数理解析研究所講究録
1535巻 2007年 135-142

On some convexity of a weakly unitarily invariant norm and λ- Aluthge transformation

北海道教育大学札幌校　大久保　和義

1. はじめに

M_n を $n \times n$ complex matrix 全体の集合とする。

$T \in M_n$ として，$T = UP$ を T の polar decomposition とする（ただし，P: positive semi-definite，U: unitary とする。)。

$0 < \lambda < 1$ に対して T の λ-*Aluthge transformation* を $P^{\lambda}UP^{1-\lambda}$ で定義する ($T_{1/2} = \tilde{T}$; *Aluthge transformation*([Al])。

$|||\cdot|||$ が M_n 上の weakly unitarily invariant norm とは $|||UXU^*||| = |||X|||$ ($U \in M_n$: unitary，$X \in M_n$) が成り立つとする。また，$|||\cdot|||$ が M_n 上の unitarily invariant norm とは $|||UXV||| = |||X|||$ ($U, V \in M_n$: unitary，$X \in M_n$ が成り立つとする。

$$W(T) := \{(Tx, x) \mid ||x|| = 1\} \text{ (}\textit{numerical range of } T\text{)}$$

$$w(T) = \sup\{|z| : z \in W(T)\} \text{ (}\textit{numerical radius of } T\text{) とする。}$$

$\rho > 0$ に対して $T \in M_n$ がある Hilbert space $\mathcal{K} \supset C^n$ と $\mathcal{K}$ 上の unitary operator V があって，$T^k = \rho QV^k|_{C^n}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を満たすとき，ρ-contraction とよぶ (Nagy and Foias([N-F]) 参照)。ただし，Q は $\mathcal{K}$ から C^n への orthogonal projection である。ρ-contraction に対して，T の ρ-radius $w_\rho(T)$ が，$w_\rho(T) \equiv \inf\{r > 0 : \frac{1}{r}T \text{ is a } \rho\text{--contraction}\}$ で定義される (Holbrook([H]))。$w_\rho(T)$ に関しては，$0 < \rho < \infty$ に対して，

$$w_\rho(T + S) \leq \max(1, \frac{\rho}{2})\{w_\rho(T) + w_\rho(S)\}$$

が成り立つことが知られている。即ち，$0 < \rho \leq 2$ に対して $w_\rho(\cdot)$ は M_n 上のノルムとなり，$2 < \rho < \infty$ に対しては，

$$w_\rho(T + S) \leq \frac{\rho}{2}\{w_\rho(T) + w_\rho(S)\}$$

を満たす quasi-norm となる。また，$0 < \rho < \infty$ に対して，$w_\rho(\cdot)$ は weakly unitarily invariant となる。

さらに，$w_1(T) = ||T||$ (spectral norm of T)，$w_2(T) = w(T)$,

$$w_\infty(T) := \lim_{\rho \to \infty} w_\rho(T) = r(T) \quad (r(\cdot) : \text{spectral radius})$$

がいえる。

Yamazaki([Y]), Wu([W]) により，T がヒルベルト空間上の有界線形作用素のとき，

$$\overline{W(\tilde{T})} \subset \overline{W(T)} \tag{1}$$

となることが知られている。

2. Convexity of $[0, 1] \ni \lambda \mapsto w_\rho(T_\lambda)$.

次のことがいえる。

Theorem 1. *Let $A, M \in M_n$. Then the following assertions (i) and (ii) are equivalent;*

(i) $W(f(A)) \subset W(f(B))$ *for all polynomials* f.

(ii) $w_\rho(f(A)) \leq w_\rho(f(B))$ *for all polynomials* f *and* $0 < \rho \leq 2$.

実際，Ito,Nakazato,Okubo and Yamazaki([I-N-O-Y]) で (i) が (ii) において $\rho = 1$, $\rho = 2$ の場合と同値であることを示した。また，$1 \leq \rho$ に対して，
$w_\rho(X) \leq 1 \Longleftrightarrow r(X) \leq 1$ であり，

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} X^k\| \leq \rho - 1 \text{ for } |z| \leq 1 \tag{2}$$

であること，また，$1 < \rho \leq 2$ に対して

$$W(T) = \{\bigcap_{\lambda \in C} \{z \in C \mid |z-\lambda| \leq w_\rho(T - \lambda I)\} \tag{3}$$

であるから，Theeorem 1 は証明できる。

$|||\cdot|||$ を M_n 上の unitarily invariant norm とする。

$$g(\lambda) \equiv |||P^\lambda U P^{1-\lambda}||| \ (0 \leq \lambda \leq 1)$$

とするとき，

Proposition 2. $[0,\ 1] \ni \lambda \mapsto g(\lambda)$ *is convex.*

実際, $A, B, X \in M_n$ と unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ に対して

$$|||A^* X B|||^2 \leq |||AA^* X||| \cdot |||XBB^*|||$$

が成り立つ (Bhatia([B])。従って，$T = UP$(polar decomposition)，$0 \leq \alpha, \lambda, \mu \leq 1$ にこの不等式を使うと

$$|||P^{\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu} U P^{1-(\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu)}||| \leq |||P^\lambda U P^{1-\lambda}|||^\alpha \cdot |||P^\mu U P^{1-\mu}|||^{1-\alpha}$$

がいえる。

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $F(\lambda) \equiv W(P^\lambda U P^{1-\lambda})$ とする。

f をその極が $\sigma(T)$ の外にある rational function として，$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ とする。$A, S \in M_n$ で S が positive invertible とするとき，

$$||A|| \leq \frac{1}{2}||SAS^{-1} + S^{-1}AS|| \tag{4}$$

がいえることが知られているので，これを使って

$$||f(T_{\frac{\lambda+\mu}{2}})|| \leq \frac{1}{2}\{||f(T_\lambda) + f(T_\mu)||\}$$

が成り立ち，(3) を用いて次がいえる。

Theorem 3. [Patel and Yamazaki([P-Y])]
$[0,\ 1] \ni \lambda \mapsto F(\lambda)$ *is convex,* that is,

$$F(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) \subset \alpha F(\lambda) + (1-\alpha)F(\mu)$$

$(0 \leq \alpha, \lambda, \mu \leq 1)$

このことから，$h(\lambda) := w(P^{\lambda}UP^{1-\lambda})$ とおくと，$[0,1] \ni \lambda \mapsto h(\lambda)$ が convex になること，
即ち，

$$w(P^{\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu}UP^{1-(\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu)}) \leq \alpha w(P^{\lambda}UP^{1-\lambda}) + (1-\alpha)w(P^{\mu}UP^{1-\mu})$$

が示される。

Lemma 4.[Mathias and Okubo([M-O])] *Let $A \in M_n$. then for $0 < \rho \leq 2$,*

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} w\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix}\right).$$

Proposition 5. *Let $S \in M_n$ be a positive and $A \in M_n$. Then for $0 < \rho \leq 2$, we have*

$$w_\rho(A) \leq \frac{1}{2} w_\rho(SAS^{-1} + S^{-1}AS).$$

実際，(*) によって，$\lambda \in C$ に対して

$$||A - \lambda I|| \leq \left\| \frac{SAS^{-1} + S^{-1}AS}{2} - \lambda I \right\|$$

である。従って，(3) から

$$W(A) \subset W\left(\frac{SAS^{-1} + S^{-1}AS}{2}\right)$$

がいえる。このことから，positive matrix S に対して

$$w(A) \leq \frac{1}{2} w(SAS^{-1} + S^{-1}AS)$$

が成り立つ。このことを使うと，

$$\begin{aligned} & w\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2} w\left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right) \\ =\ & \frac{1}{2} w\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}(SAS^{-1} + S^{-1}AS) \\ 0 & (1-\rho)(SAS^{-1} + S^{-1}AS) \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

がいえる。Lemma 4 から，このことは

$$w_\rho(A) \le \frac{1}{2} w_\rho(SAS^{-1} + S^{-1}AS)$$

を意味する。

T の polar decomposition を $T = UP$ として, $0 \le \lambda, \mu \le 1$ に対して $A = P^{\frac{\lambda+\mu}{2}} U P^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}$ とすると

$$w_\rho(P^{\frac{\lambda+\mu}{2}} U P^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}) \le \frac{1}{2} w_\rho(SP^{\frac{\lambda+\mu}{2}} U P^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}} S^{-1} + S^{-1} P^{\frac{\lambda+\mu}{2}} U P^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}} S)$$

がいえる。このとき，$S = (P + \epsilon I)^{\frac{\lambda-\mu}{2}}$ と $\epsilon \longrightarrow 0$ を考えると次の corollary がいえる。

Corollary 6. $T = UP \in M_n$ と $0 < \rho \le 2$ に対して，

$$(0,1) \ni \lambda \mapsto w_\rho(P^\lambda U P^{1-\lambda})$$

は *convex* である。

実際, $0 \le \lambda, \mu \le 1$ に対して

$$w_\rho(P^{\frac{\lambda+\mu}{2}} U P^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}) \le \frac{1}{2}\{w_\rho(P^\lambda U P^{1-\lambda} + P^\mu U P^{1-\mu})\} \le \frac{1}{2}\{w_\rho(P^\lambda U P^{1-\lambda}) + w_\rho(P^\mu U P^{1-\mu})\}$$

となる。

3. $W(T_\lambda)$, $w_\rho(T_\lambda)$ の対称性，最小性

この問題の発展として，$0 \le \lambda \le 1$ に対する $W(T_\lambda)$, $w_\rho(T_\lambda)$ の対称性，$w_\rho(T_\lambda)$ の最小性に関する問題が考えられる。このことに関するいくつかの結果を示す。

Proposition 7. *For $T \in M_2$ and $0 < \rho$, we have*

(i) $\min_{0\le\lambda\le1} w_\rho(T_\lambda) = w_\rho(\tilde{T})$.

In particular,

$\min_{0\le\lambda\le1} ||T_\lambda|| = ||\tilde{T}||$ *and*

$\min_{0\le\lambda\le1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T})$.

(ii) $\min_{0\le\lambda\le1} W(T_\lambda) = W(\tilde{T})$.

実際，$0 < a \le 1$ に対して $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ (unitary matrix) とおく。このとき，

$$B_\lambda \equiv P^\lambda U P^{1-\lambda} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12}a^{1-\lambda} \\ u_{21}a^\lambda & u_{22}a \end{pmatrix}$$

とすると，

$$B_\lambda^* B_\lambda = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 + (1-|u_{11}|^2)a^{2\lambda} & u_{12}\overline{u_{11}}(a^{1-\lambda} - a^{1+\lambda}) \\ \overline{u_{12}}u_{11}(a^{1-\lambda} - a^{1+\lambda}) & |u_{11}|^2a^2 + (1-|u_{11}|^2)a^{2(1-\lambda)} \end{pmatrix}$$

で，$B_\lambda^* B_\lambda$ の characteristic polynomial $f_\lambda(x)$ は

$$f_\lambda(x) = x^2 - (|u_{11}|^2 + (1-|u_{11}|^2)a^{2\lambda}$$
$$+|u_{11}|^2 a^2 + (1-|u_{11}|^2)a^{2(1-\lambda)})x + a^2 = f_{1-\lambda}(x)$$

即ち，$||T_\lambda|| = ||T_{1-\lambda}||$ となる。$[0,\ 1] \ni \lambda \mapsto g(\lambda)$ が convex だから,

$$\min_{0\le\lambda\le 1} ||T_\lambda|| = ||\tilde{T}||$$

となる。

$0 \le \lambda \le 1$ に対して $\sigma(T) = \sigma(T_\lambda) = \{\alpha, \beta\}$ とする。T が matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ に unitarily similar として，T_λ が matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \delta_\lambda \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ に unitarily similar とする。$||T_\lambda|| = ||T_{1-\lambda}||$ だから，$\min_{0\le\lambda\le 1} ||T_\lambda|| = ||\tilde{T}||$ となり，$|\delta_{1/2}| \le |\delta_\lambda| = |\delta_{1-\lambda}| (0 \le \lambda \le 1)$ がいえる。T_λ の numerical rangeis は焦点を α, β として短径が $|\delta_\lambda|$ の楕円だから $W(T_\lambda) = W(T_{1-\lambda})$ がいえる。即ち，(ii) が成り立つ。また，$\min_{0\le\lambda\le 1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T})$ もいえる。
f を any polynomial とする。このとき,
$f(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \delta_{1/2}\cdot\gamma \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix}$ $f(T_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \delta_\lambda\cdot\gamma \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix}$ となり，$|\delta_{1/2}\cdot\gamma| \le |\delta_\lambda\cdot\gamma|$ だから，$||f(\tilde{T})|| \le ||f(T_\lambda)||$ となる。従って，(2) から (i) がいえる。

Corollary 8. *Let $T \in M_2$. For $0 < \lambda < 1$ and for any polynomial f*

$$W(f(T_\lambda)) = W(f(T_{1-\lambda})).$$

Moreover, for $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \frac{1}{2}$ and for any polynomial f

$$W(f(T_{\lambda_2})) \subset W(f(T_{\lambda_1})).$$

Remark. Proposition 4 is not true for the case of $n \ge 3$.

Example 9.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおくと，$g(1/2) = 2.798077$, $g(2/5) = 2.795949$ and $g(3/5) = 2.813729$ となる。

次の結果は，Rose and Spitkovsky によって得られた。

Theorem 10. [Rose and Spitkovsky] Let $T = UP \in M_3$ where P has at most two distinct eigenvalues. Then for $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $|\lambda_2 - \frac{1}{2}| \le |\lambda_1 - \frac{1}{2}|$ implies that $W(T_{\lambda_2}) \subset W(T_{\lambda_1})$, in particular

$$W(T_\lambda) = W(T_{1-\lambda})$$

for all $\lambda \in (0,1)$.
In this case, $\min_{0\leq\lambda\leq 1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T})$.

4. Normaloid, spectraloid and convexoid matrix の特徴付け
$T \in M_n$ is *normaloid* とは $||T|| = r(T)$ をみたすこと。
$T \in M_n$ is *spectraloid* とは $w(T) = r(T)$ をみたすこと。

Proposition 11. *Let $T \in M_2$. Then the followings conditions are equivalent :*
i) T is normaloid.
ii) $||T|| = ||\tilde{T}||$.
iii) $||T|| = ||T_\lambda||$ for some $\lambda \in (0,1)$.
iv) $||T|| = ||T_\lambda||$ for all $\lambda \in [0,1]$.
v) T is normal.

iv) $\Longrightarrow$ v) を示そう。T を Proposition 7 のようにおき，$\lambda = \frac{1}{2}$ とすると，$f_{1/2}(x) = 0$ の解は

$$x = \frac{1}{2}\{(1-a)^2|u_{11}|^2 + 2a \pm (1-a)|u_{11}|\sqrt{(1-a)^2|u_{11}|^2 + 4a}\}$$

となり，

$$||\tilde{T}|| = 1 = ||T|| \Longleftrightarrow |u_{11}| = 1$$

であるから $u_{12} = u_{21} = 0$ となり T は normal となる。

$3 \leq n$ に対しては ii) $\Longrightarrow$ i) は真ではない。

Example 12. $0 < \lambda < 1$ とする。

$$P \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad U \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと，$P > 0$, U unitary, $||UP|| = 1$，$r(UP) = \lambda^{\frac{1}{3}}$ となる。
一方で

$$P^{\frac{1}{2}}UP^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \end{bmatrix}$$

だから，$||P^{\frac{1}{2}}UP^{\frac{1}{2}}|| = 1 = ||UP||$, but $r(UP) < ||UP||$ となる。

Proposition 11 の一般化として次のことがいえる。
Proposition 13. *Let $T \in M_2$ and $0 < \rho \leq 2$. Then the followings conditions are equivalent :*
i) $w_\rho(T) = r(T)$.
ii) $w_\rho(T) = w_\rho(\tilde{T})$.
iii) $w_\rho(T) = w_\rho(T_\lambda)$ for some $\lambda \in (0,1)$.
iv) $w_\rho(T) = w_\rho(T_\lambda)$ for all $\lambda \in [0,1]$.
v) T is normal.

Proposition 7 の証明のように，$T = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2$ とおく。このとき，Nakazi and Okubo ([N-O]) から，$w_\rho(T) \leq 1$ であるための必要十分条件は $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ そして

$$|\delta|^2 + |\alpha - \beta|^2 \leq \inf_{\zeta \in} \left| \frac{(\rho + (1-\rho)\overline{\alpha\zeta})(\rho + (1-\rho)\beta\zeta) - \overline{\alpha}\beta|\zeta|^2}{\rho\zeta} \right|^2 \tag{5}$$

が成り立つことである。従って，$S = \begin{pmatrix} \alpha & \delta' \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ and $|\delta| \leq |\delta'|$ とするとき $w_\rho(T) \leq w_\rho(S)$ であることが容易に分かる。特に，もし $|\delta| < |\delta'|$ であれば $w_\rho(T) < w_\rho(S)$ となる。また，Proposition 7 から $[0, 1/2] \ni \lambda \mapsto w_\rho(T_\lambda)$ が減少関数で，$w_\rho(T) \geq r(T)$ だから，i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$iii) が示される。
iii) が成り立つときは上の議論から，ある λ_0 で $|\delta| = |\delta_{\lambda_0}|$ が成り立つ。従って，$||T|| = ||T_{\lambda_0}||$ となり，Proposition 11 から，$|\delta| = |\delta_\lambda|$ for all $0 \leq \lambda \leq 1$ であることがわかり，T は normal となる。

Corollary 14. *For $T \in M_2$,*
T is normaloid $\Longleftrightarrow$ T is spectraloid.

Proposition 15. [Yamazaki([Y])]
A bounded linear operator T on Hilbert space is normaloid $\Longleftrightarrow$ $||T|| = ||\tilde{T}_k||$ for all k, where $\tilde{T}_k$ is k-th Aluthge transformation.
$\tilde{T}_k$ は次で定義される。

$$\tilde{T}_k = (\tilde{\tilde{T}}_{k-1}) \text{ for } k = 1, 2, \cdots.$$

また，$T \in M_n$ に対して，Ptak によって次が知られている；

$$||T|| = 1 > r(T) \Longrightarrow ||T^n|| < 1$$

Ando は $T \in M_n$ に対して次のことを示した。

$$||T|| = 1 > r(T) \Longrightarrow ||\tilde{T}_{n-1}|| < 1.$$

このとき，次のことはいえる。

Proposition 16. Let $T \in M_n$.
T is normaloid $\Longleftrightarrow$ $||T|| = ||\tilde{T}_{n-1}||$.

$T \in M_n$ is *convexoid* とは $conv(\sigma(T)) = W(T)$ where $conv(\cdot)$ denotes the *convex hull* で定義される。このとき，Ando は Aluthge 変換を用いて，次のことを示した。

Theorem 17. [Ando([An])] *For $T \in M_n$,*
T is convexoid if and only if $W(\tilde{T}) = W(T)$.

関連する話題として，Spectraloid に関して Patel and Yamazaki によって次の Conjecture があげられている。

Conjecture [Patel and Yamazaki([P-Y])] *For $T \in M_n$, T is spectraloid if and only if $w(T) = w(\tilde{T})$.*

参考文献

[Al] A. Aluthge: On p-hyponormal operators for $0 < p < 1$*, Integral Equations Operator Theory,* **13** *(1990), pp. 307–315.*

[An] T. Ando: Aluthge transforms and the convex hull of the spectrum of a Hilbert space operator, Operator Theory; Adv. Appl., **160** *(2005), pp. 21–39.*

[B] R. Bhatia: Matrix Analysis, Springer, 1997.

[H] J. A .R. Holbrook: On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş, Acta. Scie. Math.(Szeged), **29** *(1968), pp. 297–310.*

[I-N-O-Y] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki: On generalized numerical range of the Aluthge transformation, Linear Algebra Appl. **370** *(2003), pp. 147-161.*

[N-F] Sz.-Nagy and C. Foiaş: Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North–Holland Publishing Company, 1970

[M-O] R. Mathias and K. Okubo: The induced norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius, Linear and Multilinear Algebra, **37** *(1994), pp. 111-124.*

[N-O] T. Nakazi and K. Okubo: ρ-contraction and 2×2 *matrix, Linear Algebra Appl.* **283** *(1998), pp.165-169.*

[O] K. Okubo: On Weakly Unitarily Invariant Norm and the $\lambda-$ Aluthge Transformation for Invertible Operator, Linear Algebra and its Appl., **419** *(2006), pp.48-52.*

[P-Y] S. M. Patel and T. Yamazaki: On comparisons of norms and the numerical ranges of an operator with its generalized Aluthge transformation, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, **e-2005** *(2005), pp.317-329.*

[Y] T. Yamazaki: On numerical range of the Aluthge transformation, Linear Algebra Appl., **341** *(2002), pp. 111–117.*

[W] P. Y. Wu: Numerical range of Aluthge transform of operator, Linear Algebra Appl., **357** *(2002), pp. 295–298.*