数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 194-209

2変数多重対数関数の接続問題と多重ゼータ値の複シャッフル関係式及び2重対数関数の5項関係

早大・理工　上野 喜三雄 (UENO Kimio)
Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

概要

多重ゼータ値の複シャッフル関係式を2変数多重対数関数の接続問題として理解するためのひとつの有力な例を提示する．さらに，この例を用いて2重対数関数（dilogarithm）の5項関係式が接続公式として理解できることを示す．

1 Introduction

Ihara-Kaneko-Zagier [**IKZ**], G. Racinet [**Ra**], Hoang Ngoc Minh [**M**] はそれぞれ次の予想を提出した．

予想; 多重ゼータ値の間に成立する関係式はすべて複シャッフル関係式から導かれる．

一方，P.Deligne-T.Terasoma [**T**] は associator の幾何学を考察することにより，多重ゼータ値のすべての複シャッフル関係式が associator のみたす関係式から生じることを示した．したがって，上の予想が正しければ，多重ゼータ値の間に成立する関係式はすべて associator のみたす関係式から生じることになる．上の予想は現在の我々にとって射程の範囲外であるが，Deligne-Terasoma の到達した結論を KZ 方程式の解の接続問題の観点から再解釈しようとすることは自然な問題設定であろう．
この小論の目的はこの問題を解決するための道筋の端緒を見出すことにある．具体的には，多重ゼータ値の調和積（級数シャッフル積）

$$\zeta(k)\zeta(l)=\zeta(k,l)+\zeta(k+l)+\zeta(l,k) \tag{1.1}$$

に対応する多重対数関数の関係式

$$\mathrm{Li}_k(z)\,\mathrm{Li}_l(w)=\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)+\mathrm{Li}_{k+l}(zw)+\mathrm{Li}_{l,k}(w,z) \tag{1.2}$$

を2変数多重対数関数の定める KZ 方程式の解の接続問題として理解できることを示すことがその目的である．ただし，現在のところは，$k,l=1,2$ の場合が扱えているに過ぎない．
ここで，2変数多重対数関数（multiple polylogarithm）$\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)$ は

$$\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)=\sum_{m>n>0}\frac{z^m w^n}{m^k n^l} \tag{1.3}$$

で定義される級数であり，

また，$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}$ は polylogarithm である．
多変数の多重対数関数については，A.B.Goncharov [**G**] で導入され，関連する混合 Hodge 構造などについては，J.Zhao が [**Zh1**, **Zh2**] において考察している．また，2 変数の多重対数関数については p-adic 多重ゼータ値の複シャッフル関係式との関連のもとで，A.Besser-H.Furusho が [**BF**] において考察している．しかし，これらの論文で解の接続問題について陽に論じたものはない．
また，我々は，この (1.2) の $k=l=1$ の場合から，2 重対数関数（dilogaritm）の 5 項関係式

$$\mathrm{Li}_2(zw)=\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(w)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{w(1-z)}{1-w}\right) + \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-z}{1-w}\right) \tag{1.4}$$

[**Le**] が導かれることを示す．すなわち，この 5 項関係式は 2 変数多重対数関数の接続問題として理解できるのである．

2 Drinfel'd associator

調和積の問題を考える前に，シャッフル積（積分シャッフル積）について基本的なことを確認しておく．シャッフル積を 1 変数多重対数関数（multiple polylogarithm）

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z)=\sum_{n_1>\cdots>n_r>0}\frac{z^{n_1}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \tag{2.1}$$

について表現すれば，

$$\mathrm{Li}(w_1;z)\,\mathrm{Li}(w_2;z)=\mathrm{Li}(w_1 ⧢ w_2;z) \tag{2.2}$$

となる．ここで，w_1，w_2 はシャッフル Hopf 代数 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\langle\omega_0,\omega_1\rangle$，$(\omega_0=\frac{dz}{z},\ \omega_1=\frac{dz}{z-1})$ における語である．語 $w=\omega_0^{k_1-1}\omega_1\cdots\omega_0^{k_r-1}\omega_1$ に対して

$$\mathrm{Li}(w;z)=(-)^r\,\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z)$$

と定め，(2.2) によって $\mathrm{Li}(\cdot;z)$ は $\mathfrak{h}$ から $\mathbb{C}$ への代数準同型に拡張することができる．
一方，(2.2) が成立するということは 1 変数の形式的 KZ 方程式

$$\frac{d\mathcal{L}}{dz}=\left(\frac{X_0}{z}+\frac{X_1}{z-1}\right)\mathcal{L} \tag{2.3}$$

の基本解行列

$$\mathcal{L}_0(z)=\sum_{w;\mathrm{word}}\mathrm{Li}(w;z)W \tag{2.4}$$

が $\mathfrak{h}$ の双対 Hopf 代数である $\mathfrak{H} = \mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ における group-like element であること，すなわち，

$$\Delta(\mathcal{L}_0(z)) \left(= \sum_{w_1, w_2; \mathrm{word}} \mathrm{Li}(w_1 ш w_2; z) W_1 \otimes W_2 \right) = \mathcal{L}_0(z) \otimes \mathcal{L}_0(z) \tag{2.5}$$

が成立することと同値である．ただし，上式において w, w_1, w_2 などは $\mathfrak{h}$ における語の全体を亘るものとする．(双対 Hopf 代数 $\mathfrak{H}$ における積は concatenation であることに注意せよ.)

上で出てきた $\mathcal{L}_0(z)$ は原点 $z=0$ において正規化された基本解行列である．実際，

$$\mathcal{L}_0(z) = \Big(\sum_{w; \mathrm{word}} \mathrm{Li}(\mathrm{reg}_0(w); z) W \Big) z^{X_0}$$

であることが確かめられる．ここで，reg_0 は原点 $z=0$ における積分の正則化を施すことに対応するが，正確な定義については，[**AK, IKZ, Ra, Ok, OkU2**] などを参照せよ．

一方，方程式 (2.3) の $z=1$ の近傍で正規化された基本解行列 $\mathcal{L}_1(z)$ は

$$\mathcal{L}_1(z) = \sum_{w; \mathrm{word}} \mathrm{Li}(\pi(w); 1-z) W \tag{2.6}$$

と書くことができる．ここで，π は $\mathfrak{h}$ の準同型で，$\omega_0 \to \omega_1$, $\omega_1 \to \omega_0$ なるものである [**Ok, OkU2, M**]．そして，$\mathcal{L}_0(z)$ と $\mathcal{L}_1(z)$ を結ぶ接続行列 $\Phi_{KZ} = \Phi_{KZ}(X_0, X_1) \in \mathfrak{H}$

$$\mathcal{L}_0(z) = \mathcal{L}_1(z) \Phi_{KZ} \tag{2.7}$$

が Drinfeld associator [**D**] である．これは，

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = \sum_{w; \mathrm{word}} \zeta(\mathrm{reg}_0^1(w)) W \tag{2.8}$$

と表示できる．ここで，reg_0^1 は $z=0$, $z=1$ で積分の正則化をほどこすことに対応する．正確な定義は [**AK, IKZ, Ra, Ok, OkU2**] などを参照せよ．

3　2変数多重対数関数の定めるKZ方程式

2 変数の多重対数関数 $\mathrm{Li}_{k,l}(z, w)$ は原点の近傍 $|z| < 1$, $|w| < 1$ において正則な関数であり，つぎの微分漸化式をみたす [**Zh1, Zh2, BF**]．

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathrm{Li}_{k,l}(z, w) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Li}_{k-1,l}(z, w)}{z} & k \geqq 2, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{Li}_l(zw)}{1-z} & k = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \mathrm{Li}_{k,l}(z, w) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Li}_{k,l-1}(z, w)}{w} & l \geqq 2, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{Li}_k(z)}{1-w} - \dfrac{\mathrm{Li}_k(zw)}{w(1-w)} & l = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

この漸化式を用いて $\mathrm{Li}_{2,2}(z,w)$ が決める可積分接続を求めよう.

$$
\begin{aligned}
{}^t\vec{\varphi}(z,w) = (1, \mathrm{Li}_1(z), \mathrm{Li}_2(z), \mathrm{Li}_1(zw), \mathrm{Li}_{1,1}(z,w), \mathrm{Li}_2(zw),& \\
\mathrm{Li}_{1,2}(z,w), \mathrm{Li}_{2,1}(z,w), \mathrm{Li}_{2,2}(z,w))&
\end{aligned}
$$

とおいてその微分を計算することにより次の KZ 方程式を得る：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{\varphi}(z,w)}{\partial z} = \left(\dfrac{A_0}{z} + \dfrac{A_1}{1-z} + \dfrac{w}{1-zw}C\right)\vec{\varphi}(z,w) \\
\dfrac{\partial \vec{\varphi}(z,w)}{\partial w} = \left(\dfrac{B_0}{w} + \dfrac{B_1}{1-w} + \dfrac{z}{1-zw}C\right)\vec{\varphi}(z,w)
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

ただし,

$$
A_0 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}, \quad
A_1 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix},
$$

$$
C = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}. \tag{3.4}
$$

$$
B_0 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}, \quad
B_1 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}. \tag{3.5}
$$

この方程式は可積分接続である．すなわち，

$$\Omega = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{1-z}\right) dz + C\frac{d(zw)}{1-zw} + \left(\frac{B_0}{w} + \frac{B_1}{1-w}\right) dw \tag{3.6}$$

は可積分条件

$$\Omega \wedge \Omega = 0 \tag{3.7}$$

をみたしている．この条件はつぎのように書き下すことができる．

$$\frac{1}{(1-z)(1-w)} = \frac{1}{(1-z)(1-zw)} + \frac{1}{(1-w)(1-zw)} - \frac{1}{1-zw}.$$

に注意すれば，

$$(3.7) \Longleftrightarrow \begin{cases} [A_0, B_0] = [A_0, B_1] = [A_1, B_0] = 0, \\ [A_1, B_1] = [B_1, C], \quad [A_1, C] = -[B_1, C] \\ [A_0, C] = [B_0 - B_1, C] \end{cases} \tag{3.8}$$

であることが分かる．$A_0, A_1, C(3.4), B_0, B_1(3.5)$ が (3.8) をみたすことは容易に確かめることができる．

(3.3) の形をした KZ 方程式は，$\mathbb{C}$ の 4 点配置空間 $X_4 = \mathbb{C}^4 \setminus \{z_i = z_j,\ 1 \le i < j \le 4\}$ 上の KZ 方程式

$$d\vec{\phi} = \Big(\sum_{1\le i<j\le 4} X_{ij} d\log(z_j - z_i)\Big)\vec{\phi} \tag{3.9}$$

を次のように変換することで得ることができる．まず，上の方程式において $X_{ij} = X_{ji}$ であり，可積分条件であるところの無限小純 braid 関係式（古典的 Yang-Baxter 方程式）

$$\begin{cases} [X_{ij}, X_{kl}] = 0 \quad (\{i,j\} \cup \{k,l\} = \emptyset), \\ [X_{ij}, X_{ik} + X_{kj}] = 0 \quad (i,j,k \text{ distinct}) \end{cases} \tag{3.10}$$

をみたすものとする．すると $\sum_{1\le i<j\le 4} X_{ij}$ は中心元である．そこで，

$$\vec{\phi} = (z_4 - z_1)^{\sum_{1\le i<j\le 4} X_{ij}} \vec{f}$$

と定めると $\vec{f}$ は

$$d\vec{f} = \Big(\sum_{1\le i<j\le 4} X_{ij} d\log\Big(\frac{z_j - z_i}{z_4 - z_1}\Big)\Big)\vec{f}$$

をみたす．$u = \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1}$，$v = \dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$ とおくと上の方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u} = \Big(\dfrac{X_{12}}{u} + \dfrac{X_{23}}{u-v} + \dfrac{X_{24}}{u-1}\Big)\vec{f} \\ \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v} = \Big(\dfrac{X_{13}}{v} + \dfrac{X_{23}}{v-u} + \dfrac{X_{34}}{v-1}\Big)\vec{f} \end{cases}$$

と表すことができる．ここで，$\vec{\varphi}(z,w)=\vec{f}(zw,w)$ と原点での blow-up を行うと，方程式は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial z}=\left(\dfrac{X_{12}}{z}+\dfrac{X_{23}}{z-1}+\dfrac{wX_{24}}{zw-1}\right)\vec{\varphi},\\ \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial w}=\left(\dfrac{X_{12}+X_{13}+X_{23}}{w}+\dfrac{X_{34}}{w-1}+\dfrac{zX_{24}}{zw-1}\right)\vec{\varphi}\end{cases}$$

に変換される．(同様の変換を X_3 上の KZ 方程式で行うと，1 変数の KZ 方程式 (2.3) が得られる.)

そこで，(3.3) において係数を

$$A_0=T_{12},\ A_1=-T_{23},\ B_0=T_{12}+T_{13}+T_{23},\ B_1=-T_{34},\ C=-T_{24} \tag{3.11}$$

のようにおくと，$\{T_{ij};1\leqq i\neq j\leqq 4,\ T_{ij}=T_{ji}\}$ は $T_{14}=T_{41}$ を法として無限小純 braid 関係式

$$\begin{cases}[T_{ij},T_{kl}]=0 & (\{i,j\}\cup\{k,l\}=\emptyset),\\ [T_{ij},T_{ik}+T_{kj}]=0 & (i,j,k \text{ distinct})\end{cases}$$

をみたすことになる．さらに，閉 1 形式 $\{\omega_{ij};1\leqq i\neq j\leqq 4,\ \omega_{ij}=\omega_{ji},\ \omega_{14}=0\}$ を

$$\begin{cases}\omega_{12}=\dfrac{dz}{z}+\dfrac{dw}{w}=\dfrac{d(zw)}{zw},\quad \omega_{13}=\dfrac{dw}{w},\quad \omega_{23}=\dfrac{dz}{z-1}+\dfrac{dw}{w},\\ \omega_{34}=\dfrac{dw}{w-1},\quad \omega_{24}=\dfrac{d(zw)}{zw-1}\end{cases} \tag{3.12}$$

により導入すると，これらは $\Omega=\sum_{1\leq i<j\leq 4}T_{ij}\omega_{ij}$，及び 2 次の関係式

$$\omega_{ij}\wedge\omega_{jk}+\omega_{jk}\wedge\omega_{ki}+\omega_{ki}\wedge\omega_{ij}=0,\quad (i,j,k \text{ distinct}) \tag{3.13}$$

をみたしている．

いま，KZ 方程式 (3.3) の unipotent な基本解行列をひとつ求めよう．このようなものとして，つぎの解を求めることができる．

$$\mathcal{L}_0(z,w)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \mathrm{Li}_1(z)&1&0&0&0&0&0&0&0\\ \mathrm{Li}_2(z)&\log z&1&0&0&0&0&0&0\\ \mathrm{Li}_1(zw)&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \mathrm{Li}_{1,1}(z,w)&\mathrm{Li}_1(w)&0&\varphi_{54}&1&0&0&0&0\\ \mathrm{Li}_2(zw)&0&0&\varphi_{64}&0&1&0&0&0\\ \mathrm{Li}_{1,2}(z,w)&\mathrm{Li}_2(w)&0&\varphi_{74}&\log w&\mathrm{Li}_1(z)&1&0&0\\ \mathrm{Li}_{2,1}(z,w)&\varphi_{82}&\mathrm{Li}_1(w)&\varphi_{84}&\log z&\varphi_{86}&0&1&0\\ \mathrm{Li}_{2,2}(z,w)&\varphi_{92}&\mathrm{Li}_2(w)&\varphi_{94}&\varphi_{95}&\varphi_{96}&\log z&\log w&1\end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\varphi_{82} = \log z \operatorname{Li}_1(w), \quad \varphi_{92} = \log z \operatorname{Li}_2(w),$$

$$\varphi_{54} = \operatorname{Li}_1(z) - \operatorname{Li}_1(w) - \log w, \quad \varphi_{64} = \log z + \log w,$$

$$\varphi_{74} = -\operatorname{Li}_2(z) - \operatorname{Li}_2(w) + (\log z + \log w) \operatorname{Li}_1(z) - 1/2 \log^2 w,$$

$$\varphi_{84} = \operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(w) - (\log z + \log w) \operatorname{Li}_1(w) - \log z \log w - 1/2 \log^2 w,$$

$$\begin{aligned}\varphi_{94} = -2 \operatorname{Li}_3(z) + 2 \operatorname{Li}_3(w) + (\log z + \log w)(\operatorname{Li}_2(z) - \operatorname{Li}_2(w)) - \log z \cdot 1/2 \log^2 w \\ - 1/6 \log^3 w,\end{aligned}$$

$$\varphi_{95} = \log z \log w,$$

$$\varphi_{86} = -\operatorname{Li}_1(w) - \log w, \quad \varphi_{96} = \operatorname{Li}_2(z) - \operatorname{Li}_2(w) - 1/2 \log^2 w.$$

Proposition 3.1 KZ 方程式 (3.3) の基本解行列 $\mathcal{L}_0(z,w)$ はつぎのように表すことができる.

$$\mathcal{L}_0(z,w) = \widehat{\mathcal{L}}_0(z,w)\, z^{A_0} w^{B_0}, \tag{3.15}$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_0(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_1(z) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_2(z) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_1(zw) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_{1,1}(z,w) & \operatorname{Li}_1(w) & 0 & \widehat{\varphi}_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_2(zw) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_{1,2}(z,w) & \operatorname{Li}_2(w) & 0 & \widehat{\varphi}_{74} & 0 & \operatorname{Li}_1(z) & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{Li}_{2,1}(z,w) & 0 & \operatorname{Li}_1(w) & \widehat{\varphi}_{84} & 0 & -\operatorname{Li}_1(w) & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{Li}_{2,2}(z,w) & 0 & \operatorname{Li}_2(w) & \widehat{\varphi}_{94} & 0 & \widehat{\varphi}_{96} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\widehat{\varphi}_{54} = \operatorname{Li}_1(z) - \operatorname{Li}_1(w), \quad \widehat{\varphi}_{74} = -\operatorname{Li}_2(z) - \operatorname{Li}_2(w),$$

$$\widehat{\varphi}_{84} = \operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(w), \quad \widehat{\varphi}_{94} = -2 \operatorname{Li}_3(z) + 2 \operatorname{Li}_3(w),$$

$$\widehat{\varphi}_{96} = \operatorname{Li}_2(z) - \operatorname{Li}_2(w).$$

$\widehat{\mathcal{L}}_0(z,w)$ は原点 $z = w = 0$ の近傍で正則な行列値関数であり，$\widehat{\mathcal{L}}_0(0,0) = I$ をみたす．つまり，$\mathcal{L}_0(z,w)$ は原点 $z = w = 0$ の近傍での正規化された基本解行列である．

ここで得られた基本解行列 $\mathcal{L}_0(z,w)$ が反復積分表示を持つことを示そう．
次の補題に注意せよ．

Lemma 3.2 ([C]) n 次行列の係数を持つ 1 形式 ω は，$d\omega = 0$, $\omega \wedge \omega = 0$ をみたすとする．このとき，n 次行列値の反復積分

$$\int_\gamma \underbrace{\omega \cdots \omega}_{n}$$

は γ のホモトピークラスにのみ依存する．

Ω (3.6) は可積分条件 (3.7) をみたすので次の命題が成立することになる.

Proposition 3.3 積分

$$\mathcal{L}_{(z_0,w_0)}(z,w) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(z_0,w_0)}^{(z,w)} \underbrace{\Omega\cdots\Omega}_{n} \tag{3.17}$$

は KZ 方程式 $d\mathcal{L} = x\mathcal{L}$ の初期条件 $\mathcal{L}(z_0,w_0) = I$ をみたす $\mathbb{C}^2 \setminus \{zw(z-1)(w-1)(zw-1) = 0\}$ において多価解析的な解である.

実際には,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{52} & 0 & \Omega_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{75} & \Omega_{76} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{83} & 0 & \Omega_{85} & \Omega_{86} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{97} & \Omega_{98} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ただし,

$$\begin{aligned} &\Omega_{21} = \omega_{13} - \omega_{23},\ \Omega_{41} = -\omega_{24},\ \Omega_{32} = \omega_{12} - \omega_{13},\ \Omega_{52} = -\omega_{34}, \\ &\Omega_{83} = -\omega_{34},\ \Omega_{54} = \omega_{34} - \omega_{23},\ \Omega_{64} = \omega_{12},\ \Omega_{75} = \omega_{13}, \\ &\Omega_{85} = \omega_{12} - \omega_{13},\ \Omega_{76} = \omega_{13} - \omega_{23},\ \Omega_{86} = \omega_{34} - \omega_{13}, \\ &\Omega_{97} = \omega_{12} - \omega_{13},\ \Omega_{98} = \omega_{13} \end{aligned}$$

と表示できて, $\underbrace{\Omega\cdots\Omega}_{n} = 0\ (n \geqq 5)$ であるから, (3.17) の右辺の無限級数は有限で切れていることに注意する.

これからさらに, 原点 $z=0,\ w=0$ における積分の正則化 $\mathrm{Ireg}_{(0,0)}$ (原点の寄与から生じる対数発散項を除去した後の有限部分を取り出すこと) を導入すれば,

Proposition 3.4 $\mathcal{L}_0(z,w)$ の反復積分表示

$$\mathcal{L}_0(z,w) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \underbrace{\Omega\cdots\Omega}_{n} \tag{3.19}$$

が成立する.

この命題の証明の過程で $\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)$ の反復積分表示

$$\mathrm{Li}_{1,1}(z,w) = \int_{(0,0)}^{(z,w)} (\omega_{23}-\omega_{34})\omega_{24} + \omega_{34}(\omega_{23}-\omega_{13}),$$

$$\mathrm{Li}_k(zw) = -\int_{(0,0)}^{(z,w)} \underbrace{\omega_{12}\cdots\omega_{12}}_{k-1}\omega_{24},$$

$$\mathrm{Li}_k(z) = -\int_{(0,0)}^{(z,w)} \underbrace{(\omega_{12}-\omega_{13})\cdots(\omega_{12}-\omega_{13})}_{k-1}(\omega_{13}-\omega_{23}),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{2,1}(z,w) = \int_{(0,0)}^{(z,w)} &(\omega_{12}-\omega_{13})\{(\omega_{23}-\omega_{34})\omega_{24}+\omega_{34}(\omega_{23}-\omega_{13})\}\\ &-\omega_{34}\{\omega_{12}\omega_{24}+(\omega_{12}-\omega_{13})(\omega_{13}-\omega_{23})\}+\omega_{13}\omega_{12}\omega_{24},\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\mathrm{Li}_{1,2}(z,w) = \int_{(0,0)}^{(z,w)} (\omega_{23}-\omega_{13})\omega_{12}\omega_{24} + +\omega_{13}\{(\omega_{23}-\omega_{34})\omega_{24}+\omega_{34}(\omega_{23}-\omega_{13})\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{2,2}(z,w) = \int_{(0,0)}^{(z,w)} &(\omega_{12}-\omega_{13})[(\omega_{23}-\omega_{13})\omega_{12}\omega_{24} + +\omega_{13}\{(\omega_{23}-\omega_{34})\omega_{24}+\omega_{34}(\omega_{23}-\omega_{13})\}]\\ &+\omega_{13}[(\omega_{12}-\omega_{13})\{(\omega_{23}-\omega_{34})\omega_{24}+\omega_{34}(\omega_{23}-\omega_{13})\}\\ &-\omega_{34}\{\omega_{12}\omega_{24}+(\omega_{12}-\omega_{13})(\omega_{13}-\omega_{23})\}+\omega_{13}\omega_{12}\omega_{24}]\end{aligned}$$

および,

$$\log z \log w = \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{z}\frac{dw}{w} + \frac{dw}{w}\frac{dz}{z}$$

$$\log z \cdot 1/2 \log^2 w = \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{z}\frac{dw}{w}\frac{dw}{w} + \frac{dw}{w}\frac{dz}{z}\frac{dw}{w} + \frac{dw}{w}\frac{dw}{w}\frac{dz}{z}$$

$$\mathrm{Li}_2(z)\log w = \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{z}\frac{dw}{w}\frac{dz}{1-z} + \frac{dw}{w}\frac{dz}{z}\frac{dz}{1-z} + \frac{dz}{z}\frac{dz}{1-z}\frac{dw}{w}$$

$$\log z\, \mathrm{Li}_1(z) - \mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{1-z}\frac{dz}{z}$$

$$-2\,\mathrm{Li}_3(z) + \log z\, \mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Ireg}_{(0,0)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \frac{dz}{z}\frac{dz}{1-z}\frac{dz}{z}$$

などを用いた.

4 多重対数関数の接続問題

我々は $\mathcal{L}_0(z,w)$ と点 $z=1,\ w=0$ の近傍での正規化された基本解行列 $\mathcal{L}_1(z,w)$

$$\mathcal{L}_1(z,w) = \widehat{\mathcal{L}}_1(z,w)\,(1-z)^{-A_1} w^{B_0}. \tag{4.1}$$

ただし，$\widehat{\mathcal{L}}_1(z,w)$ は点 $z=1$, $w=0$ の近傍で正則で，$\widehat{\mathcal{L}}_1(1,0)=I$ をみたす，との間の接続関係を求めたい．そこで，まず，

$$\mathrm{Li}_k(z)\,\mathrm{Li}_l(w)=\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)+\mathrm{Li}_{k+l}(zw)+\mathrm{Li}_{l,k}(w,z) \tag{4.2}$$

が成立することに注意しよう．証明は容易である．実際，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n^l}\\
&= \left(\sum_{m>n>0}+\sum_{m=n>0}+\sum_{n>m>0}\right)\frac{z^m w^n}{m^k n^l}\\
&= \mathrm{Li}_{k,l}(z,w)+\mathrm{Li}_{k+l}(zw)+\mathrm{Li}_{l,k}(w,z).
\end{aligned}$$

この (4.2) において k, $l \geqq 2$ であれば，この式はゼータ値の間の深さ 2 の調和積

$$\zeta(k)\zeta(l)=\zeta(k,l)+\zeta(k+l)+\zeta(l,k) \tag{4.3}$$

をもたらすし，k か l のいづれかが 1 であれば，正則化された（regularized）調和積

$$\lim_{w\to 1}(\zeta(k)\,\mathrm{Li}_1(w)-\mathrm{Li}_{1,k}(w,1))=\zeta(k+1)+\zeta(k,1) \tag{4.4}$$

がもたらされる．式 (4.2) の右辺の $\mathrm{Li}_{k+l}(zw)$, $\mathrm{Li}_{l,k}(w,z)$ は点 $z=1$, $w=0$ の近傍で正則であることに注意する．実際，$\mathrm{Li}_k(zw)$ は $|zw|<1$ において正則であり，また，微分漸化式 (3.1)，(3.2) を逆に解けば，つぎの積分漸化式を得る．(この積分漸化式を用いて，(4.2) を示すこともできる.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{1,1}(z,w) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)}\frac{dz}{1-z}\,\mathrm{Li}_1(zw)+\frac{dw}{1-w}\{\mathrm{Li}_1(z)-\mathrm{Li}_1(zw)\}-\frac{dw}{w}\,\mathrm{Li}_1(zw),\\
\mathrm{Li}_{k,1}(z,w) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)}\frac{dz}{z}\,\mathrm{Li}_{k-1,1}(z,w)+\frac{dw}{1-w}\{\mathrm{Li}_k(z)-\mathrm{Li}_k(zw)\}-\frac{dw}{w}\,\mathrm{Li}_k(zw),\\
&\qquad\qquad (k\geqq 2), \qquad\qquad (4.5)\\
\mathrm{Li}_{1,l}(z,w) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)}\frac{dz}{1-z}\,\mathrm{Li}_l(zw)+\frac{dw}{w}\,\mathrm{Li}_{1,l-1}(z,w), \qquad (l\geqq 2),\\
\mathrm{Li}_{k,l}(z,w) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)}\frac{dz}{z}\,\mathrm{Li}_{k-1,l}(z,w)+\frac{dw}{w}\,\mathrm{Li}_{k,l-1}(z,w), \qquad (k,l\geqq 2).
\end{aligned}$$

これより帰納的に $\mathrm{Li}_{k,l}(z,w)$ が $z=0, w=1$ の近傍で正則であることが分かる．したがって，$\mathrm{Li}_{k,l}(w,z)$ が $z=1, w=0$ の近傍で正則である．この事実が，(4.2) が多重対数関数の接続問題として解釈できることの根拠を与える．

点 $z=1$, $w=0$ の近傍での正規化された基本解行列を求めるときに我々が必要とする式は調和積 (4.2) の $k,l=1,2$ と 1 変数多重対数関数の Euler 型の接続公式 **[OkU2]**

$$\begin{cases}\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(1-z)+\mathrm{Li}_2(1-z)=\zeta(2),\\ 2\,\mathrm{Li}_3(z)+\mathrm{Li}_2(z)\,\mathrm{Li}_1(1-z)+\zeta(2)\,\mathrm{Li}_1(1-z)-\mathrm{Li}_{1,2}(1-z)=2\zeta(3).\end{cases} \tag{4.6}$$

である．これらを用いることで次の定理を示すことができる．

Thoeorem 4.1 *KZ* 方程式 (3.3) の点 $z=1,\ w=0$ の近傍での正規化された基本解行列 $\mathcal{L}_1(z,w)$ (4.1) はつぎにより与えられる.

$$\widehat{\mathcal{L}}_1(z,w)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{Li}_2(1-z) & \log z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{Li}_1(zw) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \widehat{\psi}_{51} & \mathrm{Li}_1(w) & 0 & -\mathrm{Li}_1(w) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{Li}_2(zw) & 0 & 0 & \log z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \widehat{\psi}_{71} & \mathrm{Li}_2(w) & 0 & \widehat{\psi}_{74} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \widehat{\psi}_{81} & \widehat{\psi}_{82} & \mathrm{Li}_1(w) & \widehat{\psi}_{84} & \log z & -\mathrm{Li}_1(w) & 0 & 1 & 0\\ \widehat{\psi}_{91} & \widehat{\psi}_{92} & \mathrm{Li}_2(w) & \widehat{\psi}_{94} & 0 & \widehat{\psi}_{96} & \log z & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\psi}_{51}=-\mathrm{Li}_2(zw)-\mathrm{Li}_{1,1}(w,z),\quad \widehat{\psi}_{71}=-\mathrm{Li}_3(zw)-\mathrm{Li}_{2,1}(w,z)\\
&\widehat{\psi}_{81}=-\mathrm{Li}_3(zw)-\mathrm{Li}_{1,2}(w,z)-\mathrm{Li}_2(1-z)\,\mathrm{Li}_1(w),\\
&\widehat{\psi}_{91}=\mathrm{Li}_2(1-z)\,\mathrm{Li}_2(w)-\mathrm{Li}_4(zw)-\mathrm{Li}_{2,2}(w,z),\\
&\widehat{\psi}_{82}=\log z\,\mathrm{Li}_1(w),\quad \widehat{\psi}_{92}=\log z\,\mathrm{Li}_2(w),\\
&\widehat{\psi}_{74}=\mathrm{Li}_2(1-z)+\mathrm{Li}_2(w),\quad \widehat{\psi}_{84}=-\mathrm{Li}_2(1-z)-\log z\,\mathrm{Li}_1(w)+\mathrm{Li}_2(w),\\
&\widehat{\psi}_{94}=-\mathrm{Li}_{1,2}(1-z)+2\,\mathrm{Li}_3(w)-\log z\,\mathrm{Li}_2(w),\\
&\widehat{\psi}_{96}=-\mathrm{Li}_2(1-z)-\mathrm{Li}_2(w).
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_0(z,w)$ と $\mathcal{L}_1(z,w)$ との接続関係はつぎにより与えられる.

$$\mathcal{L}_0(z,w)=\mathcal{L}_1(z,w)\mathcal{C}. \tag{4.8}$$

ここで, 接続行列 $\mathcal{C}$ はつぎのとおり.

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \zeta(2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\zeta(2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \zeta(2) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\zeta(3) & 0 & \zeta(2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

この接続関係式 (4.8) は, 調和積 (4.2) $(k,l=1,2)$ と *Euler* 型接続関係式 (4.6) と同値である.

いま，これらの基本解行列を $w=0$ に制限したものを考える．正確には

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0(z)=\widehat{\mathcal{L}}_0(z,0)z^{A_0},\quad \widetilde{\mathcal{L}}_1(z)=\widehat{\mathcal{L}}_1(z,0)(1-z)^{-A_1}$$

とおくと，これらは1変数の KZ 方程式

$$\frac{d\widetilde{\mathcal{L}}}{dz}=\left(\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{1-z}\right)\widetilde{\mathcal{L}}$$

の基本解行列である．したがって，ある定数可逆行列 $\widetilde{\mathcal{C}}$ が存在して，$\widetilde{\mathcal{L}}_0(z)=\widetilde{\mathcal{L}}_1(z)\widetilde{\mathcal{C}}$ が成立する．これを (4.8) と比べて，

$$\widetilde{\mathcal{C}}=w^{B_0}\mathcal{C}w^{-B_0}\big|_{w=0}$$

を得る．よって，$\mathcal{C}=\widetilde{\mathcal{C}}$, $[B_0,\mathcal{C}]=0$，および，接続関係

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0(z)=\widetilde{\mathcal{L}}_1(z)\mathcal{C} \tag{4.10}$$

の成立が分かる（いまの場合，$[B_0,\mathcal{C}]=0$ を直接検証することもできる）．結局，接続行列 $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}=\Phi_{KZ}(T_{12},T_{23})$ であることがわかる．ただし，Φ_{KZ} は Drinfeld associator (2.8) である．

5 2重対数関数の5項関係式と接続問題

2重対数関数（dilogarithm）は Abel の関係式と呼ばれる2変数の関係式（[**Le**], p 3）

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right)=\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right)-\mathrm{Li}_2(x)-\mathrm{Li}_2(y)\\ -\log(1-x)\log(1-y)\end{aligned} \tag{5.1}$$

をみたすことが知られている．ここで，$z=x/1-y$, $w=y/1-x$ と変数変換して，さらに，Landen の公式（[**Le**], p 2, [**OkU1**, **OkU2**] などを参照せよ）

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right)=-\mathrm{Li}_2(z)-\frac{1}{2}\log^2(1-z) \tag{5.2}$$

を用いることで Abel の関係式は

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(zw)=\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(w)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{w(1-z)}{1-w}\right)\\ +\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-z}{1-w}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

に帰着する．これは C.J. Hill により見出された関係式であるが（[**Le**], p 3 を参照せよ），ここでは5項関係式と呼ぶことにする．

KZ 方程式の接続問題をこの関係式と関連付ける鍵となるのは

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right)=-\mathrm{Li}_{1,1}(w,z)-\mathrm{Li}_2(z)-\mathrm{Li}_{1,1}(z,1)+\mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w) \tag{5.4}$$

及び，この式において z, w を入れ換えて得られる

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{w(1-z)}{1-w}\right) = -\mathrm{Li}_{1,1}(z,w) - \mathrm{Li}_2(w) - \mathrm{Li}_{1,1}(w,1) + \mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w) \tag{5.5}$$

である．これらの式の下で，調和積

$$\mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w) = \mathrm{Li}_{1,1}(z,w) + \mathrm{Li}_2(zw) + \mathrm{Li}_{1,1}(w,z)$$

が 5 項関係式 (5.3) と同値になることは容易に見て取れる．
関係式 (5.4) を示す．

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) = \frac{1}{z(1-z)}\mathrm{Li}_1\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) = -\frac{1}{z(1-z)}\log\left(\frac{1-zw}{1-z}\right)$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) = \frac{1}{1-w}\log\left(\frac{1-zw}{1-z}\right)$$

したがって，反復積分表示

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) = \int_{(0,0)}^{(z,w)}\left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z-1} + \frac{dw}{w-1}\right)\left(-\frac{d(zw)}{zw-1} + \frac{dz}{z-1}\right)$$

を得る．一方，

$$\mathrm{Li}_{1,1}(w,z) = \int_{(0,0)}^{(z,w)}\left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z-1} + \frac{dw}{w-1}\right)\frac{d(zw)}{zw-1} + \frac{dz}{z-1}\frac{dw}{w-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) + \mathrm{Li}_{1,1}(w,z) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)}\frac{dz}{1-z}\,ш\,\frac{dw}{1-w} + \left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z-1}\right)\frac{dz}{z-1}\\ &= -\mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_{1,1}(z,1) + \mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w).\end{aligned}$$

こうして (5.4) が得られる．
ところで，(5.4),(5.5) が Landen の公式 (5.2) の 2 変数への拡張になっていることに注意しよう．実際，(5.4) において $w=0$ としたものは (5.2) そのものである．
Landen の公式は 1 変数 KZ 方程式の解の接続問題として理解できるのであるが（[**OkU2**] を参照），(5.4) もつぎの 2 変数 KZ 方程式の解の接続問題として理解できる．

$${}^t\vec{\varphi}(z,w) = (1, \mathrm{Li}_1(wz) - \mathrm{Li}_1(z), -\mathrm{Li}_{1,1}(w,z) - \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_{1,1}(z,1) + \mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w))$$

とおいて，これがみたす KZ 方程式を計算するとつぎのようになる（ここでは，接続の形で書く）．

$$d\vec{\varphi} = \Omega\vec{\varphi},$$
$$\Omega = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{1-z}\right)dz + C\frac{d(zw)}{1-zw} + \left(\frac{B_0}{w} + \frac{B_1}{1-w}\right)dw \tag{5.6}$$

ただし，

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = 0, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

この方程式の $z=0,\ w=0$ における正規化された基本解行列は

$$\mathcal{L}_{(0,0)}(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Li}_1(zw) - \mathrm{Li}_1(z) & 1 & 0 \\ \varphi(z,w) & \mathrm{Li}_1(z) - \mathrm{Li}_1(w) & 1 \end{pmatrix} z^{A_0} \tag{5.8}$$

ただし，$\varphi(z,w) = -\mathrm{Li}_{1,1}(w,z) - \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_{1,1}(z,1) + \mathrm{Li}_1(z)\,\mathrm{Li}_1(w)$ である．
$\mathbb{C}^2$ の位数 2 の双有理同型 σ_k $(k=1,2,3)$ を

$$(z', w') = \sigma_k(z,w) = \begin{cases} (w, z) & k=1 \\ \left(-\dfrac{z(1-w)}{1-z}, -\dfrac{w(1-z)}{1-w}\right) & k=2 \\ \left(\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{w}\right) & k=3 \end{cases} \tag{5.9}$$

と定義する．これらはつぎの関係式をみたす．

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = id, \\ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1, \quad \sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \\ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \end{cases}$$

引き戻し σ_k^* は代数的対合を与えることが容易に分かる．例えば，

$$\sigma_2^* \frac{dz'}{z'} = \frac{dz}{z} - \frac{dz}{z-1} + \frac{dw}{w-1}, \qquad \sigma_2^* \frac{dz'}{z'-1} = \frac{d(zw)}{zw-1} - \frac{dz}{z-1}$$
$$\sigma_2^* \frac{dw'}{w'} = \frac{dw}{w} - \frac{dw}{w-1} + \frac{dz}{z-1}, \qquad \sigma_2^* \frac{dw'}{w'-1} = \frac{d(zw)}{zw-1} - \frac{dw}{w-1}$$

であるから，

$$\sigma_2^* \omega'_{12} = \omega_{12}, \quad \sigma_2^* \omega'_{13} = \omega_{23} - \omega_{34},$$
$$\sigma_2^* \omega'_{23} = \omega_{12} + \omega_{24} - \omega_{34}, \quad \sigma_2^* \omega'_{24} = \omega_{24},$$
$$\sigma_2^* \omega'_{34} = \omega_{24} - \omega_{34}$$

これより，σ_2^* が基本関係式 (3.13) を保存することが分かる．さて，接続

$$d\vec{f} = \Omega' \vec{f},$$
$$\Omega' = \left(\frac{A'_0}{z'} + \frac{A'_1}{1-z'}\right) dz' + C' \frac{d(z'w')}{1-z'w'} + \left(\frac{B'_0}{w'} + \frac{B'_1}{1-w'}\right) dw' \tag{5.10}$$

の σ_2 による引き戻し

$$d\sigma_2^* \overrightarrow{f} = \sigma_2^* \Omega' \sigma_2^* \overrightarrow{f} \tag{5.11}$$

が KZ 方程式 (5.6), (5.7) に一致するとき,

$$A_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0' = B_1' = C' = 0 \tag{5.12}$$

この KZ 方程式 (5.10), (5.12) の原点 $z' = 0$, $w' = 0$ における正規化された基本解行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Li}_1(z') & 1 & 0 \\ \mathrm{Li}_2(z') & \log z' & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，これを σ_2 によって引き戻して得られる KZ 方程式 (5.6), (5.7) の基本解行列は

$$\mathcal{L}_{(\infty,1)}(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Li}_1\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) & 1 & 0 \\ \mathrm{Li}_2\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) & \log\left(-\frac{z(1-w)}{1-z}\right) & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

ここで，$\mathrm{Li}_k(-z(1-w)/1-z)$ は $z=\infty$, $w=1$ の近傍で正則であり，この点で 0 となることに注意する．以上により，Landen の公式の 2 変数版である (5.4) は接続関係

$$\mathcal{L}_{(0,0)}(z,w) = \mathcal{L}_{(\infty,1)}(z,w)(-1)^{\pm A_0} \tag{5.14}$$

と解釈できる．

参考文献

[AK] T. Arakawa, M. Kaneko; 多重ゼータ値および多重 L 値ノート, lectures delivered at Kyushu Univ., Waseda Univ. etc, (2002).

[BF] A. Besser, H. Furushou; The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values, preprint (2003), arXiv:math.NT/0310177.

[C] K.T. Chen; Algebras of iterated path integrals and fundamental groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156** (1971), 354-374.

[D] V.G. Drinfel'd; On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), *Algebra i Analiz*, **2**(4)(1990),149-181.

[G] A. B. Goncharov; Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint (2001), arXiv:math.AG/0103059.

[**IKZ**] K.Ihara, M.Kaneko, D. Zagier; Derivation and double shuffule relations for multiple zeta values, preprint, 2003.

[**Le**] L. Lewin (editor); Structural properties of Polylogaritms, *Math. Surveys and Monographs*, **37**, Amer. Math. Soc., 1991.

[**M**] Hoang Ngoc Minh; Differential Galois goups and noncommutaitve generating series of polylogarithms, *in the proc. of 7th World Multi-conference on Systemics, Cybernetgics and Informatics*, Orland, Florida, USA, July 27-39, 2003.

[**Ok**] J. Okuda; Duality Formulas of the Speciall Values of Multiple Polylogarithms, to appear in *Bull. London Math. Soc.*, preprpint (2003), arXiv:math.CA/0301277.

[**OkU1**] J. Okuda, K. Ueno; Relations for Multiple Zeta Values and Mellin Transforms of Multiple Polylogarithms, *Puble. RIMS, Kyoto Univ.*, **40** (2004), 537-564.

[**OkU2**] J. Okuda, K. Ueno; The Sum Formula of Multiple Zeta Values and Connection Problem of the Formal Knizhnik-Zamolodchikov Equation, to appear *in the proceedings of " Conference on Zeta Functions, Topology, Quantum Physics"*, held at Kinki University, 2003, (arXiv:math.NT/0310259).

[**Ra**] G. Racinet; Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité, preprint (2002), arXiv:math.QA/0202142.

[**Reu**] C. Reutenauer; Free Lie Algebras, *Oxford Science Publication*, 1993.

[**T**] T. Terasoma; lectures delivered at Univ. of Tokyo (2003), and at Waseda Univ.(2004).

[**Zh1**] J. Zhao; Analytic Continuation of multiple polylogarithms, preprint (2003), arXiv:math.AG/0302054.

[**Zh2**] J. Zhao; Variations of Mixed Hodge Structures of Multiple Polylogarithms, preprint (2003), arXiv:math.AG/0302055.