1,2,\cdots,m, \qquad \Gamma_{m+1} = \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\psi_{m+1-l}\Lambda_l + \bar{d}_{0,m+1}, \\ \Gamma_{m+i} = \displaystyle\sum_{l=i}^{m}\psi_{m+i-l}\Lambda_l + \bar{d}_{0,m+i} + \bar{e}_{i,m+i} + \cdots + \bar{e}_{i-1,m+i}, \qquad i=2,3,\cdots,m. \end{cases}$$

このとき，第一区間 $t_1 = h$ に対しては次の基礎的な補題が得られる．

補題 3.1 ([23, Theorem 2.2]) (3.1) に対して，次を満たすような唯一の選点解 $v(t)$, $0 \le t \le h$ が存在すると仮定する．

$$\Gamma_{m+i} = \sum_{l=0}^{m}\psi_{m+i-l}\Lambda_l, \qquad 1 \le i \le m. \tag{3.3}$$

$v(t)$ の m 次選点多項式 (3.2) に対して，(3.3) は次の $\{M_k\}_{k=0}^{m}$ についての方程式と同等である．

$$\begin{cases} \psi_{m+1}(m+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\frac{M_l}{(l+1)!} = 0, \\ \psi_{m+1}(m+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{m}(a+bq^{l+1})\frac{M_l}{(l+2)!} + \frac{f_{m+1}}{m+1}\sum_{l=0}^{m}\binom{l+1}{1}\frac{M_l}{(l+2)!} = 0, \\ \psi_{m+1}(m+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{m}(a+bq^{l+2})(a+bq^{l+1})\frac{M_l}{(l+3)!} \\ \quad +f_{m+1}\left\{(a+bq^{m+2})\frac{M_m}{(m+3)!} + (a+bq^{m+1})\frac{M_{m-1}}{(m+2)!} + a_{1,1}^{(-1)}\bar{d}_{1,1}\right\} \\ \quad +f_{m+2}\left\{\frac{M_m}{(m+3)!} + (a_{1,2}^{(-1)}\bar{d}_{1,0} + a_{2,2}^{(-1)}\bar{d}_{2,0})\right\} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \psi_{m+1}(m+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{m}(\prod_{j=l+1}^{l+m-1}(a+bq^j))\frac{M_l}{(l+m)!} \\ \quad +f_{m+1}\left\{\displaystyle\sum_{l=2}^{m}(\prod_{j=l+2}^{l+m-1}(a+bq^j))\frac{M_l}{(l+m)!} + a_{1,1}^{(-1)}\bar{d}_{1,m-2}\right\} \\ \quad +f_{m+2}\left\{\displaystyle\sum_{l=3}^{m}(\prod_{j=l+3}^{l+m-1}(a+bq^j))\frac{M_l}{(l+m)!} + (a_{1,2}^{(-1)}\bar{d}_{1,m-3} + a_{2,2}^{(-1)}\bar{d}_{2,m-3})\right\} + \cdots \\ \quad +f_{2m-1}\left\{\frac{M_m}{(2m)!} + (a_{1,m-1}^{(-1)}\bar{d}_{1,0} + a_{2,m-1}^{(-1)}\bar{d}_{2,0} + \cdots + a_{m-1,m-1}^{(-1)}\bar{d}_{m-1,0})\right\} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

このとき，$v(h) = \bar{Q}_{2m,m}(h) + O(h^{2m+1})$ と $|v(h) - y(h)| = O(h^{2m+1})$ が成り立つ．

続いて，$y(t)$ に対する区分的 $(2m,m)$-有理関数近似 $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ を決定しよう．$0 \le t \le t_1 = h$ に対して，$\tilde{Q}_{2m,m}(t) = \bar{Q}_{2m,m}(t)$ とおく．第二区間 $t_1 \le t \le t_2$ 以降については，**quasi-uniform mesh** を提案する．

$0 < q \le 0.5$ の場合は，次のように等分割幅に対する分点を用いることができる．

$$t_n = nh, \qquad h = \frac{T}{N}, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.5}$$

次に $0.5 < q < 1$ の場合，等分割にすると初期区間近くでは qt_n が既知の関数近似によって計算できないことがあり，分割幅の選び方には少し工夫が必要になる．本報告では始めの n_0 区間に

ついて q に応じた geometric mesh を利用することにする．ここで，n_0 は $q^{n_0} \leq 1-q < q^{n_0-1}$ を満たす正整数であり，t_{n_0} から終点 $T = t_N$ までの残りの区間に対しては一様な区間幅を用いる．よって，$0.5 < q < 1$ の場合には，次のような部分的に q に依存した分割を用いる．

$$\begin{cases} t_n = \dfrac{h}{q^{n-1}}, & 1 \leq n \leq n_0, \\ t_n = \dfrac{h}{q^{n_0-1}} + (n-n_0)h, & n \geq n_0+1. \end{cases} \tag{3.6}$$

これより，$N \geq n_0$ で最後の分点が $t_N = T$ により与えられるならば，区間幅 h は次のように制限される．

$$h = \frac{T}{\frac{1}{q^{n_0-1}} + (N-n_0)}, \qquad t_N = T. \tag{3.7}$$

このとき，分割数 N は

$$\frac{T}{h} + \frac{\log(1-q)}{\log q} - \frac{1}{1-q} < N \leq \frac{T}{h} + \frac{\log(1-q)}{\log q} + 1 - \frac{q}{1-q}$$

であり，$0.5 < q < 1$ に対しては $\frac{\log(1-q)}{\log q} \leq n_0 < \frac{\log(1-q)}{\log q} + 1$ となることに注意すると，n_0 は N について独立である．さらに，T が大きいとき，n_0 は N に比べると非常に小さく，$(T - t_{n_0})$ は一様に区間を分割することができる．たとえば，具体的には $q = 0.6$ のとき $n_0 = 2$，$q = 0.7$ のとき $n_0 = 4$，$q = 0.8$ のとき $n_0 = 8$，$q = 0.9$，のとき $n_0 = 22$ になる．

以後，この分点の選び方を quasi-uniform mesh と呼ぶ．

さて，上記のような分点の選び方に対して，次の局所誤差解析が与えられる (Muroya, Ishiwata, Brunner [23, Corollary 2.1] 参照)．

補題 3.2 m 次ルジャンドル多項式 $P_m(x)$ に対し，

$$\frac{m!}{(2m)!}P_m(2t-1) = \frac{M_m}{m!}t^m + \frac{M_{m-1}}{(m-1)!}t^{m-1} + \cdots + \frac{M_1}{1!}t + M_0 \tag{3.8}$$

とする．初期値問題 $z'(t) = az(t) + \tilde{f}(t)$, $t > 0$, $z(0) = z_0$ の $z(t)$ に対する $(2m, m)$-有理関数近似を次のように定義する．

$$Q_{2m,m}(t) = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 t + \Gamma_2 t^2 + \cdots + \Gamma_{2m}t^{2m}}{\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2 + \cdots + \Lambda_m t^m}.$$

ここで

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n, \quad z_n = \frac{a^n z_0 + a^{n-1}\tilde{f}_0 + a^{n-2}\tilde{f}_1 + \cdots + a\tilde{f}_{n-2} + \tilde{f}_{n-1}}{n!}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n}{n!}t^n, \\ \Lambda_n = a^n M_{m-n}, \quad 0 \leq n \leq m, \qquad \Gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_{n-k}\Lambda_k, \quad 0 \leq n \leq 2m. \end{cases}$$

このとき，$[0, h]$ での $v(t)$ の選点多項式は (3.8) となり，次の関係を得る．

$$v(h) = Q_{2m,m}(h) + O(h^{2m+1}) \quad \text{かつ} \quad |Q_{2m,m}(t) - y(t)| = O(t^{2m+1}).$$

$2 \leq n \leq N$ に対しては $qt_n \leq t_{n-1}$ を仮定し，$y(t)$ に対する区分的 $(2m, m)$-有理関数近似 $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ はすでに $0 \leq t \leq t_{n-1}$ において定義されている．

今，$t_{n-1} \le t \le t_n$ での $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ を次のように定義し，$Q_{2m,m}(t)$ は補題 3.2 により，

$\tilde{f}(t) = b\tilde{Q}_{2m,m}(q(t+t_{n-1})) + f(t+t_{n-1}),\quad 0 \le t \le h = t_n - t_{n-1}$ かつ $z_0 = \tilde{Q}_{2m,m}(t_{n-1})$

の条件の下で定義されるとする．さらに，

$$Q_{2m,m}(t;n) = Q_{2m,m}(t), \qquad 0 \le t \le t_n - t_{n-1}$$

とおくと，帰納法により，$n = 2, 3, \cdots, N$ に対して，$y(t)$ に対する区分的 $(2m, m)$-有理関数近似 $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ は次のように定められる．

$$\tilde{Q}_{2m,m}(t) = Q_{2m,m}(t - t_{n-1}; n), \qquad t_{n-1} \le t \le t_n, \quad 2 \le n \le N.$$

このとき，補題 3.2 より，任意の区間 $0 \le t \le T$ において，$y(t)$ の区分的 $(2m, m)$-有理関数近似 $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ に対し，次の大域誤差解析 $O(h^{2m})$ が容易に得られる．

定理 3.1 仮定の下で，$y(t)$ の区分的 $(2m, m)$-有理関数近似 $\tilde{Q}_{2m,m}(t)$ は $[0, T]$ において定義され，次が成り立つ．

$$|\tilde{Q}_{2m,m}(t) - y(t)| = O(h^{2m}), \qquad 0 \le t \le T.$$

3.2 数値実験例

ここで数値実験例を示そう．

例 3.1 次のパンタグラフ方程式を考える．ここで，解析解は $y(t) = e^{-t}$ である．

$$y'(t) = -y(t) + \frac{q}{2}y(qt) - \frac{q}{2}e^{-qt}, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 < q < 1.$$

$q = 0.5$, $m = 2$ と $h = 2^{-n}$, $n = 0, 1, \cdots, 7$ に対して，初期点 $t = h$ における誤差は表 3.1 の 2 列目に示されている．$\frac{1}{2^5} = 0.03125$ に注意すると，$t = h = 2^{-n}$, $n = 0, 1, \cdots, 7$ における誤差が $O(h^{2m+1})$ であることを確認できる．また，$T = 10$ での大域誤差が表 3.1 の 3 列目に示されている．同様に，$\frac{1}{2^4} = 0.0625$ に注意すると，$t = T$ での大域誤差は $O(h^{2m})$ であることが確認できる．

表 3.1 $m = 2$, $q = 0.5$, $h = 1/2^n$ における誤差 $e_h(t)/e_{2h}(t)$

n	$t_1 = 1/2^n$		$T = 10$	
	$e_h(t_1)$	$e_h(t_1)/e_{2h}(t_1)$	$e_h(T)$	$e_h(T)/e_{2h}(T)$
0	7.12055882855..E-03		5.3207880746..E-04	
1	2.4017362070..E-04	0.03372..	1.365163786..E-05	0.02565..
2	7.81067855..E-06	0.03252..	4.3681870..E-07	0.03199..
3	2.4910811..E-07	0.03189..	1.868023..E-08	0.04276..
4	7.86523..E-9	0.03157..	9.4639..E-10	0.05066..
5	2.4706..E-10	0.03141..	5.287..E-11	0.05586..
6	7.74..E-12	0.03133..	3.11..E-12	0.05897..
7	2.4..E-13	0.03126..	1.8..E-13	0.06061..

例 3.2 他の例も見てみよう (Bellen [1] 参照)．解析解は $y(t) = \sin t$ である．

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + \dfrac{1}{2}y(qt) + \cos t + \sin t - \dfrac{1}{2}\sin qt, & 0 \le t \le T, \\ y(0) = 1, \quad 0 < q < 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

$q = 0.5$, $m = 2$, および $h = 2^{-(6+n)}$, $n = 0, 1, \cdots, 4$ に対し，初期点 $t_1 = h$ での誤差は $e(h) = Q_{4,2}(h) - y(h)$ で表の 2 列目に示されている．$\frac{1}{2^5} = 0.03125$ に注意すると，誤差 $O(h^{2m+1})$ となることが確認できる．

表 3.2　$m=2,\ q=0.5,\ h=2\pi/2^{6+n}$ における誤差 $e_h(t)/e_{2h}(t)$

n	$t_1=h$		$T=2\pi$		$T=4\pi$	
	$e_h(t_1)$	$\frac{e_h(t_1)}{e_{2h}(t_1)}$	$e_h(T)$	$\frac{e_h(T)}{e_{2h}(T)}$	$e_h(T)$	$\frac{e_h(T)}{e_{2h}(T)}$
0	-7.598337..E-08		3.8391471..E-07		1.51578917..E-06	
1	-2.37488..E-09	0.03125..	2.613675..E-08	0.06807..	9.381210..E-08	0.06188..
2	-7.421..E-11	0.03125..	1.70118..E-09	0.06508..	5.83453..E-09	0.06219..
3	-2.31..E-12	0.03124..	1.0844..E-10	0.06374..	3.6378..E-10	0.06234..
4	*	*	6.83..E-12	0.06306..	2.269..E-11	0.06239..

n	$T=8\pi$		$T=16\pi$		$T=32\pi$	
	$e_h(T)$	$\frac{e_h(T)}{e_{2h}(T)}$	$e_h(T)$	$\frac{e_h(T)}{e_{2h}(T)}$	$e_h(T)$	$\frac{e_h(T)}{e_{2h}(T)}$
0	2.06497720..E-06		2.33033896..E-06		2.46020361..E-06	
1	1.2635722..E-07	0.06119..	1.4204581..E-07	0.06095..	1.4971397..E-07	0.06085..
2	7.81451..E-09	0.06184..	8.76744..E-09	0.06172..	9.23283..E-09	0.06166..
3	4.8585..E-10	0.06217..	5.4456..E-10	0.06211..	5.7320..E-10	0.06208..
4	3.027..E-11	0.06231..	3.389..E-11	0.06223..	3.568..E-11	0.06226..

$q=0.5,\ T=2\pi,\ h=2\pi/2^6$ に対して，Bellen [1] の分割数は 194 になるのに対し，我々の方法ではすべての一様分割で 64 ステップで済む．さらに，$q=0.5,\ T=2^k\pi,\ h=\frac{2\pi}{2^l},\ \bar{m}=2^{k+l-2}$ ならば，[1] では

$$N=\left\lceil\frac{\log(1-q)-\log\bar{m}}{\log q}\right\rceil\bar{m}+2=(k+l-1)2^{k+l-2}+2$$

となるが，(3.6) のステップ数は $N=T/h=2^{k+l-1}$ だけで済む．このように，$k+l$ が大きいと，[1] のステップは (3.6) の $\frac{k+l-1}{2}$ 倍かかる．

なお，我々の結果では任意の $0\le t\le T$ に対する大域誤差が $O(h^{2m})$ であるが，[1] での大域誤差 $O(h^{2m})$ は分点 $t=t_n,\ 0\le n\le N$ に対してだけ成り立つことに注意しよう．

ここで，$q>0.5$ における 2 つの数値例も示しておこう．(3.9) に対して，$q=0.6$ の場合は $n_0=2$ となり表 3.3 に示される．また，$q=0.8$ の場合は $n_0=8$ となり表 3.4 に示される．

表 3.3　$m=2,\ q=0.6,\ h=2\pi/2^{6+n},\ T=2\pi$ における誤差 $e_h(t)/e_{2h}(t)$

n	$t_1=h$		T	
	$e_h(t_1)$	$e_h(t_1)/e_{2h}(t_1)$	$e_h(T)$	$e_h(T)/e_{2h}(T)$
0	-7.799321..E-08		3.9145132..E-07	
1	-2.40605..E-09	0.03084..	2.803756..E-08	0.07162..
2	-7.470..E-11	0.03104..	1.84832..E-09	0.06592..
3	-2.32..E-12	0.03114..	1.1795..E-10	0.06381..
4	-7.3..E-14	0.03137..	7.46..E-12	0.06324..

表 3.4　$m=2,\ q=0.8,\ h=2\pi/2^{6+n},\ T=2\pi$ における誤差 $e_h(t)/e_{2h}(t)$

n	$t_1=h$		T	
	$e_h(t_1)$	$e_h(t_1)/e_{2h}(t_1)$	$e_h(T)$	$e_h(T)/e_{2h}(T)$
0	-9.845087..E-08		5.684275..E-08	
1	-2.69879..E-09	0.02741..	4.878229..E-08	*
2	-7.908..E-11	0.02930..	3.55420..E-09	0.07285..
3	-2.39..E-12	0.03027..	2.2567..E-10	0.06349..
4	-7.4..E-14	0.03091..	1.408..E-11	0.06239..

現在，以上のような有理関数近似による quasi-uniform mesh から，さらに [5] の geometrical mesh の改良として，quasi constrained mesh を考えている．この手法は各区間での最大区間幅が第一区間幅を越えないように定めるため，長期間の積分計算が安定になる．

参考文献

[1] A. Bellen, Preservation of superconvergence in the numerical integration of delay differential equations with proportional delay, *IMA J. Numer. Anal.* **22** (2002) 529-536.

[2] A. Bellen, H. Brunner, S. Maset, L. Torelli, Superconvergence in collocation methods on quasi-graded meshes for functional differential equations with vanishing delays, *BIT Numer. Math.* **46** (2006) 229-247.

[3] H. Brunner, On the discretization of differential and Volterra integral equations with variable delay, *BIT Numer. Math.* **37** (1997) 1-12.

[4] H. Brunner, *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] H. Brunner, Q. Hu, Q. Lin, Geometric meshes in collocation methods for Volterra integral equations with proportional delays, *IMA J. Numer. Anal.* **21** (2001) 783-798.

[6] H. Brunner, Q. Hu, Optimal superconvergence orders of iterated collocation solutions for Volterra integral equations with vanishing delays, *SIAM J. Numer. Anal.* **43** (2005) 1934-1949.

[7] C. W. Clark, A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to Baleen whale populations, *J. Math. Biol.* **3** (1976) 381-391.

[8] H. A. El-Morshedy, The global attractivity of difference equations of nonincreasing nonlinearties with applications, *Comput. Math. Appl.* **45** (2003), 749-758.

[9] H. A. El-Morshedy, E. Liz, Globally attracting fixed points in higher order discrete population models, *J. Math. Biol.* **53** (2006), 365-384.

[10] D. V. Giang, D.C. Huong, Extinction, persistence and global stability in models of population growth, *J. Math. Anal. Appl.* **308** (2005), 195-207.

[11] K. Gopalsamy, S. Trofimchuk and N. R. Bantsur, A note on global attractivity in models of hematopoiesis, *Ukrainian Math. J.* **50** (1998), 5-12.

[12] L. Fox, D. F. Mayers, J. R. Ockendon, A. B. Tayler, On a functional differential equation, *J. Inst. Math. Appl.* **8** (1971) 271-307.

[13] A. Iserles, On the generalized pantograph functional-differential equation. *European J. Appl. Math.* **4** (1993) 1-38.

[14] 石渡恵美子, 比例的遅れを持つ微分方程式に対する選点法, 京都大学数理解析研究所講究録 1186, (2001) 151-163.

[15] E. Ishiwata, Y. Muroya, Rational approximation method for delay differential equations with proportional delay, *Appl. Math. Comp.* (2007), in press.

[16] 室谷義昭, 石渡恵美子, H. Brunner, 比例的遅れを持つ積分及び微分方程式に対する選点法の超収束, 京都大学数理解析研究所講究録 1396, (2004) 72-84.

[17] G. Karakostas, Ch. G. Philos and Y. G. Sficas, The dynamics of some discrete population models, ibid, 1069-1084.

[18] V. L. Kocić and G. Ladas, *Global Asymptotic Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications* Kluwer Academic, Dordrecht (1993).

[19] E. Liz, V. Tkachenko and S. Trofimchuk, A global stability criterion for scalar functional differential equations, *SIAM J. Math. Anal.* **35**(2003), 596-622.

[20] H. Matsunaga, T. Hara, S. Sakata, Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay, *Comput. Math. Appl.* **41** (2001) 543-551.

[21] 室谷義昭, 石渡恵美子, $x(n+1) = qx(n) - \sum_{j=0}^{m} a_j(n) f_j(x(n-j))$ に対する大域吸引性, 京都大学数理解析研究所講究録 1474, (2006) 118-126.

[22] Y. Muroya, E. Ishiwata, Global attractivity for discrete Clark model $x_{n+1} = qx_n + (1-q)g(x_{n-k})$, *Prceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2005*, (2007) 387-398.

[23] Y. Muroya, E. Ishiwata, H. Brunner, On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **152** (2003) 347-366.

[24] Y. Muroya, E. Ishiwata, N. Guglielmi, Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients, to appear in *J. Math. Anal. Appl.*

[25] S. H. Saker, Qualitative analysis of discrete nonlinear delay survival red blood cells model, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* (2007), in press.

[26] D. Singer, Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1978), 260-267.

[27] N. Takama, Y. Muroya, E. Ishiwata, On the attainable order of collocation methods for delay differential equations with proportional delay, *BIT Numer. Math.* **40** (2000) 374-394.

[28] V. Tkachenko, S. Trofimchuk, Global stability in difference equations satisfying the generalized Yorke condition, *J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005) 173-187.

[29] V. Tkachenko, S. Trofimchuk, A global attractivity criterion for nonlinear non-autonomous difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* **322** (2006) 901-912.

[30] K. Uesugi, Y. Muroya and E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004) 560-580.