数理解析研究所講究録
第1551巻 2007年 75-80

Long-range percolation 入門

東京大学大学院数理科学研究科　三角　淳 (Jun Misumi)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

本稿では、1983年に Schulman [24] によって導入された long-range percolation と呼ばれる確率モデルについて、基本的な事柄や最近の研究の一端を紹介したい。

1　$\mathbb{Z}^d$ 上の long-range percolation

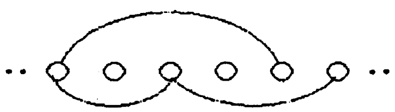
$\mathbb{Z}^d$ 上の任意の相異なる2点 x, y ごとに、確率 $p(x,y)$ で2点間が open bond $\langle x,y\rangle$ でつながり、確率 $1-p(x,y)$ で open bond ができないようなモデルを考える。ここで open bond は向き付けられていない、すなわち $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ とし、また open bond ができるかどうかは2点の組ごとに独立とする。

いま、$p(x,y)$ の値が2点間の距離 $|x-y| = \sum_{i=1}^{d}|x_i - y_i|$ に依存し、距離が大きくなるにつれて多項式オーダーで0に近づくような場合を考えよう。すなわち、与えられた実数列 $\mathbf{p} = \{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $p(x,y) = p(y,x) = p(|x-y|)$ と書けて、$\mathbf{p}$ はある $s, \beta > 0$ に対して以下をみたしているものとする。

$$p(n) \sim \beta n^{-s} (n \to \infty).$$

$\sim$ は両辺の比が1に収束する意味を表す。また、任意の n に対して $p(n) \in [0,1)$ もあわせて仮定しておく。なお、定義の与え方については文献によって細かな違いが見られるが、必要に応じてフォローする事としたい。

上のような規則でできたランダムグラフを1つ固定しよう。(例えば下図は1次元の場合で、白丸は $\mathbb{Z}$ の点、黒線は open bond を表している。)



このとき、open bond のみを通じて互いに行き来できる点の集合を連結成分と呼び、連結成分が無限個の点を含むとき、それを無限 cluster と呼ぶ。点 x を含む連結成分とは、x で何らかの現象が起こったとして、その現象が伝わる範囲の全体を表すものと解釈でき、x が無限 cluster に含まれるとは、x で起こった現象がどこまでも遠くへ広がる事に相当する。$\mathbf{p}$ の選び方と無限 cluster の存在確率 P_∞ $(\in \{0,1\})$ の関係について調べるのが、最も基本的な問題である。

2 Bond percolation との関係

前節で $\mathbf{p}$ の与え方には、多項式オーダー以外にも勿論いろいろなケースを考える事ができる。特に、

$$p(n) = 0 \quad (n \geq 2)$$

として $p(1)$ だけを動かして考えるのが、bond percolation と呼ばれるモデル(詳しくは [14] など) に対応している。Bond percolation が、伝染病が隣同士のものだけを通じて広がる現象にあたるとすれば、long-range percolation では、インターネット上でコンピューターウィルスが遠距離同士を介して広がる現象を思い浮かべる事ができる。

$d \geq 2$ のときは、bond percolation においては $p(1) < 1$ を十分大きくとれば無限 cluster の存在確率が 1 となる事が知られている。従って、long-range percolation においても任意の $s, \beta > 0$ に対して $P_\infty = 1$ となるような $\mathbf{p}$ が存在する。

一方 $d = 1$ のときは、すぐ分かるように bond percolation で無限 cluster が存在するのは $p(1) = 1$ の場合に限られる。従って 1 次元の bond percolation は自明なものであるが、long-range percolation においては、次節で述べるように s, β の値に応じて異なる状況が見られる。

3 $d = 1$ における基本的な結果

ここでは 1 節で定義した設定で、特に $d = 1$ の場合を考える。このとき、

- $0 < s \leq 1$ のとき、$P_\infty = 1$ となる。
- $1 < s < 2$ または「$s = 2$ かつ $\beta > 1$」のとき、$P_\infty = 1$ にも $P_\infty = 0$ にもなりうる。

- 「$s=2$ かつ $\beta \leq 1$」または $s>2$ のとき、$P_\infty = 0$ となる。

上の事をもう少し深く掘り下げて見ていこう。$0<s\leq 1$ のときは点同士のつながり方が強く、任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して、x から無限個の open bond が出ている確率が 1 となる。更に、確率 1 で全ての点が同じ連結成分に入る事も分かる。この部分については一般の $\mathbb{Z}^d(d\geq 2)$ などでも $0<s\leq d$ で対応する主張の成り立つ事が分かり (例えば [15] [17] [18])、後で述べる無限 cluster の一意性に関する結果からも従う。

$s>1$ のときは各点から出ている open bond は確率 1 で高々有限個であり、その期待値が 1 以下となるような $\mathbf{p}$ をとれば $P_\infty = 0$ となる。いま、$\mathbf{p}$ として特に

$$p(n) = \begin{cases} 1-\exp(-\beta n^{-2}) & n \geq 2 \\ p & n=1 \end{cases}$$

と与えると、$1<s<2$, または $s=2, \beta>1$ ならば $p<1$ を十分大きくとれば $P_\infty = 1$ となり ([23])、$s=2, \beta \leq 1$ ならば任意の $p<1$ に対して $P_\infty = 0$ となる ([2])。[2] では更に次のような事も示されている。$\theta(p)$ を原点が無限 cluster に含まれる確率とし、$s=2, \beta>1$ とする。このときある $p_c(\beta) \in (0,1)$ が存在して、「$p>p_c(\beta)$ ならば $\theta(p) \geq \beta^{-1/2}$, $p<p_c(\beta)$ ならば $\theta(p)=0$」と、$p_c(\beta)$ の前後で値に大きな差が生じている。このような事実は磁性のモデルである Ising model との関連が深く、[1] では 1 次元 Ising, Potts model において、上の $s=2$ の部分に対応する結果が与えられている。

$s>2$ のときは点同士のつながり方が弱く、どのように $\mathbf{p}$ を選んでも $\mathbb{Z}$ 上に無数の「切れ目」が存在し、$P_\infty = 0$ となる事が分かる。

4 関連する研究

4.1 無限 cluster の一意性

無限 cluster が存在するとしたら、それが高々 1 個かどうかを調べる事は重要な問題である。そうならない自明な例として、$\mathbf{p}$ を「n が偶数のとき $p(n)=1$, n が奇数のとき $p(n)=0$」で与えれば、$\mathbb{Z}^d$ 上に 2 個の無限 cluster ができる。無限 cluster の一意性に関しては [13] の結果がある。1 節の定義の下において、確率 1 で無限 cluster は一意的である。

4.2 Connectivity function

$x, y \in \mathbb{Z}^d$ が同じ連結成分に入っている確率を $\tau(x,y)$ と書き、connectivity function と呼ぶ。無限 cluster の存在確率が 0 となるような $\mathbf{p}$ の下で、$\tau(x,y)$ は $|x-y| \to \infty$ のとき 0 に近づくと考えられる。実際、1 次元で $P_\infty = 0$ をみたすようなある条件の下で、適当な正定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1|x-y|^{-s} \le \tau(x,y) \le c_2|x-y|^{-s}$$

が成り立つ ([2])。Bond percolation の場合に $\tau(x,y)$ が指数的に減少するのと比べて、緩やかなオーダーになっている事が分かる。また、x, y が同じ有限の連結成分に入っている確率を $\tau'(x,y)$ と書き、truncated connectivity function と呼ぶ。関連する文献に [10] [16] [19] などがある。

4.3 ランダムグラフ上の距離

$x, y \in \mathbb{Z}^d$ が同じ連結成分に入っているとき、その間を open bond でたどる際の最短のステップ数 $D(x,y)$ を、2 点間の chemical distance と呼ぶ。$|x-y| \to \infty$ のときに $D(x,y)$ がどのような挙動を示すかを考える。またこれに関連して、ランダムグラフを 1 辺 N の box $[-N,N]^d$ 上に制限して、その「直径」$D(N)$ の $N \to \infty$ のときの挙動を調べるという問題も考えられる。ここでは、しばしば $p(1) = 1$ と仮定される。文献としては [4] [5] [6] [7] [8] [11] などがあり、$D(x,y)$ あるいは $D(N)$ のオーダーが、それぞれ与えられた意味の下で、$0 < s < d$ のとき定数 (具体的には $d/(d-s)$ の整数部分)、$s = d$ のとき $\log N/\log\log N$、$d < s < 2d$ のとき $(\log N)^\Delta$ (但し $\Delta = \log 2/\log(2d/s)$)、$s > 2d$ のとき N となる。$s = 2d$ のときは N^δ ($\delta < 1$ は正定数) と予想されている。(上で、$D(x,y)$ の場合は N を $|x-y|$ に読み替える。)

4.4 無限 cluster 上の random walk

無限 cluster 上の任意の点から出ている open bond が有限個のとき、グラフ上の適当な点から出発して、open bond の間を等確率で移動していくような Markov 過程が定義できる。(Simple random walk と呼ばれる。) $d = 1$ のとき、$1 < s < 2$ ならば random walk は transient、$s = 2$ ならば random walk は recurrent、また $d = 2$ のとき、$2 < s < 4$ ならば random walk は transient、$s \ge 4$ ならば random walk は recurrent となる ([3])。

他に [9] [12] [20] [21] [22] [25] などの話題がある。

参考文献

[1] M.Aizenman, J.T.Chayes, L.Chayes, C.M.Newman. Discontinuity of the magnetization in one-dimensional $1/|x-y|^2$ Ising and Potts models. Journal of Statistical Physics. **50** (1988), 1-40.

[2] M.Aizenman, C.M.Newman. Discontinuity of the percolation density in one dimensional $1/|x-y|^2$ Percolation Models. Commun.Math.Phys. **107** (1986), 611-647.

[3] N.Berger. Transience, recurrence and critical behavior for long-range percolation. Commun.Math.Phys. **226** (2002), 531-558.

[4] N.Berger. A lower bound for the chemical distance in sparse long-range percolation models. Preprint, (2004).

[5] I.Benjamini, N.Berger. The diameter of long-range percolation clusters on finite cycles. Random Structures and Algorithms **19:2** (2001), 102-111.

[6] I.Benjamini, H.Kesten, Y.Peres, O.Schramm. Geometry of the uniform spanning forest: Transitions in dimensions $4, 8, 12, \cdots$. Ann. Math. **160** (2004), 465-491.

[7] M.Biskup. Graph diameter in long-range percolation. Preprint, (2004).

[8] M.Biskup. On the scaling of the chemical distance in long-range percolation models. Ann. Probab. **32** (2004), 2938-2977.

[9] B.Bollobas, S.Janson, O.Riordan. Spread-out percolation in $\mathbb{R}^d$. Preprint, (2006).

[10] G.A.Braga, L.M.Ciolleti, R.Sanchis. Decay properties of the connectivity for mixed long range percolation models on $\mathbb{Z}^d$. Preprint (2006).

[11] D.Coppersmith, D.Gamarnik, M.Sviridenko. The diameter of a one-dimensional long-range percolation graph. Random Structures and Algorithms **21** (2002), 1-13.

[12] S.Friedli, B.N.B.de Lima, V.Sidoravicius. On long range percolation with heavy tails. Preprint (2004).

[13] A.Gandolfi, M.S.Keane, C.M.Newman. Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses. Probab.Theory Relat. Fields, **92** (1992), 511-527.

[14] G.R.Grimmett. Percolation. (2nd edition). Springer 1999.

[15] G.R.Grimmett, M.Keane, J.M.Marstrand. On the connectedness of a random graph. Math.Proc.Camb.Philos.Soc. **96** (1984), 151-166.

[16] J.Z.Imbrie, C.M.Newman. An intermediate phase with slow decay of correlations in one-dimensional $1/|x-y|^2$ Percolation, Ising and Potts models. Commun.Math.Phys. **118** (1988), 303-336.

[17] S.Kalikow, B.Weiss. When are random graphs connected. Israel J. Math. **62** (1988), 257-268.

[18] H.Kesten. Connectivity of certain graphs on halfspaces, quarterspaces,$\cdots$. Probability Theory (L.H.Y.Chen, K.P.Choi, K.Hu, J.H.Lou, eds.), de Gruyter,Berlin. (1992), 91-104.

[19] D.H.U.Marchetti. Upper bound on the truncated connectivity in one-dimensional $\beta/|x-y|^2$ percolation models at $\beta > 1$. Review of Mathematical Physics. **7** (1995), 723-742.

[20] D.H.U.Marchetti, V.Sidoravicius, M.E.Vares. Oriented percolation in one-dimensional $\beta/|x-y|^2$ random cluster model at $\beta > 1$. Preprint (2006).

[21] R.Meester, J.E.Steif. On the continuity of the critical value for long range percolation in the exponential case. Commun.Math.Phys. **180** (1996), 483-504.

[22] J.Misumi. Critical values in a long-range percolation on spaces like fractals. Journal of Statistical Physics. **125** (2006), 877-887.

[23] C.M.Newman, L.S.Schulman. One dimensional $1/|j-i|^s$ percolation models: the existence of a transition for $s \leq 2$. Commun.Math.Phys. **104** (1986), 547-571.

[24] L.S.Schulman. Long range percolation in one dimension. J.Phys.A.Lett. **16** (1983), L639-L641.

[25] V.Sidoravicius, D.Surgailis, M.E.Vares. On the truncated anisotropic long-range percolation on $\mathbb{Z}^2$. Stochastic Processes and their Applications, **81** (1999), 337-349.