数理解析研究所講究録
第 1541 巻 2007 年 67-72

Nonautonomous discrete integrable systems and Padé approximants
(非自励離散可積分系とパデ近似について)

Spiridonov, V. P. (Bogoliubov Labo. of Theoretical Phys., Russia)
Tsujimoto, S. (Graduate School of Informatics, Kyoto Univ., Japan)
Zhedanov, A. S. (Donetsk Inst. for Phys. and Tech., Ukraine)

1 はじめに

本稿では，非自励離散可積分系とパデ近似との関係について，これまでに知られている結果にくわえ，Frobenius, Stickelberger および Thiele らによって提案された逆差分 (Reciprocal difference) を用いたパデ近似について考察する.

2 パデ近似と補間問題

本稿では主に多点パデ近似を扱うが，まず (1 点) パデ近似の紹介からはじめる．互いに素な m 次多項式 $Q_m(z;n)$ と n 次多項式 $P_n(z;m)$ を用いて, 有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ を

$$R^{[m/n]}(z)=\frac{Q_m(z;n)}{P_n(z;m)}$$

と表す．ここで，解析関数 $f(z)$ と有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ の点 z_0 まわりでのテーラー展開の $m+n$ 次までの係数が等しいとき，すなわち

$$f(z)-R^{[m/n]}(z)=O((z-z_0)^{m+n+1})$$

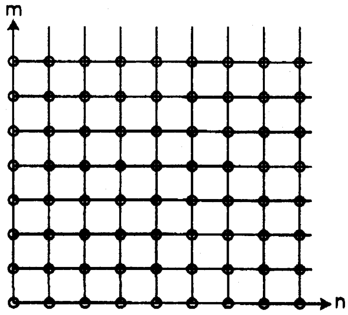
が成り立つとき，この有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ を関数 $f(z)$ の点 z_0 での (1 点) パデ近似とよぶ [1, 2]．このパデ近似は，展開の中心 z_0 の近傍では関数 $f(z)$ のよい近似を与えるが，中心 z_0 から離れた点でよい近似を与える保証はない.

また，パデ補間ともよばれる多点パデ近似は，点 z_k $(k=0,1,2,\ldots)$ 上で関数 $f(z)$ の値が与えられている場合,

$$P_n(z_k;m)f(z_k)-Q_m(z_k;n)=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots,n+m) \tag{1}$$

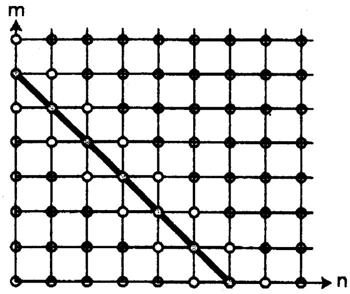
を満たす $P_n(z;m)$ と $Q_m(z;n)$ によって定まる有理関数 $R^{[m/n]}=Q_m(z;n)/P_n(z;m)$ で与えられる．これを関数 $f(z)$ の多点パデ近似とよび，極限操作 $z_k\to z_0$ $(k=0,1,2,\ldots,n+m)$ により，(1 点) パデ近似を得る．以下では，多点パデ近似について，z の多項式 $P_n(z;m)$ の最高次数の係数を 1 とし，任意の $n,m=0,1,\ldots$ に対して共通零点を持たない $P_n(z;m)$ と $Q_m(z;n)$ が存在することを仮定して議論を進めていく.

パデ近似・補間では，問題によって適切な n,m を選ぶ必要があり，必要に応じて複数の有理関数を求める必要がでてくる．有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ は，連立方程式 (1) を解くことにより求めることができ，行列式の比で表される．また，(n,m) の組に対応して得られる有理関数の間でさまざまな関係式の成り立つことが知られている．本稿では，一つの有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ を格子 (n,m) 上の点



に対応づけて考えることにする．さらに，この有理関数の間の関係式を用いることで，パデ近似・パデ補間を効率的に求めることができる．以下では，非自励離散可積分系と関連する多点パデ近似の例をあげる．

1. $m+n$ の値を定数 N に固定する．ここでの有理関数 $R^{[m/n]}(z)$ は，(n,m) 格子の中の傾き -1 の直線上の点に対応する．



このとき，$P_{-1}=0$ とすると $n=0,1,\ldots,N-1$ に対して

$$P_{n+1}(z;m-1)+b_{N,n}P_n(z;m)+u_{N,n}P_{n-1}(z;m+1)=zP_n(z;m) \tag{2}$$

が成り立つ．(2) は，直交多項式のみたす 3 項間漸化式と見なすことができ，直交多項式の理論における Christoffel 変換および Geronimus 変換に相当する関係式

$$P_n(z;m+1)=P_n(z;m)+B_n(m+1)P_{n-1}(z;m+1) \tag{3}$$

$$(z-z_{n+m})P_n(z;m-1)=P_{n+1}(z;m-1)+A_n(m)P_n(z;m) \tag{4}$$

が成り立つ [3, 4]．この関係式は，Frobenius 関係式とよばれ，$A_n(m),B_n(m)$ は，

$$R^{[m/n]}(k)=\gamma_n(m)\frac{\bar{Q}_m(z_k;n)}{P_n(z_k;m)} \quad k=0,1,2,\cdots,m+n \tag{5}$$

$$\bar{Q}_m=z^m+O(z^{m-1}) \quad P_n=z^n+O(z^{n-1})$$

で定まる $\gamma_n(m)$ を用いて

$$A_n(m)=\frac{\gamma_n(m-1)}{\gamma_n(m)},\quad B_n(m)=\frac{\gamma_n(m)}{\gamma_{n-1}(m)} \tag{6}$$

と表せる．Frobenius 関係式の両立条件から，非自励離散戸田方程式

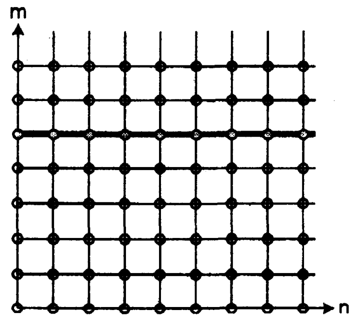
$$u_{N,n} = A_n(m+1)B_n(m+1) = A_{n-1}(m+1)B_n(m) \tag{7}$$

$$b_{N,n} = A_n(m+1) + B_{n+1}(m) + z_{m+n+1} = A_n(m) + B_n(m) + z_{m+n} \tag{8}$$

が得られる [9, 14].

2. 分子の次数 m を固定する．このとき，$P_{-1}(z) = 0$ とすると，$n = 0,1,2,\ldots$ に対して，

$$P_{n+1}(z;m) - \left(z - z_{n+m+1} - \frac{\gamma_{nm}}{\gamma_{n,m+1}} + \frac{\gamma_{nm}}{\gamma_{n-1,m}}\right)P_n(z;m) + \frac{\gamma_{nm}}{\gamma_{n-1,m}}(z - x_{n+m})P_{n-1}(z;m) = 0$$



が成り立ち，これは，Ismail-Masson[5] によって導入された R_I 型多項式のみたす漸化式

$$P_{n+1}(z) + (u_n z + v_n)P_n(z) + w_n(z - \alpha_n)P_{n-1}(z) = 0$$

とみなすことができる．この R_I 型多項式は，

$$\tilde{P}_n(z) = \frac{A_n P_{n+1}(z) + B_n P_n(z)}{z - \lambda} \tag{9}$$

$$P_n(z) = \tilde{P}_n(z) + C_n(z - \alpha_n)\tilde{P}_{n-1}(z) \tag{10}$$

による $P_n(z)$ から $\tilde{P}_n(z;\lambda)$ への変換で，$\tilde{P}_n(z;\lambda)$ もまた R_I 型多項式になることが知られており，(9) と (10) の両立条件から，R_I 格子とよばれる非自励な離散可積分系

$$(A_{n-1}^{t+1}C_n^{t+1} - 1)/A_n^{t+1} = (A_n^t C_{n+1}^t - 1)/A_n^t \tag{11}$$

$$(\alpha_n A_{n-1}^{t+1}C_n^{t+1} - B_n^{t+1} - \lambda_{t+1})/A_n^{t+1} = (\alpha_{n+1}A_n^t C_{n+1}^t - B_n^t - \lambda_t)/A_n^t \tag{12}$$

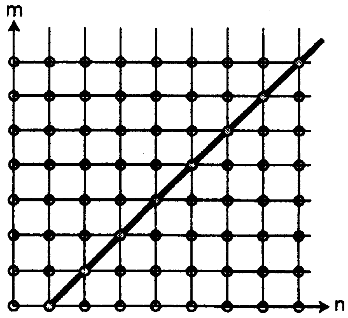
$$B_{n-1}^{t+1}C_n^{t+1}/A_n^{t+1} = B_n^t C_n^t/A_n^t \tag{13}$$

が得られる [13]．ここで，α_n と λ_t はそれぞれ n と t に関する任意関数である．

3. 分子の次数 m と分母の次数 n が, $m-1=n$ の場合を考える．このとき，$\alpha_n = z_{2n-2}$, $\beta_n = z_{2n-1}$ とおき，$P_{-1}(z) = 0$ とすると，$n = 0,1,2,\ldots$ に対して，R_{II} 型多項式のみたす漸化式 [5]

$$P_{n+1}(z;n) + (u_n z - v_n)P_n(z;n-1) - w_n(z - \alpha_n)(z - \beta_n)P_{n-1}(z;n-2) = 0$$

が成り立つ．ここで，u_n, v_n, w_n は，$\gamma_n(m)$ と α_n, β_n を用いて表される．



この R_{II} 型多項式は,

$$\tilde{P}_n(z) = \frac{A_n P_{n+1}(z) + B_n(z-\alpha_{n+1})P_n(z)}{z-\lambda} \tag{14}$$

$$P_n(z) = C_n\tilde{P}_n(z) + D_n(z-\beta_{n-1})\tilde{P}_{n-1}(z) \tag{15}$$

による $P_n(z)$ から $\tilde{P}_n(z;\lambda)$ への変換で,$\tilde{P}_n(z;\lambda)$ もまた R_{II} 型多項式になることが知られている.(14) と (15) の両立条件から,R_{II} 格子とよばれる非自励な離散可積分系

$$(B_n^{t+1}C_n^{t+1} + A_{n-1}^{t+1}D_n^{t+1} - 1)/A_n^{t+1}C_n^{t+1} = (B_n^t C_n^t + A_n^t D_{n+1}^t - 1)/A_n^t C_{n+1}^t, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_{n+t+2}B_n^{t+1}C_n^{t+1} &+ \beta_n A_{n-1}^{t+1}D_n^{t+1} - \lambda_{t+1})/A_n^{t+1}C_n^{t+1}\\ &= (\alpha_{n+t+1}B_n^t C_n^t + \beta_{n+1}A_n^t D_{n+1}^t - \lambda_t)/A_n^t C_{n+1}^t,\end{aligned} \tag{17}$$

$$B_{n-1}^{t+1}D_n^{t+1}/A_n^{t+1}C_n^{t+1} = B_n^t D_n^t/A_n^t C_{n+1}^t \tag{18}$$

が得られる [10, 11].ここで,α_n, β_n および λ_t は添字変数に関する任意関数である.

3 FST 型パデ補間

Frobenius, Stickerberger[3] と Theile[12] による,$R^{[n/n]}$ と $R^{[n+1/n]}$ を効率的に求める手続きが知られている.本節では,この手続きに付随する非自励離散可積分系に関する最近の結果 [8] について解説する.FST らは,逆差分 (Reciprocal difference):

$$F_1(z) = \frac{z-a_0}{f(z)-f(a_0)}$$

$$F_{n+1}(z) = \frac{z-a_n}{F_n(z)-F_n(a_n)} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

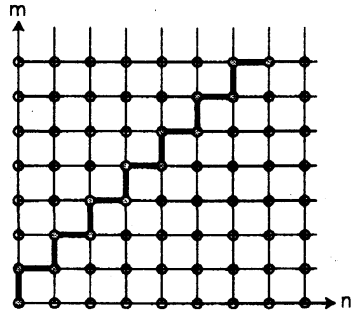
を用いることで,関数 $f(z)$ の連分数表示を再帰的に計算し,n 段目の連分数から有理関数 $F^{(n)}(z)$:

$$F^{(n)}(z) = f(a_0) + \cfrac{z-a_0}{F_1(a_1) + \cfrac{z-a_1}{F_2(a_2) + \cfrac{z-a_2}{\cdots + \cfrac{\cdots}{F_n(a_n)+0}}}} = \frac{T_n^{(1)}(z)}{T_n(z)}$$

が

$$F^{(2n)}(z) = R^{[n/n]}(z), \quad F^{(2n+1)}(z) = R^{[n+1/n]}(z)$$

となることを示した．この有理関数 $F^{(n)}(z)$ と分母に表れる多項式 $T_n(z)$ をそれぞれ FST 有理関数，FST 多項式とよぶ．



FST 多項式は 3 項間漸化式

$$T_{n+1}(z) = b_{n+1}T_n(z) + (z - a_n)T_{n-1}(z)$$

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = b_1$$

をみたし，$deg(T_{2n}(z)) = deg(T_{2n+1}(z)) = n$ である．

$$(z - \lambda_{t+1})T_n^{(t+1)} = A_n^{(t)}T_{n+1}^{(t)} + (z - a_{t+n+1})T_n^{(t)} \tag{19}$$

$$T_n^{(t)} = T_n^{(t+1)} - A_n^{(t+)}T_{n-1}^{(t+1)} \tag{20}$$

による，$T_n^{(t)}(z)$ から $T_n^{(t+1)}(z;\lambda_t)$ への変換で，$T_n^{(t+1)}(z;\lambda_t)$ もまた FST 多項式になることを示すことができ，(19) と (20) の両立条件から，非自励離散可積分系

$$\frac{\mu_{t+1} - a_{n+t+1} - v_n^{t+1}v_{n-1}^{t+1}}{v_n^{t+1}} = \frac{\mu_t - a_{n+t} - v_n^t v_{n+1}^t}{v_n^t} \tag{21}$$

を得ることができる．この離散系を FST 格子とよぶ [8]．この FST 格子 (21) は，独立変数 t と n に依存した 2 つの任意パラメータ μ_t と a_{n+t} を有している．

FST 格子と Miura 型変換　FST 格子と関係する離散系の例をあげる．まず，$V_n^{(t)} = A_n^{(t)}A_{n+1}^{(t)}$ の従属変数変換によって，離散 Lotka-Volterra 方程式を非自励化した方程式

$$\frac{\left(\lambda_{t+1} - a_{n+t+1} - V_{n-1}^{t+1}\right)\left(\lambda_{t+1} - a_{n+t+2} - V_n^{t+1}\right)}{V_n^{t+1}} = \frac{\left(\lambda_t - a_{n+t+1} - V_{n+1}^t\right)\left(\lambda_t - a_{n+t} - V_n^t\right)}{V_n^t}$$

が得られる [7]．また，Miura 型変換 $A_n^{(t)} = \varepsilon_n^{(t+1)} - \varepsilon_n^{(t)}$ を通じて ε-algorithm を非自励化した方程式

$$\left(\varepsilon_n^{t+1} - \varepsilon_n^t\right)\left(\varepsilon_{n-1}^{t+1} - \varepsilon_{n+1}^t\right) = \lambda_t - a_{n+t}$$

も得られる [6]．さらに，

$$\begin{aligned} A_n^t &= \frac{-v_{2n+1}^t v_{2n}^t}{\lambda_t - a_{2n+t+2} - v_{2n+1}^t v_{2n}^t}, & B_n^t &= \frac{\lambda_t - a_{2n+t+2}}{\lambda_t - a_{2n+t+2} - v_{2n+1}^t v_{2n}^t}, \\ C_n^t &= \frac{\lambda_t - a_{2n+t}}{\lambda_t - a_{2n+t} - v_{2n-1}^t v_{2n}^t}, & D_n^t &= \frac{-v_{2n-1}^t v_{2n}^t}{\lambda_t - a_{2n+t} - v_{2n-1}^t v_{2n}^t} \end{aligned}$$

によって，前節とは少し異なるタイプの R_{II} 格子が導かれる．

$$(A_n^t D_{n+1}^t + B_n^t C_n^t - 1)/A_n^t C_{n+1}^t = (B_n^{t+1} C_n^{t+1} + A_{n-1}^{t+1} D_n^{t+1} - 1)/A_n^{t+1} C_n^{t+1} \tag{22}$$

$$(A_n^t D_{n+1}^t a_{2n+t+2} + B_n^t C_n^t a_{2n+t+1} - \lambda_t)/A_n^t C_{n+1}^t$$
$$= (B_n^{t+1} C_n^{t+1} a_{2n+t+2} + A_{n-1}^{t+1} D_n^{t+1} a_{2n+t+1} - \lambda_{t+1})/A_n^{t+1} C_n^{t+1} \tag{23}$$

$$B_n^t D_n^t / A_n^t C_{n+1}^t = B_{n-1}^{t+1} D_n^{t+1} / A_n^{t+1} C_n^{t+1} \tag{24}$$

Acknowledgments. V.P.S. is supported in part by the RFBR grant no. 06-01-00191. S.T. is supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research No. 18540214 from the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

参考文献

[1] G. A. Baker and P. Graves-Morris, *Padé approximants. Parts I and II*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **13, 14**, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.

[2] C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer Series in Comput. Math. **12**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[3] G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen*, J. für die reine und angewandte Mathematik **88** (1880), 146–184.

[4] J. Geronimus, *On polynomials orthogonal with respect to a given sequence of numbers and a theorem by W. Hahn*, Izvestia Acad. Sc. USSR **4** (1940), 215–228.

[5] M. E. H. Ismail and D. Masson, *Generalized orthogonality and continued fractions*, J. Approx. Theory **83** (1995), 1–40.

[6] V. Papageorgiou, B. Grammaticos, and A. Ramani, *Integrable lattices and convergence acceleration algorithms*, Phys. Lett. **A 179** (1993), 111–115.

[7] V. P. Spiridonov, *Solitons and Coulomb plasmas, similarity reductions and special functions*, Special Functions (Hong Kong Workshop, 1999), World Sci. Publishing, 2000, pp. 324–338.

[8] V. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. Zhedanov, *Integrable Discrete Time Chains For the Frobenius-Stickelberger-Thiele Polynomials*, to appear in Comm. Math. Phys.

[9] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods and Applications of Analysis **2** (1995), no. 4, 369–398.

[10] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Commun. Math. Phys. **210** (2000), 49–83.

[11] V. P. Spiridonov and A. S. Zhedanov, *To the theory of biorthogonal rational functions*, RIMS Kokyuroku **1302** (2003), 172–192.

[12] T. N. Thiele, *Interpolationsrechnung*, Leipzig, 1909.

[13] L. Vinet and A. S. Zhedanov, *An integrable chain and bi-orthogonal polynomials*, Lett. Math. Phys. **46** (1998), 233–245.

[14] A. Zhedanov, *Padé interpolation table and biorthogonal rational functions*, Proccedings of RIMS Workshop on Elliptic Integrable Systems (Kyoto, 2004).