

実家としてのガウス

C. F. Gauss as a plactician.

(2006年8月23日)

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

まえおき

わが国で、ガウス (C. F. Gauss, 1777-1855) と言えば[1]『整数論』が有名である。しかし、彼の生まれ故郷ブラウンシュバイクの生家 (空爆で焼失) の跡には銘板があり、「数学者・天文家・物理学者・測地家」と書かれているのが、ドイツまたはヨーロッパにおける評価・認識であろう。

私は、ガウスの多面性の一端を紹介し、わが国におけるガウス像を多少とも修正したいと考えている。それは、彼が職人の息子として手作業を得意としたこと、また幼児期より計算の名手として苦もなく無数の計算を行なったことと関係する。具体的には彼が機械や道具を作ったこと、また新たな数表の作成を含めて、各種の実用的な計算法を考案したことである。今回は、そのうちあまり知られていない二、三の側面を話題にする。

第1節 「ガウスの棒」

これは[1]『整数論』第6章の中に具体的に説明されているが、殆ど誰も注目しなかった。一昨年津田塾大学のシンポジウムで詳細に説明し、翌年の[2]報告書に採録されているので、今回は模型を示し、用途を簡単に述べるに止める。

[1]『整数論』の付録に、ルジャンドル記号に相当するガウス記号の表がある。ここでは馴染みのルジャンドル記号に置き換えて、一覧表を作る。それを厚紙に貼って縦に短冊に切る。これは周知のネイピアの棒を模倣した道具であり、私は仮りに「ガウスの棒」と名づけた。この棒は或る多桁の数が素因子をもつか否かを確認するために使われる。実例を挙げて説明しよう。

	-1	5	11	13	17
3	-	-	-	+	-
5	+	0	+	-	-
7	-	-	+	-	-
83	-	-	+	-	+
89	+	+	+	-	+
97	+	-	+	-	-

	-1	2	3	7	11
3	-	-	0	+	-
5	+	-	-	-	+
7	-	+	-	0	+
83	-	-	+	+	+
89	+	+	-	-	+
97	+	+	+	-	+

左例は、 $n=37469$ の素因数分解を示す。ヤコービ記号 $(-1/n)$, $(2/n)$ および $(3/n)$, $(5/n)$ などを求める。 $(-1/n)$ は $n \bmod 4$ で、 $(2/n)$ は $n \bmod 8$ で、 $(3/n)$, $(5/n)$ などは相互法則によってそれぞれの値を求める。このうちヤコービ記号が+1の値をもつ棒のみを選び出して並べたのが左図である。 $\approx$ 印は棒の一部の省略を示す。棒のうち+記号の多い素数は、左端の素数のうち89であり、じっさい n を89で割れば、割り切れて第二の因数433が求まる。(ヤコービ記号はあくまで素因数の可能性を示すだけであり、非素因数でも+1になる場合がある。この辺の経緯は一般の「整数論」の教科書を参照のこと。) 右図は $n=42001$ の素因数分解の例であり、+記号の多い、素因数の候補97で割って、第二の因数は433となる。

この例を挙げたのは、整数論の大家として理論の側面のみ評価されるガウスが、反面、紙細工にも秀でたことを示すためである。[1]『整数論』第6章は「上記の研究の様々な応用」と題し、整数論の多様な応用を扱っている。循環小数の法則、分母の大きい数の部分分数への分解、それを用いて多桁の小数を求める技術がある。例えば、 $\sqrt{2}$ は連分数により、12番目の近似分数として $G=19601/13860$ を得る。分母は $4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11$ と因数分解され、ガウスによる部分分数の求め

方を適用すれば、

$$G=1/4+3/5+8/9+2/7+9/11-2$$

となる。彼は各素数を循環小数に化す

表を予め作ってあるから、右のように計

算すれば、苦もなく循環小数

$$G=1.41\ 421356\ 421356\ \dots$$

	-2	-2
1/4	.25	
3/5	.6	
8/9	.888888	888888
6/7	.857142	854172
9/11	.818181	818181
	1.414213	564213

が得られる。この例は彼の計算方法を単純化した例示にすぎない。[1]『整数論』第6章317節には、 $\sqrt{23}$ の24番目の近似分数 $F=6099380351/1271808720$ を用いた壮大な計算例を見ることができる。

次いで、掃き出し法による二次の不定方程式の解法、そして上記の因数分解の方法などが扱われる。わが国の整数論の教科書では、「掃き出し法」だけが紹介されているに過ぎない。第6章「様々な応用」は、ガウスが日常、実際の計算のために整数論を応用していた技術の一部に過ぎない。計算機の無かった時代の彼が、《実際家》として如何に計算に工夫を凝らしたかを、以下にも紹介したい。

第2節 復活祭の公式

降誕祭は固定祭日であって、毎年12月25日と決まっている。復活祭は移動祭日であり、今年は4月16日(日曜日)であった。この復活祭の日付を決めることは基督教徒の最重要な課題である。ガウスの母親(文盲)は、息子の誕生日が昇天祭の8日前の水曜日とのみ覚えていた。昇天祭も移動祭日であり、復活祭を起点として決められる。そこで、彼自身にとっても、自分の生年の復活祭を決定することが切実な課題であったのだ。

復活祭を正確に定めるには、(i) 黄金数、(ii) 太陽章、(iii) 日曜日、(iv) 歳首

月齢、(v) 徴税年の五つの条件から決められる。私の旧論文[3]ではこれら古代史、暦学、聖書に基づく概念を説明したが、今回は一切の説明を省略する。ガウスは「ツァハ男爵の編集になる地球・天文科学の促進のための月例通信」1800年8月号に「復活祭の計算」なる論文を寄せた。当時、[1]『整数論』は印刷がほぼ完了に近く、翌年発行されたのであるが、同書の眼目である合同式はこの論文では一切用いず、「数 A を 19 で割ったときの余り」の表現で通している。この計算公式を使う教会関係者という素人にも理解されるためである（これ以後実際に使われた）。

ガウスの計算方式を、今年（西暦2006年）の復活祭の計算の場合に当てはめて紹介しよう。途中の定数は、20～21世紀では、 $M=24$, $N=5$ とおく。

$$2006 + 19 = 105 \text{ 余り } 11, \quad 11 = a \text{ とおく。}$$

$$2006 \div 4 = 501 \text{ 余り } 2, \quad 2 = b \text{ とおく。}$$

$$2006 \div 7 = 286 \text{ 余り } 4, \quad 4 = c \text{ とおく。}$$

$$19a + M = 233 \text{ を求めておき、}$$

$$233 \div 30 = 7 \text{ 余り } 23, \quad 23 = d \text{ とおく。}$$

$$2b + 4c + 6d + N = 163 \text{ から}$$

$$163 \div 7 = 23 \text{ 余り } 2, \quad 2 = e \text{ とおく。 ところで}$$

$$3 \text{ 月 } (22 + d + e) \text{ 日} = 3 \text{ 月 } 47 \text{ 日} = 4 \text{ 月 } (47 - 31) \text{ 日} = 4 \text{ 月 } 16 \text{ 日。}$$

この計算方式を導くには、上記の五つの条件が絡む合同式、中国の剰余定理を解くことが必要なるが、ガウスは「数 A を 19 で割ったときの余り」の形式だけで遂行した。

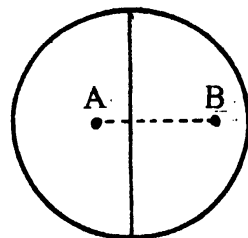
〔補足〕これまで[4]『ガウス全集』にも採録されていないガウスのロシア語論文がある。その内容は[5]高木貞治『近世数学史談』の冒頭で紹介されたゲルリング宛の手紙の、正十七角形の作図法の説明とほぼ同じ内容であり、合同式を一切使用しない所に特色がある。他日紹介したい。

第3節 クモの糸〔挿話〕

天文学に関する内容は後述することにして、ここでは[5]高木『数学史談』の中の一項目について補足する。（むしろ心理学の話題である。）

1807年、ガウスは天文台長兼数学教授としてゲッティンゲンに赴任した。設備も助手もなく、観測から計算まで、さらに道具の作成も台長が一手で行なう。彼は「如何に天文学が好きでも観測には閉口する」と嘆く。さらに「クモ（蜘蛛）の糸を張るのはじれったい仕事である」と。

私はこのクモの糸を張るのは何のためか疑問をもち、心理学の文献から《反応時間》に絡むことを知った。当時の天文観測は、《耳目併用法》で、毎秒を刻む時計の音を聞きつつ、望遠鏡の中を通過する星を見て、子午線通過の時刻を定める方法であった。具体的には、望遠鏡の視野の中央にクモの糸を張っておく。星が左から右に動くものと仮定して、糸を横切る前の音の位置A（例えば56秒）と糸を横切った後の音



の位置B（例えば57秒）を記憶しておき、AとBの間を10等分したと仮定して、星が丁度糸を横切るときの時刻が $5\frac{7}{10}$ 秒であったならば、子午線通過は $56\frac{3}{10}$ 秒となる。

グリニッジ天文台のマスケラインによると、助手の観測は $5\frac{7}{10}$ 秒も遅れるので職務怠慢であり解雇した、と天文雑誌に発表した。1820年に、ケーニヒスベルク天文台のベッセルは、この問題に興味をもって、多くの観測資料を取り寄せ、またベッセル周辺の観測資料も用いて比較検討した。その結果、一般に二人の観測結果が一致することはむしろ稀であり、反応時間には《個人差》がある、と言う結論に至った。

心理学では以後、《反応時間》は一つの研究課題となった。例えば「光が見えたらボタンを押せ」という教示によって測った反応時間よりも、「青なら押せ、赤なら押すな」という教示の場合の反応時間は僅かに長い。つまり、《弁別判断》に要する時間がこの差に相当する、と考えたのであった。もちろん現在は、このように単純化された理論は批判されるが、当時は、そのように考えられていた。

第4節 ラグランジュの定理

[6] ダニングトンの『ガウスの生涯』、原著37頁以下と45頁以下の二ヶ所に、ガウスが「ラグランジュの定理」の新証明を発見した、とある（翻訳の該当箇所も同じ）。これはバフを通じてヒンデンブルクに送られたが、印刷されずに終わった、という。この記述は[7] ザルトリウス『思い出のガウス』の22頁の記述に基づく。

ここまでは正しい。しかし、ダニングトンは余計なことに、追加して「ラグランジュの定理とは平方剰余の相互法則のことだ」と補足する。賢(さか)しらの注釈を付したが故の誤り！ [4] 『ガウス全集』第X-1巻の[8] 『ガウス日記』の当該箇所の注釈を参照すれば防げた筈の誤りである。ガウスの新証明とは、例えば、[9] 高木『解析概論』306頁以下の「定理76」の証明のことである。本来は「ケプラー方程式」を解くための「ラグランジュの展開式」が実質の内容であった。

ケプラー方程式とは、 e を離心率とするとき、

$$(*)1 \quad x = a + e \sin x$$

の形をした超越方程式（ a と e はラジアン単位の定数）であって、未知数 x^{rad} を求めることが困難である。ラグランジュの展開式は、 $a \neq n\pi$ のとき、

$$(*)2 \quad x = a + e \sin a + \frac{e^2}{2!} \frac{d \sin^2 a}{da} + \dots + \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1} \sin^n a}{da^{n-1}} + \dots$$

と展開されることを主張する。

ガウスは[10] 『ライステ』すなわち算術と代数教科書の白紙の部分に《新証明》を書いている。証明の仕方は、本質的に[9] 『解析概論』のそれとほぼ同じである。

ガウス自身は、[8] 日記、第49項に、

「ラグランジュノ定理ノ自然ナル証明ヲ発見セリ。〔1796年〕12月27日」

と記入した。その内容が[10]『ライステ』に記されている。その一部を紹介したいが、版權の問題があるので、直接のコピーの代わりに私の模写を交えて紹介する。

La Grange's Satz des La Grangischen Lehrsatzes.
 $\phi x = t + u\xi$

Beweis des La Grangischen Lehrsatzes. Es sei $x = t + u\xi$
 ラグランジュの定理の証明。 $x = t + u\xi$ と置け。 [ξ は x の関数]

ガウスの証明の骨子は、左辺の関数 ϕx をテイラー展開する。

$$\begin{aligned}\phi x = \phi t + u \frac{d\phi x}{du} + \frac{uu}{1 \cdot 2} \frac{d^2 \phi x}{du^2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3 \phi x}{du^3} + \dots \\ + \frac{u^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n+1} \frac{d^{n+1} \phi x}{du^{n+1}} + \dots\end{aligned}$$

そして係数を除いた各項を、次のように置き換えていく。

$$\frac{d\phi x}{du} = \xi \frac{d\phi x}{dt}, \quad \frac{d^2 \phi x}{du^2} = \frac{d\xi^2 \frac{d\phi x}{dt}}{dt}, \quad \frac{d^3 \phi x}{du^3} = \frac{d^2 \xi^3 \frac{d\phi x}{dt}}{dt^2}, \quad \dots$$

最後の一般項は

$$\frac{d^{n+1} \phi x}{du^{n+1}} = \dots = \frac{\partial^n \xi^{n+1} \frac{\partial \phi x}{\partial t}}{dt^n}$$

Also das Gesetz allgemein bewiesen.

$$\frac{d^{n+1} \phi x}{du^{n+1}} = \dots = \frac{d^n \xi^{n+1} \frac{d\phi x}{dt}}{dt^n}$$

Also das Gesetz allgemein bewiesen. かくして定理は一般的に証明された。

第5節 ケプラー方程式

前節は、言わば《理論家》としてのガウスの側面であった。ところが彼の主著は[11]『天体運動論』(1809)、詳しく言えば『太陽ノ周リノ円錐曲線ニ沿ウ天体ノ運動論』である。その第11条を見ると、彼は「ケプラー問題の表題の下に有名な問題 …… 天文学者は x の正弦によって展開される無限級数の形におくのが習慣である。…… 私の意見では、離心率がさほど小さいと言えない場合には、以下に示すような間接法が実用に適している。」(意識)と述べる。そして彼が提唱する近似法とは、「 x の或る近似値を用いて試行的に解く。それを修正して行き、必要な精度になるまで繰り返す。」(意識)とある。彼が提唱した方法は、対数表に即していて巧妙な方法ではあるが、込み入ってい

るので、紹介は省略する。

ここで私が強調したいと思うのが、《理論家》ガウスが『天体運動論』のような《実用的な》内容の書物（もちろん天文学の理論書ではあるが、その大半の内容は、天文学徒がガウスの数値計算を実際に辿れば、有名な小惑星の軌道推定法が理解でき、学徒みずから計算ができるように親切に書かれている）の中では、《完全に実際家の立場》に変身している点である。この点は、この後でも私は多くの実例を挙げて強調する積もりである。

わが国の天文計算の一般書、例えば[12]『天文計算セミナー』の中で解説された「ケプラー方程式の解法」は、やはり逐次近似法である。ケプラー方程式を

$$(*1) \quad x - e \sin x = a$$

と置くとき、 x の近似値を仮に y として代入すれば、

$$(*3) \quad y - e \sin y = b$$

となるであろう。もちろん $a \neq b$ であるから $x = y + \Delta$ とすれば Δ は未知ながら微小な値である。高次の項を省略して、 $\sin \Delta = \Delta$, $\cos \Delta = 1$ と考えてもよいから、

$$(*4) \quad b = x - \Delta - e (\sin x - \Delta \cos x)$$

となる。式(*1)と差し引きして、

$$a - b = \Delta - \Delta e \cos x = \Delta (1 - e \cos x)$$

となり、これから Δ の近似値を定める公式

$$(*5) \quad \Delta = (a - b) / (1 - e \cos x)$$

が得られた。次にはいま求めた Δ を用いて、 $y' = y + \Delta$ なる値を改めて次の近似値としてケプラー方程式に代入すれば、さらに近似が高まる。

[11]『天体運動論』には、その後次々に補遺が加えられた。補遺第11条は特に興味深い。上に紹介した現行の逐次近似法は、実はエンケ (J. F. Encke) が「ベルリン天文年報」1838 年の論文で報告した方法であったのだ。

〔補足〕数値例

エンケの方法の有効性を示すために、ガウスが[11]『天体運動論』第13節で挙げた数値例を、エンケの方法（すなわち現行の一般書に例示された方法）で解いてみよう。ガウスの例題は、小惑星《ユノ》のデータを用いる。

$$e = 14^\circ 03' 20'' = 0.2453157^{\text{rad.}}$$

$$a = 332^\circ 28' 54.77'' = 5.8029035^{\text{rad.}}$$

ガウスは初期値 $y = 332^\circ = 5.6897734^{\text{rad.}}$ から出発した。

(第一回) 式(*3)により、 $b = 5.826522$, 式(*5)により、 $\Delta = -0.0301882$,

$$y' = 5.6897734 - 0.0301882 = 5.6595852.$$

(第二回) 式(*3)により、 $b' = 5.8028401$, 式(*5)により、 $\Delta' = 0.0000792$,

$$y'' = 5.6595852 + 0.0000792 = 5.6596644.$$

(第三回) 式(*3)により、 $b'' = 5.8029035$. 目標値 $a = 5.8029035$ に等しい。

よって収束し、 $x = 5.6596644 = 324^\circ 27' 48.84''$ が求める解である。

第6節 対数表と三角対数表

今やパソコンと電卓が日常化した世の中では想像もつかない昔ながら、50年前の研究室ではタイガー式回転計算機、さらに古くから『丸善対数表』が用いられていた。わが国ではソロバンも使われていた。その時代の泣き所は（ソロバンが不得意の者にとって）、多桁の数どうしの掛け算と割り算であった。ヨーロッパ人にとっては特に深刻であった。常用対数表（以下、常用対数をただ対数と略す）がこれを救う手段である。さらに天文計算では三角関数表と三角対数表が欠かせない。

7桁の対数表は、引き数が5桁で、対数が7桁表示されている。引数を7桁で用いるために、表差（比例部分）が表示されているので、下2桁を補って引数7桁とする。これは $\log a + \log b = \log ab$ まで求まったとき、対数 $\log ab$ を真数 ab に戻すときに必要となる。当時、補間は常用されていた。

三角対数表は、天文学で、黄道上 l° 、軌道傾斜 e° の位置を、赤道座標 a° , d° に変換するときの公式：

$$\sin d = \sin l \cdot \sin e, \quad \tan a = \tan l \cdot \cos e$$

の計算の際に使われる。その手間を考えてみる。右式を例にとる。①変数 l から三角表により $\tan l$ を求め、変数 e から $\cos e$ を求める。②対数表を引いて $\log(\tan l)$ と $\log(\cos e)$ を求める。③和 $\log(\tan l) + \log(\cos e) = A$ を作る。④ $A = \log(\tan a)$ だから、まず対数表によって真数 $\tan a$ に直し、⑤次いで三角表により角度 a に直す。ところが三角対数表があれば、(1) 変数 l から直接 $\log(\tan l)$ が、変数 e から直接 $\log(\cos e)$ が得られ、(2) 和 $\log(\tan l) + \log(\cos e) = A = \log(\tan a)$ が得られる。(3) A から三角対数表を用い、直接 a が求まる。計算が楽になった恩恵は多大である。

もちろん三角関数の値が直接必要な場合には三角関数表が使われる。

ガウスは天才少年として、領主ブラウンシュバイク公爵に謁見したとき、贈り物として [13]『シュルツェの対数表』を与えられた（彼が手にする初めての数表であった）。上巻が常用対数表、下巻が三角真数・三角対数表であって、[14]『丸善7桁対数表』1冊にはほぼ匹敵する。（後者は手ごろな値段であるが、シュルツェは当時かなり高価な本であり、少年には手が届かなかった。）彼は、多桁の数表が必要な天文計算の場合は図書館や天文台の数表を用い、日常は手元のシュルツェを用いたと思われる。（『ライステ』の白紙が雑記帳として使われたように、シュルツェにも数々の記入がなされている。）

第7節 和と差の対数表

わが国で「ガウスの対数表」の名で発売されたのは、本稿の主人公と別人である。ドイツまたはヨーロッパで通用するのは、全く別の原理に基づく数表である。

前節で述べたように、対数表の恩恵は計り知れないのであるが、例えば次の問題を解くとき、一つの難点が生じる。二次方程式の根の公式：

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 - b}$$

において $\log a$ から $2 \log(a/2)$ まで求まった段階で、根号の中の値を求めるために

は、一度真数 $(a/2)^2$ に戻さねばならない。二元一次連立方程式で

$$ax + by = e \quad x = (ed - bf)/(ad - bc)$$

$$cx + dy = f \quad y = (af - ce)/(ad - bc)$$

の共通分母を求めようとして $\log(ad)$ と $\log(bc)$ を得たとしても $\log(ad-bc)$ を知るには、いったん真数 ad と真数 bc に戻さねばならない。天文計算の公式：

$$r = l / (1 + e \cos w)$$

を求める際、 $\log e$, $\log \cos w$ から分母のため $\log(e \cos w)$ を得たとしても、分母の $1 + e \cos w$ を得るためには、真数 $e \cos w$ に戻さなければならない。

この例のように、「 $\log a$ と $\log b$ を知って、真数 a と真数 b に戻すことなく直接 $\log(a+b)$ または $\log(a-b)$ を知るための数表、すなわち和と差の対数表」があればどれほど便利であろうか、と実際家ガウスが痛感したことは頷ける。彼はたまたまイタリア人レオネリ(Z. Leonelli)の論文を知り、1808 年に [15] その書評を書き、1812 年に実際に [15] ガウス自身がこの「和と差の対数表」を作り、先の「月例通信」に報告した。

「月例通信」の原文が直接参照できないので、以下では私が再構成した数表を示すことにする。なお、私はパリの古書店でオユル(J. Houël)の「5 桁対数表」を買ったら、和と差とに分離しているけれど本質は同じ物が載っているので、参照した。

ガウスの「和と差の対数表」は A, B, C の三つの欄から成り、

A 欄には $a = \log x$, B 欄には $b = \log(1 + 1/x)$, C 欄には $c = \log(1 + x)$ が配列される。A 欄の引数は x が等間隔ではなく、 $\log x$ の値が等間隔に並んでいる。実際には a から $a \log a = x$ を求め、 $1 + 1/x$ を作って対数 b に直し、 $1 + x$ を作って対数 c に直す。これによって a を等間隔の引数にすることができる。表の初めの部分は次の通り：

A	B	d	C	d
0.000	0.30103		0.30103	
0.001	0.30053	50	0.30153	50
0.002	0.30003	50	0.30203	50
0.003	0.29953	50	0.30253	50
0.004	0.29903	50	0.30303	50
0.005	0.29854	49	0.30354	51

《和の対数の原理》は、 $u/v = w > 1$ と仮定して、 w に対応する B 欄の $1 + 1/w$ に u を掛けて $u+v$ を得る。または w に対応する C 欄の $1 + w$ に v を掛けて $v+u$ を得る。これを対数の関係に置き換えれば、 $\log(u+v)$ が得られる。

この『和と差の対数表』の使い方を、ガウスが「月例通信」に載せた [15] 解説と数値例と共に紹介する。

A	B	d	C	d
0.130	0.24088	43	0.37088	57
0.131	0.24045	42	0.37145	58
0.132	0.24003	43	0.37203	57
0.133	0.23960	42	0.37260	58
0.134	0.23918	43	0.37318	57
0.135	0.23875		0.37375	

I. 二つの数の対数 $\log u$, $\log v$ から、その和の対数 $\log(u+v)$ を求めよ。ただし $\log u > \log v$ とする。

〔解〕 $\log u - \log v = a$ をA欄から探し、それに対応するB欄から b を、またはC欄から c を求めると、

$\log(u+v) = \log u + b$ または $\log(u+v) = \log v + c$
となる。

〔数値例〕 $\log u = 0.36173$, $\log v = 0.23046$ のとき、差 0.13128 を求めて〔それに対応する b または c を求めて、〕 次のように計算できる。

b	0,24033	c	0,37161
$\log u$	0,36173	$\log v$	0,23045
$\log(u+v)$	0,60206	$\log(u+v)$	0,60206

ここまで〔 〕内の私の補足を除き、ガウスの解説を直訳した。ガウスの解説は何と平明ではないか！ 先の「復活祭の公式」と同様に、一般人を対象にした彼の解説は、常にこのように明快である。《実際家》ガウスは、わが国で認知されているガウスとは別の顔を持つことがお分かり頂けたと思う。

《例題の出所》 彼は素数 23 や素数 17 などの対数をいつも使っていたから、
 $\log 2,3 = 0,36173$, $\log 1,7 = 0,23046$, $\log 4 = 0,60206$
などは、すぐに想いついた。（後の例題の数値は分からない。）

続いて二つの数の対数 $\log u$, $\log v$ から、その差の対数 $\log(u-v)$ を求める問題の解説がある。《差の対数の原理》は二つの場合がある。

第一法 ($u/v = 1+w > 2$ の場合)。 $1+w$ に相当するC欄の値を探し、それに対応するA欄の値 w を見る。 $w = u/v - 1$ だから両辺に v を掛けて $wv = u - v$ を得る。

A	B	d	C	d
0.530	0.11231		0.64231	
0.531	0.11208	23	0.64308	77
0.532	0.11186	22	0.64386	78
0.533	0.11163	23	0.64463	77
0.534	0.11140	23	0.64540	77
0.535	0.11118	22	0.64618	78

〔数値例〕 $\log u = 0.89042$, $\log v = 0.24797$ のとき、差の対数 $\log(u-v)$ を求めよ。二つの数値の差は 0.64245 である。この数値を C 欄で探し、それに対応する A 欄の値を見ると 0.53018 だから $0.24797 + 0.53018 = 0.77815$ が、求める差の対数 $\log(u-v)$ である。B 欄を使う方法は、右側を見よ。

a	0,53018	b	0,11227
$\log v$	0,24797	$\log u$	0,89042
$\log(u-v)$	0,77815	$\log(u-v)$	0,77815

第二法 ($u/v=1+1/w < 2$ の場合)。 $1+1/w$ に相当する B 欄の値を探し、それに対応する A 欄の値 w を見る。 $u/v-1=1/w$, $u-v=v/w$ だから、 v を w で割ればよい。

A	B	d	C	d
0.825	0.06056	13	0.88556	87
0.826	0.06043	13	0.88643	87
0.827	0.06030	13	0.88730	87
0.828	0.06017	13	0.88817	87
0.829	0.06004	13	0.88904	87
0.830	0.05991	13	0.88991	87

〔数値例〕 $\log u=0.25042$, $\log v=0.19033$ のとき、差の対数 0.06009 を B 欄で探し、対応する A 欄の 0.82862 を 0.19033 から引いた -0.63829 が差の対数 $\log(u-v)$ に等しい。 C 欄を使う方法は、右側を見よ。

a	0,82862	c	0,88871
$\log v$	0,19033	$\log u$	0,25042
$\log(u-v)$	9,36171	$\log(u-v)$	9,36171

なおガウスの時代には、負の対数値 -0.63829 を避けるため 10 を足して 9.36171 と表示した。計算には、もちろん負の対数値を用いた。さらに真数そのものが負の場合、対数値の後に n を付した。例えば -0.02 の対数は、まず $\log 0.02=-1.69897$ であり、 10 を足して 8.30103 となり、さらに真数が負であることを示すため、 $8.30103n$ と表示される。『天体運動論』の中は、このような表示である。一言付記した。

計算の実際については、以上のように誠に親切に書かれている。しかし、ガウスは実に《驚くべきこと》を書き添えた。その趣旨を敷衍すれば、

「 45° から 90° までの角度に対応する三角対数表の

$$A' = \log \tan \theta^\circ, \quad B' = \log \sec \theta^\circ, \quad C' = \log \operatorname{cosec} \theta^\circ$$

が和と差の対数表の半分の値に相当する。従って十分に和と差の表の代用になる …」
と。これは、 $a = \log \tan^2 \theta^\circ$ に、

$$b = \log \sec^2 \theta^\circ = \log(1 + 1/\tan^2 \theta^\circ) \quad \text{と} \quad c = \log \operatorname{cosec}^2 \theta^\circ = \log(1 + \tan^2 \theta^\circ)$$

を対応させることであり、彼の主張は正しい。ただし、実際に三角対数表を引いて彼の主張を確かめようとすれば、引数は 45° まで表示され、 45° を超えるときは下欄外の値を引数として、逆向きに検索せねばならない（紙面の節約のための印刷業者による工夫）。かように面倒である。彼は三角対数表には、よほど習熟していたに違いない。

何処からこれを想い付いたのであろうか？ ガウスは再び《理論家》の顔に変身した！

文 献

1. C. F. Gauss : *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, 1801.
高瀬正仁訳、ガウス整数論、朝倉書店、1995.
2. 杉本敏夫：ガウスが行なった数値計算（続）、第15回数学史シンポジウム(2004)、津田塾大学数学・計算機科学研究所報26, 2005.
3. 杉本敏夫：ガウスの復活祭公式、明治学院大学論叢、総合科学研究、第11号、1981.
4. C. F. Gauss : *Werke*, I-XII, 1863-1933.
5. 高木貞治：近世数学史談、初版 1931, 引用は岩波文庫、1995 による。
6. G. D. Dunnington : *Carl Friedrich Gauss — Titan of science*, M. A. A., 2004, 1st ed., 1955. 銀林浩ほか訳、ガウスの生涯、東京書籍、1976.
7. W. Sartorius v. Waltershausen : *Gauss zum Geächtniss*, Leipzig, 1862.
8. *Das Tagebuch (Notizenjournal) von C. F. Gauss*, herausgegeben von F. Klein und L. Schlesinger et al., *Gauss'sche Werke*, X-1.
K-R Biermann et al. : *Mathematische Tagebuch von C. F. Gauss*, Ostwalds Klassikel, 1979.
9. 高木貞治：解析概論、岩波書店、初版 1943, 引用は改定第三版 1961 による。
10. ライステ。Ch. Leiste : *Die arithmetik und algebra*, 1790. ライステ著：算術と代数（教科書）の白紙の部分にガウスが記入した数学的記述によって有名。『ライステ』とは、元の教科書ではなく、このガウスの記述内容を指す。
11. C. F. Gauss : *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburg, 1809. English translation, by C. H. Davis : *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic section*, 1st ed. 1847, rev. ed. Dover, 1963.
12. 堀源一郎編：天文計算セミナー、恒星社厚生閣、1981.
13. J. C. Schulze : *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer Tafeln*, Bd. I u. Bd. II, Berlin, 1778.
14. 丸善出版事業部編：丸善対数表、初版 1943, 17版 1989.
15. C. F. Gauss : *Anzeige, über Leonllis logarithmische Suplemente*, in *Gauss'she Werke*, VII, 121-127. *Anzeige, Tafel zur bequemern berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen*, ... in *Gauss'she Werke*, III, 244-246.