数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 108-121

超幾何微分方程式の解の多重対数関数による表示と多重ゼータ値の関係式

早稲田大学大学院理工学研究科　大井　周 (Shu OI)
Graduate School of Science and Engineering,
Waseda University

概要

3 点に確定特異点を持つ Fuchs 型微分方程式の semisimple な場合である超幾何微分方程式の解を多重対数関数を用いて具体的に書き表し，その接続公式が height でまとめられた Euler の反転公式として解釈できることを示す．また，多重ゼータ値の大野-Zagier 型公式がその極限値として解釈されることを示す．

1 イントロダクション

Gauss の超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0 \tag{1}$$

はパラメータを $\lambda_1=\beta,\quad \lambda_2=\alpha+1-\gamma,\quad \lambda_3=-\alpha$，変数を $v_1=w$, $v_2=\dfrac{1}{\beta}z\dfrac{dw}{dz}$ とおくと，

$$d\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\lambda_3\theta_3)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\theta_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\frac{dz}{z}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dz}{1-z},\quad \theta_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dz}{z}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dz}{1-z}$$
$$\theta_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dz}{z}+\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}\frac{dz}{1-z}$$

と Pfaff 型に書くことが出来る ([AoK])．

これは形式的 KZ 方程式

$$dG=\left(X\frac{dz}{z}+Y\frac{dz}{1-z}\right)G \tag{3}$$

において X,Y が semisimple な行列の場合に相当する．X,Y が nilpotent な行列の場合は解は多重対数関数

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}} \tag{4}$$

の有限和を成分とするベクトルであり，その原点ならびに $z=1$ の近傍における解の接続公式が多重対数関数並びに多重ゼータ値の関係式を与えることが知られている．多重対数関数のインデックスに対し，和 $k=k_1+\cdots+k_n$ を weight，n を depth，$k_1,\ldots,k_n$ の中で 2 以上のものの数を height と呼ぶ．また，インデックスを非可換ベキ級数環 $\mathfrak{H}=\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ の部分代数 $\mathfrak{H}^1=\mathbf{Q}+\mathfrak{H}y$($y$ で終わる word 全体のなす部分代数) の元と同一視し，

$$\mathrm{Li}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y;z)=\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(z)$$

とかくことにする．また，本稿のみの記号であるが $\mathbf{w}\in\mathfrak{H}$:word に対して $|\mathbf{w}|=\mathbf{w}$ の長さ，$d(\mathbf{w})=\mathbf{w}$ 中の y の数，$h(\mathbf{w})=\mathbf{w}$ 中の yx の数と定める．

また，もっとも一般的な X,Y を形式元とみなした場合については，原点で漸近挙動 $G_0z^{-X}\to 1$ をもつ解 G_0 は $\mathfrak{H}$ の shuffle 積とゼータ正規化 reg([IKZ] による) を用いて

$$G_0=(1-z)^{-Y}\sum_{W\in\mathfrak{H}:\mathrm{word}}(\mathrm{Li}(\mathrm{reg}(w);z)W)\,z^X$$

(w は W の小文字化) と書くことが出来，$z\to 1$ で漸近挙動 $G_1(1-z)^Y\to 1$ を持つ解 G_1 との比 $\phi_{\mathrm{KZ}}(X,Y)=G_1^{-1}G_0$ は Drinfel'd Associator と呼ばれる形式的ベキ級数環 $\mathbf{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ の元で係数が多重ゼータ値で書かれる．それの満たす様々な関係式より多重ゼータ値の満たす関係式を得ることが出来る ([Ok],[OU])．

今回は同様の方法を超幾何微分方程式にも適用し，その解を多重対数関数の有限和を係数に持つ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の無限級数表示を得ることが出来ること，その表示式は両辺の超幾何関数，多重対数関数の級数表示の収束域のみならず普通の方法で $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の普遍被覆上に解析接続した関数と考えても成立していることを示した．

$\gamma,\gamma-\alpha-\beta\notin\mathbf{Z}$ のとき，超幾何微分方程式 (1) の原点の近傍における一次独立な解 $\varphi_0^{(0)}(z),\varphi_1^{(0)}(z)$ ならびに $z=1$ の近傍における 2 つの一次独立な解 $\varphi_0^{(1)}(z),\varphi_1^{(1)}(z)$ は超幾何関数を用いて

$$\varphi_0^{(0)}(z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n$$

$$\varphi_1^{(0)}(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)\tag{5}$$

$$\varphi_0^{(1)}(z)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$$

$$\varphi_1^{(1)}(z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)\tag{6}$$

と書き表すことが出来，その間の接続公式は $\Phi_i=\begin{pmatrix}\varphi_0^{(i)} & \varphi_1^{(i)}\\ \frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_0^{(i)} & \frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_1^{(i)}\end{pmatrix}$ $(i=0,1)$ として

$$\Phi_1^{-1}\Phi_0=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\\ \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}\end{pmatrix}\tag{7}$$

で与えられる．

超幾何関数と同様の方法により，$\Phi_1^{-1}=\begin{pmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{pmatrix}$ とおくと，ψ_{11},ψ_{12} もまた多重対数関数を係数に持つパラメータ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の級数として計算することが出来，これらを (7) に代入して $(1,1)$ 成分の $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の係数を比較することにより多重対数関数に関する Euler の反転公式の一般化に相当する関係式を得ることが出来る．

超幾何微分方程式と多重対数関数の関係については大野-Zagier 型の公式 ([OZ])

$$\sum_{k,n,s} G_0(k,n,s;t)x^{k-n-s}y^{n-s}z^{s-1} = \frac{1}{xy-z}(1-F(\alpha-x,\beta-x,1-x;t)) \tag{8}$$

$$\sum_{k,n,s} G_0(k,n,s;1)x^{k-n-s}y^{n-s}z^{s-1} = \frac{1}{xy-z}(1-\exp(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}(x^n+y^n-\alpha^n-\beta^n))) \tag{9}$$

$G_0(k,n,s;z) =$ weight k, depth n, height s で $k_1 \geq 2$ なる多重対数関数全体の和

(α,β は $\alpha+\beta = x+y$, $\alpha\beta = z$ で与えられる)
が知られているが，この方法で得られた接続公式の $z \to 1$ における極限がまさに大野-Zagier 型公式であり，[OZ] では天下り的に与えられた表示式が超幾何微分方程式を満たすという方針で証明されていた関係式に超幾何微分方程式の反復積分表示と接続問題に起因する自然な解釈を与える結果となっている．

また，前述の結果は超幾何微分方程式の解の接続公式のうち，原点並びに $z=1$ において正則な解同士の接続を見ていることに相当する．今回の方法は非正則な解，$z=\infty$ における解に対して適用することも出来，その結果いくつかの多重対数関数，多重ゼータ値の関係式を計算することが出来る．しかし，これに関しては計算を綺麗な形にまとめることが出来ず，現段階では低次の項をいくつか計算するに留まっている．また，その結果も正則な場合の関係式から求めることが出来るものに留まっており，非正則な場合の一般型を計算出来たとしても大野-Zagier の関係式を越える関係式は得ることが出来ないと予想される．

本稿は大井 [Oi] の要約に相当するため，証明の詳細などはそちらを参照していただきたい．

2 超幾何関数の多重対数関数による表示

Gauss の超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は次のように多重対数関数を用いて表示する事が出来る．

定理 1. パラメータを $\lambda_1=\beta$, $\lambda_2=\alpha+1-\gamma$, $\lambda_3=-\alpha$ とおく．
$|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3| < \frac{1}{4}$ のとき，超幾何関数は

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1-\sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}}\sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)}G_0(l+m+n,l+p,q+1;z)\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n \tag{10}$$

$$\frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma;z) = -\sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}}\sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)}G(l+m+n-1,l+p,q+1;z)\lambda_1^{l-1}\lambda_2^m\lambda_3^n \tag{11}$$

と表示される．ここで

$$G_0(k,n,s;z) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\in\mathbf{N}\\ k_1\geq 2\\ k_1+\cdots+k_n=k\\ \#\{i|k_i\geq 2\}=s}} \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(z) = \sum_{\substack{\mathbf{w}\in\mathfrak{H}:\mathrm{word}\\ |\mathbf{w}|=k-2,d(\mathbf{w})=n-1,\\ h(\mathbf{w})=s-1}} \mathrm{Li}(x\mathbf{w}y;z) \tag{12}$$

$$G(k,n,s;z) = \sum_{\substack{\mathbf{w}\in\mathfrak{H}:\mathrm{word}\\ |\mathbf{w}|=k-1,d(\mathbf{w})=n-1,\\ h(\mathbf{w})=s-1}} \mathrm{Li}(\mathbf{w}y;z) = z\frac{d}{dz}G_0(k+1,n,s;z), \tag{13}$$

であり，係数 $a_{p,q}^{(l,m,n)}$ は

$$a_{p,q}^{(l,m,n)} = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{q}{k} \binom{l+p-q-1}{l-k-1} \binom{m+n-p-k-1}{n-1}$$

で与えられる．ただし，二項係数 $\binom{p}{q}$ は $p<0, q<0$ or $p<q$ のときは 0 とみなす．

右辺の級数は $z \in \mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の普遍被覆上で広義一様収束し，$\forall z \in \mathfrak{U}$ でこの表示式は成立する．

証明は [AoK] に従って超幾何微分方程式の Pfaff 型表示 (2) を初期値 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ から反復積分によって解くことにより成される．$\mu=\{1,2,3\}$ からなる有限列 ($\mu=\emptyset$ でもよい) とし，解析関数 $L_\mu(z), L'_\mu(z)$ を $i=1,2,3$ に対し

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}L_{i,\mu}(z)\\L'_{i,\mu}(z)\end{pmatrix} = \theta_i \begin{pmatrix}L_\mu(z)\\L'_\mu(z)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}L_{i,\mu}(0)\\L'_{i,\mu}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}L_\emptyset(z)\\L'_\emptyset(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{14}$$

で定めると，解は

$$\begin{pmatrix}F(\alpha,\beta,\gamma;z)\\ \frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma;z)\end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_r=1,2,3} \lambda_{\mu_1}\cdots\lambda_{\mu_r} \begin{pmatrix}L_{\mu_1,\ldots,\mu_r}(z)\\L'_{\mu_1,\ldots,\mu_r}(z)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{15}$$

と表示される．

ここで，各 $L_\mu(z)$ を多重対数関数で表示することを考える．明らかに

$$\begin{aligned}&L_{\mu,1}(z) = L'_{\mu,1}(z) = L_{\mu,2}(z) = L'_{\mu,2}(z) = 0\\ &L_{2,\mu}(z) = L_{3,\mu}(z) = 0,\end{aligned}$$

であり，その他に対しては次の補題が成立する．

補題 2. 変換 $T_0 : \{\{1,2,3\}$ の有限列$\} \to \mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ を

(i) $T_0(\emptyset) = 1$

(ii) $T_0(3,1,\mu) = (xy-yx)T_0(\mu)$

(iii) $T_0(1,\mu) = yT_0(\mu)$

(iv) $T_0(2,\mu) = (x+y)T_0(\mu)$

(v) $T_0(3,\mu) = xT_0(\mu)$ $\qquad$ μ は 1 で始まらない

で定めると，$L_{1,\mu,3}(z)$, $L'_{\mu,3}(z)$ は

$$L_{1,\mu,3}(z) = -\mathrm{Li}(xT_0(\mu)y;z) \tag{16}$$
$$L'_{\mu,3}(z) = -\mathrm{Li}(T_0(\mu)y;z). \tag{17}$$

と表示される．

証明は各 L, L' と多重対数関数が同じ微分方程式を満たすことを示すことにより，μ の長さに関する帰納法でなされる．

この補題により (15) は

$$\begin{pmatrix} F(\alpha,\beta,\gamma;z) \\ \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} F(\alpha,\beta,\gamma;z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{\mu_2,\dots,\mu_{r-1}=1,2,3} \lambda_1\lambda_{\mu_2}\cdots\lambda_{\mu_{r-1}}\lambda_3 L_{1,\mu_2,\dots,\mu_{r-1},3}(z) \\ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1}=1,2,3} \lambda_{\mu_1}\cdots\lambda_{\mu_{r-1}}\lambda_3 L'_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1},3}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{\mu_2,\dots,\mu_{r-1}=1,2,3} \lambda_1\lambda_{\mu_2}\cdots\lambda_{\mu_{r-1}}\lambda_3 \operatorname{Li}(xT_0(k_2,\dots,k_{r-1})y;z) \\ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1}=1,2,3} \lambda_{\mu_1}\cdots\lambda_{\mu_{r-1}}\lambda_3 \operatorname{Li}(T_0(k_1,\dots,k_{r-1})y;z) \end{pmatrix}$$

$$=: \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} Q(l,m,n;z) \\ Q'(l,m,n;z) \end{pmatrix} \lambda_1^l \lambda_2^m \lambda_3^n. \tag{18}$$

と表示することが出来る．ここで，$Q(0,0,0;z)=1$, $Q'(0,0,0;z)=0$ であり，$(l,m,n)\neq(0,0,0)$ であれば

$$\begin{aligned} Q(0,m,n;z) = Q(l,m,0;z) &= Q'(l,m,0;z) = 0 \\ Q(l,m,n;z) &= -\sum_{\mu\in J(l-1,m,n-1)} \operatorname{Li}(xT_0(\mu)y) \\ Q'(l,m,n;z) &= -\sum_{\mu\in J(l,m,n-1)} \operatorname{Li}(T_0'(\mu)y) \end{aligned}$$

和の走る範囲 $J(l,m,n) := \{\mu : \{1,2,3\}$ の有限列 $|$ 1 が l 個, 2 が m 個, 3 が n 個 $\}$ である．

このとき，

$$Q(l,m,n;z) = -\sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)} G_0(l+m+n, l+p, q+1; z) \tag{19}$$

であることを示せば定理の表示式を得る．それは次の補題によって求めることが出来る．

補題 3. (i)

$$\sum_{\mu\in J(l,0,n)} T_0(\mu) = \overbrace{x\cdots x}^{n\text{個}}\overbrace{y\cdots y}^{l\text{個}} \tag{20}$$

(ii)

$$\sum_{\mu\in J(l,m,n)} T_0(\mu) = \sum_{p,q=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} \binom{q}{k}\binom{l+p-q}{l-k}\binom{m+n-p-k}{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{w}\in\mathfrak{H}:\text{word} \\ |\mathbf{w}|=l+m+n,\, d(\mathbf{w})=l+p, \\ h(\mathbf{w})=q}} \mathbf{w} \right) \tag{21}$$

証明. (i) l に関する帰納法で示せる．$l=0$ のとき，

$$\sum_{\mu\in J(0,0,n)} T_0(\mu) = T_0(\underbrace{3,\ldots,3}_{n\text{ 個}}) = x^n$$

$l-1$ 以下のとき成立しているとする．インデックスを左から見て最初に 1 が現れる位置で和を分割すると，

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\in J(l,0,n)} T_0(\mu) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\mu\in J(l-1,0,n-i)} T_0(\underbrace{3,\ldots,3}_{i\text{ 個}},1)T_0(\mu)\\ &= yx^n y^{l-1} + \sum_{i=1}^{n} x^{i-1}(xy-yx)x^{n-i}y^{l-1}\\ &= x^n y y^{l-1} = x^n y^l\end{aligned}$$

(ii) 変換 T_0' を，$T_0'(1)=y$, $T_0'(2)=x+y$, $T_0'(3)=x$, $T_0'(\mu_1,\mu_2)=T_0'(\mu_1)T_0'(\mu_2)$ で定める．また，$J'(l,m,n)=\{\mu\in J(l,m,n)|\mu$は $(1,3)$ を部分列として含まない$\}$ とおくと，(i) より

$$\sum_{\mu\in J(l,0,n)} T_0(\mu) = \overbrace{x\cdots x}^{n\text{ 個}}\overbrace{y\cdots y}^{l\text{ 個}} = T_0'(\overbrace{3\cdots 3}^{n\text{ 個}}\overbrace{1\cdots 1}^{l\text{ 個}}) = \sum_{\mu\in J'(l,0,n)} T_0'(\mu)$$

とかける．よって，

$$\sum_{\mu\in J(l,m,n)} T_0(\mu) = \sum_{\mu\in J'(l,m,n)} T_0'(\mu)$$

である．

今，$\mu\in\{1,2,3\}$ の有限列に対し，$T_0'(\mu)$ は $\mathfrak{H}$ の単項式の $\mathbf{Z}$ 線形結合であり，各単項式の係数は必ず 1 である．よって，各単項式 $\mathbf{w}$ に対して $\{\mu\in J'(l,m,n)|T_0'(\mu)$ が $\mathbf{w}$ を和の成分として含む$\}$ の数を数えれば，それが $\sum_{\mu\in J'(l,m,n)} T_0'(\mu)$ における $\mathbf{w}$ の係数となっている．

$\mathbf{w}:|\mathbf{w}|=l+m+n$, $d(\mathbf{w})=l+p$, $h(\mathbf{w})=q$ とすると，その個数は 1 を y の位置に，3 を x の位置に 13 と並ばないように配置する組み合わせの数に等しいので，k を yx と並んでいる y に 1 を配置する個数として

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{q}{k}\binom{l+p-q}{l-k}\binom{m+n-p-k}{n}$$

と書くことが出来る．よって，

$$\sum_{\mu\in J(l,m,n)} T_0(\mu) = \sum_{p,q=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\binom{q}{k}\binom{l+p-q}{l-k}\binom{m+n-p-k}{n}\left(\sum_{\substack{\mathbf{w}\in\mathfrak{H}:\text{word}\\ |\mathbf{w}|=l+m+n,d(\mathbf{w})=l+p,\\ h(\mathbf{w})=q}}\mathbf{w}\right)$$

である．

(証明終)

以上より

$$Q(l,m,n;z) = -\sum_{\mu\in J(l-1,m,n-1)} \mathrm{Li}(xT_0(\mu)y) = -\sum_{\mu\in J'(l-1,m,n-1)} \mathrm{Li}(xT_0'(\mu)y;z)$$
$$= -\sum_{p,q=0}^{m}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{q}{k}\binom{l+p-q-1}{l-k-1}\binom{m+n-p-k-1}{n-1}\sum_{\substack{\mathbf{w}\in\mathfrak{H}:\mathrm{word}\\ |\mathbf{w}|=l+m+n-2,\\ d(\mathbf{w})=l+p-1,\\ h(\mathbf{w})=q}} \mathrm{Li}(x\mathbf{w}y;z)$$
$$= -\sum_{p,q=0}^{m}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{q}{k}\binom{l+p-q-1}{l-k-1}\binom{m+n-p-k-1}{n-1}G_0(l+m+n,l+p,1+q;z)$$
$$= -\sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)} G_0(l+m+n,l+p,1+q;z)$$

である．

また，定理の右辺の収束性は次の命題により保証される．

命題 4. $\mathfrak{U}$ を $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の普遍被覆とする．$K\subset\mathfrak{U}$：コンパクト部分集合に対し，K にのみ依存する定数 M_K が存在し，

$$|\mathrm{Li}(\mathbf{w};z)| < M_K \quad \forall\mathbf{w}\in\mathfrak{H}^1 \ \forall z\in K \tag{22}$$

証明は Lappo-Danilevsky[L] の方法を応用することによりなされる．

この命題と weight k のインデックスは 2^{k-2} 個であることより，$\sum_{p,q=0}^{m}|G_0(l+m+n,l+p,q+1;z)| < 2^{l+m+n}M_K$ である．また $a_{p,q}^{(l,m,n)}$ に関しても

$$|a_{p,q}^{(l,m,n)}| = |\sum_{k=0}^{l-1}\binom{q}{k}\binom{l+p-q-1}{l-k-1}\binom{m+n-p-k-1}{n-1}| < \sum_{k=0}^{l-1} 2^q 2^{l+p-q-1} 2^{m+n-p-k-1}$$
$$= 2^{l+m+n}\sum_{k=0}^{l-1} 2^{-k-2} < 2^{l+m+n}$$

であるので，

$K\subset\mathfrak{U}$：コンパクト部分集合，$z\in K$ に対して

$$|\sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}}\sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)} G_0(l+m+n,l+p,q+1;z)\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n|$$
$$\leq \sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}}\sum_{p,q=0}^{m} |a_{p,q}^{(l,m,n)}||G_0(l+m+n,l+p,q+1;z)||\lambda_1|^l|\lambda_2|^m|\lambda_3|^n$$
$$\leq \sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}} 2^{l+m+n}2^{l+m+n}M_K|\lambda_1|^l|\lambda_2|^m|\lambda_3|^n \leq M_K \sum_{\substack{l,m,n\\ l,n\geq 1}} |4\lambda_1|^l|4\lambda_2|^m|4\lambda_3|^n$$

従って，定理の右辺は $|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3| < \frac{1}{4}$ で $z\in\mathfrak{U}$ について広義一様収束している．

定理の二項係数を整理することにより，大野-Zagier([OZ]) による次の系を得る.

系 5.

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1-\lambda_1\lambda_3\sum_{\substack{k,n,s\in\mathbf{N}\\ k\geq n+s\\ n\geq s,\ s\geq 1}} G_0(k,n,s;z)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \tag{23}$$

$$\frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma;z)=-\lambda_3\sum_{k,n,s} G(k-1,n,s;z)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \tag{24}$$

この表示より明らかに収束条件は $|\lambda_1+\lambda_2|,|\lambda_2+\lambda_3|,|\lambda_2|,|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3|<1$ に拡張される.

3 $z=1$ における正則な解と接続公式

次に，超幾何微分方程式の $z=1$ における正則な解 (の逆行列) を求める.
$t=1-z$ とすると，$t=0$ における超幾何微分方程式の基本解行列 ${}^t\Phi_1^{-1}$ は

$$\frac{d}{dt}{}^t\Phi_1^{-1}(t)=(\lambda_1\theta_1'+\lambda_2\theta_2'+\lambda_3\theta_3'){}^t\Phi_1^{-1}(t) \tag{25}$$

$$\theta_1'=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dt}{t}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\frac{dt}{1-t},\quad \theta_2'=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dt}{t}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dt}{1-t}$$
$$\theta_3'=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\frac{dt}{t}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{dt}{1-t}$$

を満たす.

$$\Phi_1^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\psi_{11}(t)&\psi_{12}(t)\\ \psi_{21}(t)&\psi_{22}(t)\end{pmatrix} \tag{26}$$

とおくと，$\begin{pmatrix}\psi_{11}(t)\\ \psi_{12}(t)\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}\psi_{11}(0)\\ \psi_{12}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を満たす正則な解であり，超幾何関数と同様の方法で反復積分を実行すると，その解は超幾何関数の双対，すなわち現れる全ての多重対数関数のインデックスに対して x と y を入れ替え，順番を逆転させたものに等しいことが容易に示される．従って，

命題 6.

$$\psi_{11} = 1 - \sum_{\substack{l,m,n \\ l,n\geq 1}} \sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)} G_0(l+m+n, m+n-p, q+1; 1-z)\lambda_1^l \lambda_2^m \lambda_3^n$$

$$= 1 - \lambda_1\lambda_3 \sum_{k,n,s} G_0(k, k-n, s; 1-z)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \qquad (27)$$

$$\psi_{12} = \sum_{\substack{l,m,n \\ l,n\geq 1}} \sum_{p,q=0}^{m} a_{p,q}^{(l,m,n)} G(l+m+n-1, m+n-p, q+1; 1-z)\lambda_1^l \lambda_2^m \lambda_3^{n-1}$$

$$= \lambda_1 \sum_{k,n,s} G(k-1, k-n, s; 1-z)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \qquad (28)$$

を得る.

ここで, 超幾何微分方程式の解の接続公式 (7) の (1,1) 成分

$$\psi_{11}\varphi_0^{(0)} + \psi_{12}\frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_0^{(0)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (29)$$

を計算することにより次の定理を得る.

定理 7.

$$1 - \lambda_1\lambda_3 \sum_{\substack{k,n,s\in\mathbf{N} \\ k\geq n+s \\ n\geq s,\ s\geq 1}} (G_0(k,n,s;z) + G_0(k,k-n,s;1-z))(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1}$$

$$+ \lambda_1^2\lambda_3^2 \sum_{k,n,s}\sum_{k'=2}^{k-2}\sum_{n'=1}^{n-1}\sum_{s'=1}^{s-1} G_0(k',n',s';z)G_0(k-k',(k-k')-(n-n'),s-s';1-z)$$

$$\times (\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-2}$$

$$- \lambda_3^2 \sum_{k,n,s}\sum_{k'=2}^{k-2}\sum_{n'=1}^{n-1}\sum_{s'=1}^{s-1} G(k'-1,n',s';z)G(k-k'-1,(k-k')-(n-n'),s-s';1-z)$$

$$\times (\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-2}$$

$$= \frac{\Gamma(1-(\lambda_2+\lambda_3))\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2))}{\Gamma(1-\lambda_2)\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))} \qquad (30)$$

特に $\lambda_2=0$ として,

$$\begin{aligned}
1 &- \sum_{l,n\ge 1}(G_0(l+n,l,1;z)+G_0(l+n,n,1;1-z))\lambda_1^l\lambda_3^n \\
&+ \sum_{l,n\ge 2}\sum_{l'=0}^{l-1}\sum_{n'=0}^{n-1} G_0(l'+n',l',1;z)G_0(l-l'+n-n',n-n',1;1-z)\lambda_1^l\lambda_3^n \\
&- \sum_{l,n\ge 1}\sum_{l'=0}^{l-1}\sum_{n'=0}^{n-1} G(n-n'+l',l'+1,1;z)G(l-l'+n',n'+1,1;1-z)\lambda_1^l\lambda_3^n \\
&= \frac{\Gamma(1-\lambda_3)\Gamma(1-\lambda_1)}{\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_3))} \qquad (31)
\end{aligned}$$

この式は Euler の反転公式の一般化となっている．実際 $\lambda_1\lambda_3^n$ の係数を比較することにより,

$$\mathrm{Li}_{n+1}(z)+\mathrm{Li}_{2,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1\text{ 個}}}(1-z)+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Li}_{n-j+1}(z)\,\mathrm{Li}_{\underbrace{1,\ldots,1}_{j\text{ 個}}}(1-z)=\zeta(n+1) \qquad (32)$$

となり，これは Eular の反転公式のひとつに他ならない．

(30) において $z\to 0,1$ の極限を取ると,

$$\begin{aligned}
F(\alpha,\beta,\gamma;1) &= 1-\lambda_1\lambda_3\sum_{\substack{k,n,s\in\mathrm{N}\\ k\ge n+s\\ n\ge s,\ s\ge 1}} G_0(k,n,s;1)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \\
&= \frac{\Gamma(1-(\lambda_2+\lambda_3))\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2))}{\Gamma(1-\lambda_2)\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))} \qquad (z\to 1) \qquad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &- \lambda_1\lambda_3\sum_{\substack{k,n,s\in\mathrm{N}\\ k\ge n+s\\ n\ge s,\ s\ge 1}} G_0(k,k-n,s;1)(\lambda_2+\lambda_3)^{k-n-s}(\lambda_1+\lambda_2)^{n-s}(\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))^{s-1} \\
&= \frac{\Gamma(1-(\lambda_2+\lambda_3))\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2))}{\Gamma(1-\lambda_2)\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3))} \qquad (z\to 0) \qquad (34)
\end{aligned}$$

となり，これは大野-Zagier 型の公式に他ならない．また，両極限が等しいことより

系 8 (双対性).

$$G_0(k,n,s;1)=G_0(k,k-n,s;1) \qquad (35)$$

を得る．双対性はまた (33) が λ_1,λ_3 に対して対称であることからも直ちに従う．これは多重ゼータ値の双対性のうち weight,depth,height を固定した和に対する部分に相当している．

4　非正則な解の接続公式

今までの議論は超幾何微分方程式の原点並びに $z=1$ における正則な解の接続に関するものであったが，微分方程式の反復積分による解の構成は確定特異点における非正則な解にも適用できる．従って，同様の方

法を非正則な解に適用することにより原点と $z=1$ での解の接続公式の $(1,2),(2,1),(2,2)$ 成分に相当する関係式，また原点と $z=\infty$，$z=1$ と $z=\infty$ の解の間の接続公式から導かれる関係式を計算することが出来る．

原点において非正則な解を多重対数関数を用いて記述するために，ゼータ正規化写像 reg^1 を導入する．多重対数関数のインデックスを $\mathrm{w}\in\mathfrak{H}^1$ に対して

$$\mathrm{Li}(\mathrm{w}x^n;z)=\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Li}(\mathrm{reg}^1(\mathrm{w}x^{n-j});z)\frac{\log^j z}{j!} \tag{36}$$

ならびに $\mathbf{Q}$ 線型に $\mathfrak{H}$ まで拡張する．このとき拡張された多重対数関数ももとの多重対数関数と同じ微分方程式を満たす ([Ok])．また命題 4 も拡張された多重対数関数についても同様に成り立ち，拡張された多重対数関数の $z\to 0$ における漸近挙動は

$$\mathrm{Li}(x^n;z)\frac{n!}{\log^n z}\to 1$$

$$\mathrm{Li}(\mathrm{w};z)\to 0 \quad \mathrm{w}:y \text{ を含む word}$$

と計算できる．

従って，原点で特定の漸近挙動を持つ超幾何微分方程式の非正則な解の反復積分表示を拡張された多重対数関数を用いて正則な場合と全く同様に得ることが出来る．

ただし，補題 3 に相当する変換 T を和でまとめる計算するプロセスを計算すること，拡張された多重対数関数をもとの多重対数関数で書き表すことが困難であることより関係式の一般的な表示はまだ求まっていない．非正則な場合ならびに $z=\infty$ における関係式はパラメータに関して低次の項を計算するに留まっている．

T を和でまとめるプロセス並びに拡張された多重対数関数を展開するプロセスはともに height を保たないが，最終的に得られた関係式は現状では全て height でまとまった式となっており，高次の項を計算しても同様であると思われる．従って，超幾何微分方程式の接続公式の非正則な項を計算しても得られる多重対数関数，多重ゼータ値の関係式のクラスは正則な項から得られる大野-Zagier 型の関係式に全て含まれると予想される．

超幾何微分方程式の原点における非正則な解 $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$ は次のように書くことが出来る．また，超幾何微分方程式の接続公式 (7) の $(1,2)$ 成分

$$\psi_{11}\varphi_1^{(0)}+\psi_{12}\frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_1^{(0)}=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \tag{37}$$

において $z\to 1$ の極限をとることにより次の式を得る．

命題 9.

$$\begin{aligned}
&z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)\\
&=\sum_{l,m,n=0}^{\infty}\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n\Bigg(\sum_{\mu\in J'(l-1,m-1,n)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)y;z)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{\mu\in J'(l,m-2,n-j)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)(x+y)x^j;z)\\
&\qquad+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\mu\in J'(l,m-1,n-j-1)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)(x+y)x^j;z)\Bigg)+1
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\sum_{l,m,n=0}^{\infty}\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n\Bigg(\sum_{\mu\in J'(l-1,m-1,n)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)y;1)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{\mu\in J'(l,m-2,n-j)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)(x+y)x^j;1)$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\mu\in J'(l,m-1,n-j-1)}\mathrm{Li}(xT_0'(\mu)(x+y)x^j;1)\Bigg) \tag{39}$$
$$=\frac{\Gamma(1+(\lambda_2+\lambda_3))\Gamma(1-(\lambda_1+\lambda_2))}{\Gamma(1+\lambda_3)\Gamma(1-\lambda_1)}-1$$

具体的な計算はゼータ正規化写像 reg^1 の性質より得られる次の補題を用いることにより求めることが出来る.

補題 10. $\mathbf{w}=x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_r-1}$, $k_1\geq 2$ とする. このとき

$$\mathrm{Li}(\mathbf{w}yx^n;1)=(-1)^n\sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=n}\binom{k_1+\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}\cdots\binom{k_r+\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\zeta(k_1+\varepsilon_1,\ldots,k_r+\varepsilon_r). \tag{40}$$

これによりパラメータに関する低次の項を計算すると, 以下のような結果が得られる.

(i) $l\geq 1,\ m=1,\ n=0$

各 $\lambda_1^l\lambda_2$ の係数を比較して双対性の最も簡単なケースである

$$\zeta(2,\underbrace{1,\ldots,1}_{l-1\text{ 個}})=\zeta(l+1)$$

が得られる.

(ii) $l\geq 1,\ m=1,\ n\geq 1$

多重ゼータ値の和公式

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=n+l+1\\ k_1\geq 2}}\zeta(k_1,\ldots,k_l)=\zeta(n+l+1). \tag{41}$$

となっている.

(iii) $m=2,n=0$

$$(l+1)\zeta(2,\underbrace{1,\ldots,1}_{l\text{ 個}})-\zeta(3,\underbrace{1,\ldots,1}_{l-1\text{ 個}})=\frac{l+1}{2}\zeta(l+2)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=l-2}}\zeta(i+2)\zeta(j+2) \tag{42}$$

が得られる. これは双対性を用いて変換すると Euler による公式 ([Z1]) に等しい.

(iv) $m=2,n=1$

$$2G_0(l+3,l,1)+G_0(l+3,l,2)-(l+2)G_0(l+3,l+1,1)-lG_0(l+3,l+1,2)+(l+1)G_0(l+3,l+2,1)$$
$$=\begin{cases}-\zeta(3) & (l=0)\\ \zeta(2)\zeta(l+1) & (l\geq 1)\end{cases} \tag{43}$$

5 $z=\infty$ における解と接続公式

$z=\infty$ の近傍における超幾何微分方程式の 2 つの解

$$\varphi_0^{(\infty)} = z^{-\alpha}F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; 1/z) \tag{44}$$

$$\varphi_1^{(\infty)} = z^{-\beta}F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1; 1/z) \tag{45}$$

を考える．基本解行列を

$$\Phi_\infty = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(\infty)} & \varphi_1^{(\infty)} \\ \frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_0^{(\infty)} & \frac{1}{\beta}z\frac{d}{dz}\varphi_1^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

とおくと，原点における基本解行列 Φ_0 との間の接続公式は

$$\Phi_\infty^{-1}\Phi_0 = \begin{pmatrix} e^{-\pi i\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{\pi i(\gamma-\alpha-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)} \\ e^{-\pi i\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{\pi i(\gamma-\beta-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)} \end{pmatrix} \tag{46}$$

と書くことが出来る．

$u=1/z$ とし，

$$\Phi_\infty^{-1}(u) = \begin{pmatrix} \psi_{11}^{(\infty)}(u) & \psi_{12}^{(\infty)}(u) \\ \psi_{21}^{(\infty)}(u) & \psi_{22}^{(\infty)}(u) \end{pmatrix} \tag{47}$$

とおくと，同様の方法で $\psi^{(\infty)}$ 達の反復積分表示を得ることが出来，接続公式を計算することにより多重対数関数の関係式を得ることが出来る．

変換 $T_\infty : \{\{1,2,3\}$ の有限列 $\} \to \mathfrak{H}$ を

(i) $T_\infty(\emptyset) = 1$

(ii) $T_\infty(1,3,\mu) = (xy-yx)T_1(\mu)$

(iii) $T_\infty(1,\mu) = -(x+y)T_1(\mu)$ 　　μ は 3 から始まらない

(iv) $T_\infty(2,\mu) = -yT_1(\mu)$

(v) $T_\infty(3,\mu) = xT_1(\mu)$

で定めると，$\begin{pmatrix} \psi_{11}^{(\infty)}(u) \\ \psi_{12}^{(\infty)}(u) \end{pmatrix}$ は次の形で表示される．

命題 11.

$$\begin{pmatrix} \psi_{11}^{(\infty)}(u) \\ \psi_{12}^{(\infty)}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{l,m,n}\left(\sum_{\mu\in J(l-1,m,n-1)}\mathrm{Li}((x+y)T_\infty(\mu)x;u) + \sum_{\mu\in J(l,m,n-1)}\mathrm{Li}((x+y)T_\infty(\mu);u)\right)\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n + 1 \\ \displaystyle\sum_{l,m,n}\left(\sum_{\mu\in J(l-1,m,n)}\mathrm{Li}(T_\infty(\mu)x;u) + \sum_{\mu\in J(l,m,n)}\mathrm{Li}(T_\infty(\mu);u)\right)\lambda_1^l\lambda_2^m\lambda_3^n \end{pmatrix} \tag{48}$$

接続公式 (46) の $(1,1)$ 成分の一般型は複雑だが，特に両辺を $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ で割って λ_1, λ_2 に関する定数項を比較することにより次の公式を得る．これは $0,\infty$ の間の Euler の反転公式の一般化に他ならない．

命題 12.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\log^n \frac{1}{z}}{n!} - \sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{Li}_{n-k}(z) + (-1)^{n-k}\,\mathrm{Li}_{n-k}(\frac{1}{z}))\frac{\log^k \frac{1}{z}}{k!}\right)\lambda_3^n$$
$$= \exp(\pi i\lambda_3)\frac{\pi\lambda_3}{\sin\pi\lambda_3} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{(2\pi i\lambda_3)^n}{n!} \tag{49}$$

ここで B_n はベルヌーイ数である．

特に，偶数次の係数において $z\to 1$ とすることにより，

$$-2\zeta(n) = B_n\frac{(2\pi i)^n}{n!}$$

という Euler による古典的な結果が再び導かれる．

参考文献

[AoK] 青本和彦 喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.

[ArK] 荒川恒男 金子昌信, 多重ゼータ値および多重 L 値ノート, レクチャーノート, 2002.

[IKZ] K.Ihara , M.Kaneko and D.Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, preprint(2003).

[L] Lappo-Danilevsky, Mémoires sur la Théorie des Systèmes des Équations Différèntielles Linéaires, Chelsea, 1953.

[Oi] S.Oi, Representation of the Gauss hypergeometric function by multiple polylogarithms and relations of multiple zeta values, 2004, arXiv:math.NT/0405162, preprint.

[Ok] J.Okuda, Duality formulas of the Special Values of Multiple Polylogarithms, 2003, arXiv:math.CA/0307137, preprint.

[OU] J.Okuda and K.Ueno, The Sum Formula of Multiple Zeta Values and Connection Problem of the Formal Knizhnik-Zamolodchikov Equation, 2003, arXiv:math.NT/0310259, preprint.

[OZ] Y.Ohno and D.Zagier, Multiple zeta values of fixed weight,depth,and height, Indag. Math. 12 (2001), 483-487.

[R] C.Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford Science Publications,1993.

[Z1] D.Zagier, Values of Zeta Functions and Their Applications, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkha:user, Basel, 1994,

[Z2] D.Zagier, Multiple zeta values, preprint.